INTRODUCCIÓN

La palabra **DIDÁCTICA** se refiere al arte de enseñar. Para el autor de estas notas la didáctica es el arte de enseñar de manera poética y, por ello, prefiere usar el adjetivo griego διδασκαλοζ (**DIDASCÁLICO**) por su referencia a la poesía.

El propósito que se tiene para asistir a una clase es aprender y no hacer meras trascripciones de contenidos. Cuando los estudiantes gastan su tiempo escribiendo notas, participan poco y aprenden menos. La matemática es una disciplina que no se enseña sino que se aprende, y muchos estudiantes nunca aprenden como aprender. Lo ideal sería que las instituciones educativas contasen con una adecuada bibliografía, y así los estudiantes no tendrían que tomar notas.

Hasta el siglo XIX se pensaba que Euclides y sus discípulos habían descubierto las propiedades más significativas de las figuras geométricas elementales: triángulos y circunferencias. Sin embargo, durante dicho siglo se hicieron importantes descubrimientos geométricos, y hoy en día se siguen haciendo. Lo curioso de esto es que las soluciones y demostraciones pueden hacerse de manera elemental, es decir, usando la geometría del bachillerato.

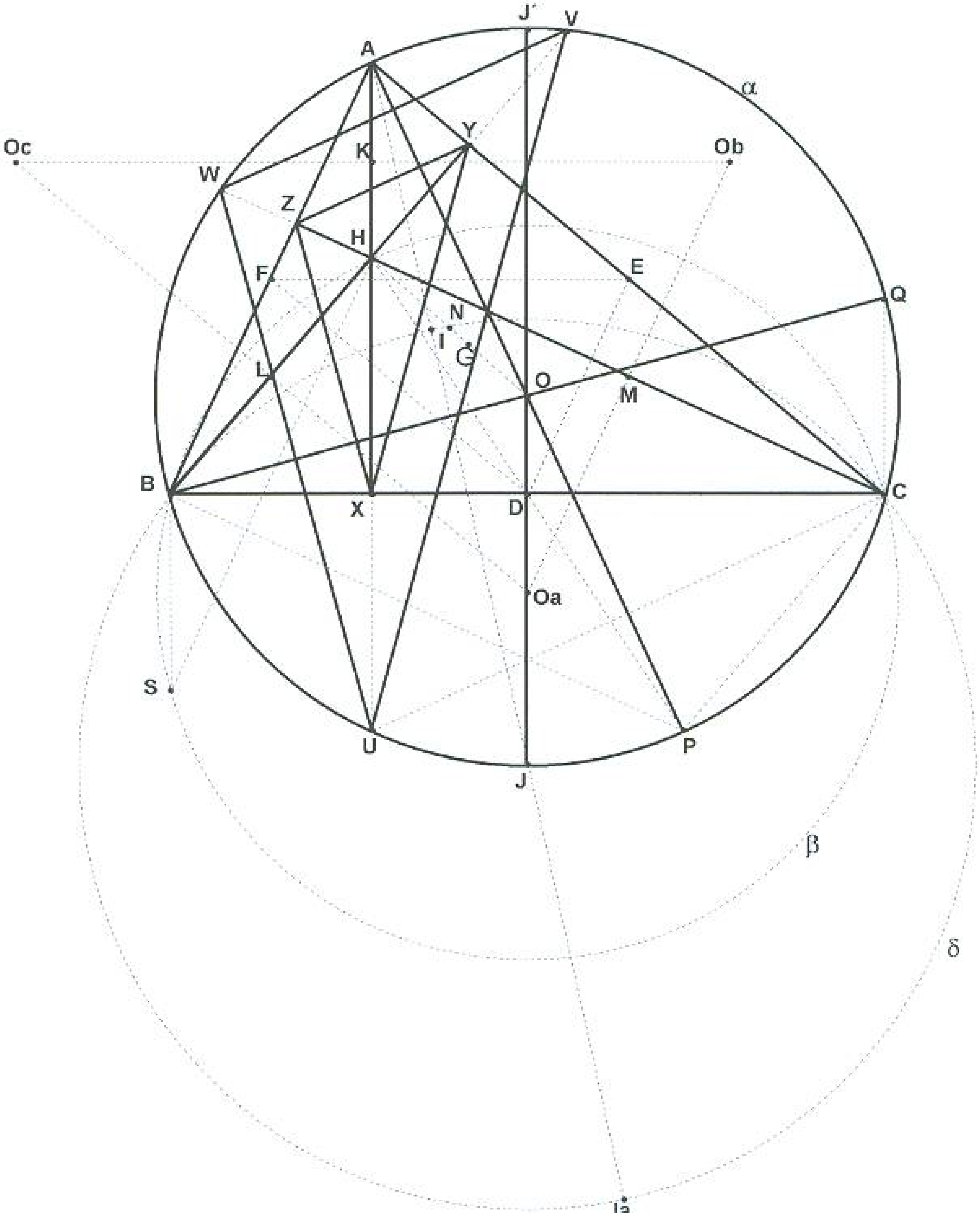
Los problemas de la geometría requieren de tiempo, mucho esfuerzo y una capacidad combinatoria de la que carece la mayoría de los estudiantes. Quizás esa sea la razón por la que los profesores de matemática del preuniversitario venezolano no dictan, en general, la geometría.

En estas páginas se presenta un bosquejo general de lo que sería una tanda de clases de geometría para que los estudiantes, que se van a convertir en profesores de matemática, aprendan a hacer demostraciones, resolver problemas geométricos y plantear nuevas proposiciones y nuevos problemas.

Cualquier comentario a estas anotaciones serán aceptadas de inmediato.

DARÍO DURÁN CEPEDA
Barquisimeto, 2003

DIDASCALIA GEOMÉTRICA.



Vea la figura anterior. Se tiene un triángulo ABC de circuncírculo α. El punto O es el circuncentro y los puntos O_a, O_b, O_c son los simétricos de O respecto de los lados BC, AC, AB. Los segmentos AX. BY, CZ son las alturas del triángulo ABC que se cortan en su ortocentro H. Los puntos U, V, W son las intersecciones de las alturas AX, BY, CZ con el circuncírculo α. El segmento JJ´ es el circundiámetro perpendicular al lado BC. Así, J es el punto medio del arco BC. Los segmentos AP, BQ son circundiámetros que pasan por los vértices A, B. Los puntos D, E, F son los puntos medios de los lados BC, AC, AB. El punto I es el incentro, es decir, el corte de las bisectrices de los ángulos del triángulo. El punto I_a es el excentro del lado BC, es decir, el corte de las bisectrices exteriores de B y C. La circunferencia δ es la circunferencia de diámetro II_a. La circunferencia β es el circuncírculo del triángulo BCH. El punto S es la interseción de β con la perpendicular a CZ por H. Los puntos K, L, M son los puntos medios de los segmentos AH, BH, CH. El punto N es el punto medio del segmento HO. El punto G es el corte de la mediana AD con HO. El número R es el circunradio del triángulo ABC, o sea, OA = OB = OC = R; y el número r es su inradio, es decir, la distancia del incentro I a los lados del triángulo.

$$\angle BAX + B = 90° \qquad (1)$$

por ser ángulos agudos en el triángulo ABX rectángulo en X.

$$\angle BCZ + B = 90° \qquad (2)$$

por ser ángulos agudos en el triángulo BCZ rectángulo en Z.
De (1) y (2) se sigue que

$$\angle BAX = \angle BCZ \qquad (3)$$

Por otro lado

$$\angle BAX = \angle BCU \qquad (4)$$

por ser ángulos inscritos en el mismo arco BU.
De (3) y (4) se deduce que

$$\angle BCZ = \angle BCU \qquad (5)$$

Esta igualdad indica que CX es bisectriz del ángulo C en el triángulo HCU. Como AX es altura es perpendicular a BC. Luego, CX es altura del lado HU en el triángulo HCU. Ya que CX es altura y bisectriz en el triángulo HCU dicho triángulo es isósceles y CX es mediatriz de HU. De manera análoga se prueba que

$$\angle WBZ = \angle ZBH,\ \angle ZAY = \angle YAV \quad (6)$$

Además,

$$HX = XU \qquad (7)$$

$$HC = UC \qquad (8)$$

De manera análoga se demuestra que los triángulos HBW, HAV son isósceles y BZ, AY son mediatrices de HW, HV. Por tanto,

$$HY = YV \qquad (9)$$

$$HA = AV \qquad (10)$$

$$HZ = ZW \qquad (11)$$

$$HB = BW \qquad (12)$$

De (7), (9), (11) se deduce el

TEOREMA # 1.

El simétrico del ortocentro de un triángulo respecto de un lado está en el circuncírculo.

La potencia del ortocentro H respecto de α es

$$AH.HU = BH.HV = CH.HW \qquad (13)$$

Por el teorema # 1 se ve que HU = 2HX, HV = 2HY, HW = 2HZ y al sustituir estos valores en (13) se tiene que AH.2HX = BH.2HY = CH.2HZ. Al simplificar por 2 se obtiene

$$AH.HX = BH.HY = CH.HZ \qquad (14)$$

Hemos demostrado el

TEOREMA # 2.
En un triángulo dado los tres productos de los segmentos en que el ortocentro divide las alturas son iguales.

La potencia del pie X de la altura AX respecto de α es AX.XU = BX.XC. Pero, XU = HX por el teorema #1. Luego.

$$AX.HX = BX.XC \qquad (15)$$

Se verifica inmediatamente que

$$BY.HY = AY.YC \qquad (16)$$

$$CZ.HZ = AZ.\ ZB \qquad (17)$$

De (15), (16), (17) se deduce el

TEOREMA # 3.
El producto de los segmentos en que un lado de un triángulo es dividido por el pie de su altura es igual a esa altura multiplicada por la distancia del lado al ortocentro.

Como B está en la mediatriz del segmento HU se tiene que BH = HU. Por ende, los triángulos BUC, BHC son congruentes y sus circunradios son iguales. Se verifica asímismo que los pares de triángulos AWB, AHB y AVC, AHC son congruentes. Hemos demostrado el

TEOREMA # 4.
Si H es el ortocentro del triángulo ABC, entonces los triángulos ABC, AHC, BHC, AHB tienen sus circunradios iguales.

¿Dónde estará el centro del circuncírculo del triángulo BHC? Ya que BC es cuerda de esa circunferencia su centro estará en la mediatriz de BC. Por el teorema anterior se tiene que los dos circunradios deben ser iguales, es decir, si T es el circuncentro de BHC se tiene que OB = BT. Esto quiere decir que T es el simétrico de O respecto de BC, o sea, O´es el circuncentro del triángulo BHC. Hemos demostrado el

TEOREMA # 5.
El circuncentro del triángulo cuyos vértices son los extremos de un lado de un triángulo dado y su ortocentro es el simétrico del circuncentro del triángulo dado respecto de ese lado.

Nótese que AH, CH son cuerdas del circuncírculo del triángulo BHC.

DEFINICIÓN 1.
Los segmentos que unen el ortocentro de un triángulo con cada uno de sus vértices se llaman **segmentos de Euler**; los puntos medios de los segmentos de Euler se llaman **puntos de Euler**, y el triángulo cuyo vértices son los puntos de Euler se llama **triángulo de Euler**.

KLM es el triángulo de Euler.
Nótese que BH, CH son cuerdas del circuncírculo β. Hemos demostrado el

TEOREMA # 6.
Las mediatrices de dos segmentos de Euler de un triángulo se cortan en un punto que es el simétrico, del circuncentro del triángulo dado, respecto del lado que une los vértices considerados.

Ya vimos que los pares de triángulos BHC, BUC; AHB, AWB y AHC, AVC son congruentes. Por tanto, sus áreas son iguales. Si [F] denota el área de la figura F, entonces se tendrá que [BHC] = [BUC], [AHB] = [AWB], [AHC] = [AVC]. Por tanto,
[AVCUBW] = [AVC] + [AHC] + [BHC] + [BUC] + [AHB] + [AWB] =
2[AHC] + 2[BHC] + 2[AHB) = 2([AHC] + [AHB] + [AHB]) = 2[ABC].
Hemos demostrado el

TEOREMA # 7
El área del hexágono cuyos vértices son los puntos donde las alturas de un triángulo cortan a su circuncírculo es igual al doble del área del triángulo.

DEFINICIÓN 2.
El triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un triángulo dado se llama **triángulo medial** de ese triángulo.

El lado EF es la mitad del lado BC porque E, F son los puntos medios de los lados AC, AB del triángulo ABC. El segmento LM es la mitad de BC ya que L, M son los puntos medios de los lados BH, CH en el triángulo BCH. Por tanto, EF = LM. Esto quiere decir que un lado del triángulo medial de un triángulo es igual a un lado de su triángulo de Euler. Esto es lo mismo con los otros lados. Por ende,

TEOREMA # 8.
El triángulo de Euler de un triángulo y su triángulo medial son congruentes.

Se sabe que OD es perpendicular a BC y al ser EF paralela a BC se tiene que OD es perpendicular a EF. Esto quiere decir que OD es altura en el triángulo medial DEF. Hemos demostrado el

TEOREMA # 9.
El circuncentro de un triángulo es el ortocentro de su triángulo medial.

De las igualdades (5) y (6) se deduce el

TEOREMA # 10.
Un vértice de un triángulo es el punto medio del arco en el circuncírculo determinado por las intersecciones de ese circuncírculo con las alturas que no parten de ese vértice.

Como A es el punto medio del arco WV se tiene que OA es perpendicular a WV. Además, Y, Z son puntos medios de los lados HV, HW en el triángulo VHW. Luego, ZY es paralela a WV y vale su mitad. Por lo dicho antes OA es perpendicular a YZ.

DEFINICIÓN 3.
El triángulo que tiene como vértices los pies de las alturas de un triángulo dado se llama su **triángulo órtico.**

TEOREMA # 11.
El circunradio que pasa por un vértice del triángulo es perpendicular a un lado del triángulo órtico.

La paralela a OA que pasa por U es perpendicular a WV. Luego, esa paralela es una altura en el triángulo UVW.

TEOREMA # 12.
Las paralelas a OA, OB, OC que pasan por U, V, W son concurrentes.

$\angle$BAJ = $\angle$CAJ porque J es el punto medio del arco BC. Luego, AJ es bisectriz del ángulo A del triángulo ABC. Por otro lado, OJ pasa por el punto medio D del lado BC.

TEOREMA # 13.
La bisectriz de un ángulo de un triángulo corta la mediatriz del lado opuesto en un punto del circuncírculo.

$\angle$JAJ´ = 90° por estar inscrito en una semicircunferencia. Luego,

TEOREMA # 14.
Las bisectrices interior y exterior de un ángulo de un triángulo pasan por los extremos del circundiámetro que es perpendicular al lado opuesto al vértice considerado.

$\angle$ABP = $\angle$ACP = 90° por estar inscritos en una semicircunferencia. Luego, BP es perpendicular a AB y, así, BP y CH son paralelas. CP es perpendicular a AXC y, así, CP y BH son paralelas. Entonces BPCH es un paralelogramo y sus diagonales PH, BC se cortan en D.

TEOREMA # 15.
El simétrico del ortocentro de un triángulo respecto del punto medio de un lado está en el circuncírculo, y es el punto diametralmente opuesto al vértice opuesto al lado.

TEOREMA # 16.
El otro extremo de un circundiámetro que pasa por un vértice de un triángulo, el punto medio del lado opuesto y el ortocentro son puntos colineales.

DEFINICIÓN 4.
Dos rectas que pasan por el vértice de un ángulo se llaman **isogonales conjugadas** respecto de ese ángulo si ambos ángulos tienen la misma bisectriz.

$\angle$BAX = 90° – B en el triángulo rectángulo ABX. $\angle$PAC = 90° – $\angle$APC = 90° – B. Por tanto, $\angle$BAX = $\angle$PAC. Luego, $\angle$XAJ = $\angle$BAJ – $\angle$BAX = $\angle$JAC – $\angle$PAC = $\angle$JAP. Esto nos indica que AJ es bisectriz de los ángulos A y $\angle$XAP. Hemos demostrado el
TEOREMA # 17.
La altura y el circundiámetro de un triángulo que parten de un vértice son isogonales conjugadas respecto del ángulo del triángulo en ese vértice.

$\angle$AUW = $\angle$AXZ y $\angle$AUV = $\angle$AXY por tener sus lados respectivamente paralelos. $\angle$AUW = $\angle$AUV por estar inscritos en los arcos iguales AV, AW. Luego, AX es bisectriz de $\angle$YXZ. Análogamente, YB, CZ son bisectrices de $\angle$ZYX, $\angle$YZX.

TEOREMA # 18.
El ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico.

AX, BY, CZ son perpendiculares a BC, AC, AB. Luego,

TEOREMA # 19.
Los lados de un triángulo son las bisectrices exteriores de su triángulo órtico.

TEOREMA # 20.
Los vértices de un triángulo son los excentros (es decir, los centros de las circunferencuias que son tangentes a un lado y a la prolongación de los otros dos) de su triángulo órtico.

Por el teorema 14 se tiene que HQ, AC se bisecan en E. Luego, AHCQ es un paralelogramo y se tendrá que AH = CQ. Por otro lado, al ser O, D puntos medios de BQ, BC se tiene que CQ = 2OD. Por tanto, AH = 2OD

TEOREMA # 21.
La distancia del circuncentro de un triángulo a uno de sus lados es la mitad de la longitud del segmento de Euler que parte del vértice opuesto al lado considerado.

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo BOD rectángulo en D se tiene que $OB^2 = OD^2 + BD^2 = \left(\frac{1}{2}AH\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = \frac{AH^2 + BC^2}{4}$. Osea, $AH^2 + BC^2 = 4OB^2 = 4OA^2$.

TEOREMA # 22.
La suma de los cuadrados de las longitudes de un segmento de Euler y su lado opuesto es cuatro veces el cuadrado del circunradio.

B = ∠APC por estar inscritos en el mismo arco AC. Luego, los triángulos ABX, APC son semejantes y se tiene que $\frac{AB}{AP} = \frac{AX}{AC}$ y así AB.AC = AP.AX.

TEOREMA # 23.
El producto de dos lados de un triángulo es igual a la altura del tercer lado multiplicada por el circundiámetro.

Si en la última igualdad se multiplica por BC se ve que AB.AC.BC = AP.(AX.BC). El paréntesis es el doble del área del triángulo. Por ende,

TEOREMA # 24.
El área de un triángulo es igual al producto de sus tres lados dividido entre dos veces el circundiámetro del triángulo.

Como H, S, C están en la circunferencia β y ∠SHC = 90° el segmento CS es diámetro de β y, por tanto, pasará por O´. También se verifica que ∠SBC = 90° y BS, AH son paralelas. Las rectas HS, ZB son paralelas por ser perpendiculares a CZ. Entonces

TEOREMA # 25.
Si la perpendicular por H a CH corta a β en S, entonces los puntos S, O´, C son colineales y ABSH es un paralelogramo.

$\angle IBI_a = \angle ICI_a = 90°$ por ser BI, BI_a y BI, BI_a bisectrices interior y exterior de B, C. Luego, δ pasa por B y C. ¿Dónde estará el centro de δ? Indudablemente estará en su diámetro II_a y además, ya que BC es cuerda también en su mediatriz. Por el teorema # 13 ese punto es J. Por ende,

TEOREMA # 26.
El centro de la circunferencia que pasa por dos vértices de un triángulo y su incentro es el punto medio del arco del circuncírculo del triángulo determinado por el lado formado por esos vértices.

Los segmentos BI, CI son cuerdas de δ.

TEOREMA # 27.
Las mediatrices de dos segmentos que unen el incentro de un triángulo con dos de sus vértices se cortan en un punto del circuncírculo.

∠HAG = ∠ODG por ser alternos internos entre las paralelas HK, OD cortadas por la transversal AD. ∠AGH = ∠DGO por ser opuestos por el vértice. Luego, los triángulos HAG y ODG son semejantes y se tiene que $\frac{AH}{DO} = \frac{AG}{GD} = \frac{HG}{OG}$. Por el teorema # 21 el primer miembro de estas razones vale 2. Así, AG = 2GD y HG = 2OG. La primera igualdad nos dice que G tiene que ser el baricentro del triángulo.

TEOREMA # 28.
El ortocentro de un triángulo, su baricentro y su circuncentro son colineales, y la distancia entre el ortocentro y el baricentro es el doble de la distancia del baricentro al circuncentro.

DEFINICIÓN 5.
La recta que pasa por el ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo se llama **recta de Euler.**

Los puntos N, K son puntos medios de los lados HO, HA del triángulo AHO. Luego, OA = 2NK. Análogamente, OB = 2NL y OC = 2NM. Pero, OA = OB = OC es el circunradio del triángulo ABC lo que significa que NK = NL = NM. Además este valor común es ½ R. Es decir,

TEOREMA # 29.
El circuncentro del triángulo de Euler de un triángulo dado es el punto medio del segmento formado por el ortocentro y el circuncentro de este último triángulo, y su circunradio es la mitad del circunradio del triángulo dado.

Por el teorema # 21 se ve que HK = OD. Además, dichos segmentos son paralelos. Por tanto, KHDO es un paralelogramo y sus diagonales HO y KD se bisecan en N. En el triángulo KXD rectángulo en X el punto N es el punto medio de la hipotenusa KD. Luego, NK = NX = ND. De manera análoga N equidista de E, F, Y, Z.

TEOREMA # 30.
El circuncentro del triángulo órtico de un triángulo dado es el punto medio del segmento formado por el ortocentro y el circuncentro de este último triángulo, y su circunradio es la mitad del circunradio del triángulo dado.

TEOREMA # 31.
El circuncentro del triángulo medial de un triángulo dado es es el punto medio del segmento formado por el ortocentro y el circuncentro de este último triángulo, y su circunradio es la mitad del circunradio del triángulo dado.

En los teoremas 28, 30 y 31 se vio que los triángulos órtico, medial y de Euler de un triángulo dado tienen exactamente el mismo ciruncírculo; su centro está en el punto medio del segmento determinado por el ortocentro y el circuncentro, y su radio es la mitad del circunradio del triángulo dado.

DEFINICIÓN 6.
La circunferencia que pasa por los pies de las alturas, los pies de las medianas y los puntos de Euler de un triángulo dado se llama el **círculo de los nueve puntos** de ese triángulo dado.

En 1765, **Leonard Euler** demostró que el circuncírculo del triángulo órtico es el circuncírculo del triángulo medial. Por esta razón algunos denominan a esa circunferencia el **círculo de Euler**. Esto también fue descubierto por **K. W. Feuerbach** y por eso algunos matemáticos la llaman el **círculo de Feuerbach**. En 1821, **Ch**. **Brianchon** y **J. Poncelet** redescubrieron esa circunferencia y vieron que también pasaba por los puntos de Euler. **Victor Poncelet** fue el que le puso el nombre de círculo de los nueve puntos.

TEOREMA # 32.
El simétrico del punto medio de un lado de un triángulo con respecto al centro de su círculo de los nueve puntos es un punto de Euler.

Esto indica que DK es un diámetro del círculo de los nueve puntos.

TEOREMA # 33.
En el círculo de los nueve puntos los puntos de Euler son los puntos medios de los arcos determinados por los vértices del triángulo órtico.

Por el teorema # 21 se tiene que AH = OO´ y además, ambos segmentos son paralelos por ser perpendiculares a BC. Luego, AHO´O es un paralelogramo y sus diagonales AO´ y HO se bisecan en N. Por ende,

TEOREMA # 34.
El simétrico del vértice de un triángulo, respecto del centro del círculo de los nueve puntos, es el simétrico del circuncentro del triángulo dado con respecto al lado opuesto al vértice en consideración.

En los triángulos rectángulos ABY y ACZ se tiene que sen A = $\frac{BY}{AB} = \frac{CZ}{AC}$. Luego, AC.BY = AB. CZ. De manera análoga se prueba que AC.BY = BC. AX. Hemos demostrado el

TEOREMA # 35.
Las alturas de un triángulo son inversamente proporcionales a sus lados.

En los triángulos rectángulos ABX, ACX se tiene que sen B = $\frac{AX}{AB}$ y sen C = $\frac{AX}{AC}$. Al dividir ambas igualdades se obtiene que $\frac{AB}{\text{sen C}} = \frac{AC}{\text{sen B}}$. De manera análoga se prueba que $\frac{AB}{\text{sen C}} = \frac{BC}{\text{sen A}}$. Hemos demostrado el

TEOREMA # 36.
Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos trigonométricos de sus ángulos opuestos

Esta igualdad se llama el **teorema del seno**. ¿Cuál será el factor de proporcionalidad en el teorma del seno? En el triángulo rectángulo APC se ve que sen ∠APC = sen B = $\frac{AC}{AP}$, o sea, $\frac{AC}{\text{sen B}} = AP = 2R$. Hemos demostrado el

TEOREMA # 37.

$$\frac{BC}{\text{sen } A} = \frac{AC}{\text{sen } B} = \frac{AB}{\text{sen } C} = 2R$$

Esta igualdad recibe el nombre de **TEOREMA GENERALIZADO DEL SENO** y el factor de proporcionalidad en el teorema del seno es el circundiámetro del triángulo dado.

TEOREMA # 38.
Un lado de un triángulo es igual a su circundiámetro por el seno del ángulo opuesto.

En el triángulo ABX se tiene que sen B = $\frac{AX}{AB}$, o sea, AX = AB.sen B. Por el teorema anterior se tierne que AB = 2R.sen C, y al sustituir se obtendrá que

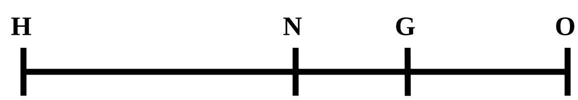
$$AX = 2R.\text{sen } B.\text{sen } C \qquad (18)$$

Por otro lado, $\angle$BOD es la mitad de $\angle$BOC que es un ángulo central. Como $\angle$BOC = 2A se ve que $\angle$BOD = A. En el triángulo rectángulo BOD se tiene que cos A = $\frac{OD}{R}$, y así OD = R.cos A. Pero, la suma de los ángulos A, B y C es 180°, y cos A = –cos(180°– A) = –cos(B + C) = senB.senC – cosB. cos C. Por ende,

$$OD = R(\text{sen } B.\text{sen } C - \cos B. \cos C) \qquad (19)$$

Si HO es paralelo al lado BC entonces HX = OD y se sigue que AX = AH + HX = 3OD. Sustituyendo (18) y (19) se obtiene 2R.sen B.sen C = 3R(sen B. sen C – cos B. cos C). Al efectuar las simplificaciones se tiene que sen B. sen C = 3.cos B. cos C y al dividir por cos B.cos C se obtiene tg B.tg C = 3. Hemos demostrado el

TEOREMA # 39.
Si en un triángulo ABC la recta de Euler es paralela al lado BC, entonces tg B. tg C = 3.



En la figura anterior hemos representado parte de la recta de Euler. Si se hace HO = 6, entonces HN = 3, NG = 1 y GO = 2. Por tanto, $\frac{HN}{NG} = \frac{HO}{OG} = 3$. Esto quiere decir que N y o son conjugados armónicos respecto del segmento HG.

TEOREMA # 40.
El centro del círculo de los nueve puntos y el circuncentro de un triángulo dividen armónicamente al ortocentro y el baricentro.

Si I está en la recta de Euler, entonces una mediana coincide con una mediatriz y así el triángulo es isósceles. Por tanto,

TEOREMA # 41.
Para que el incentro esté en la recta de Euler bastará que el triángulo sea isósceles.

Nótese que el inradio r es la distancia del incentro I a cada lado. Por tanto, en los triángulos BIC, AIB y AIC sus bases son BC, AB, AC y sus alturas son iguales a r. Luego,
2[ABC] = 2[BIC] + 2[AIB] + 2[AIC] = r.BC + r.AB + r.AC = r(BC + AB + AC). Lo del paréntesis es el perímetro del triángulo. Al dividir por 2 se obtiene el área. Hemos demostrado el

TEOREMA # 42.
El área de un triángulo es igual al inradio por el semiperímetro del triángulo.

Usando este teorema y el teorema # 23 se obtiene el

TEOREMA # 43.
El producto de los tres lados de un triángulo es igual al doble producto del circunradio, el inradio y su perímetro.

Si 2s = BC + AC + AB es el perímetro del triángulo ABC, entonces del teorema # 41 se ve que 2rs = 2[ABC] = AX.BC = BY.AC = CZ.AB. Luego, $\frac{1}{AX} = \frac{BC}{2rs}, \frac{1}{BY} = \frac{AC}{2rs}, \frac{1}{CZ} = \frac{AB}{2rs}$. Al sumar se tiene que $\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} + \frac{1}{CZ} = \frac{BC + AC + AB}{2rs} = \frac{2s}{2rs} = \frac{1}{r}$. Hemos demostrado el

TEOREMA # 44.
El recíproco del inradio de un triángulo es igual a la suma de los recíprocos de sus alturas.

$\frac{HX}{AX} = \frac{HX.BC}{AX.BC} = \frac{[BCH]}{[ABC]}, \ \frac{HY}{BY} = \frac{HY.AC}{BY.AC} = \frac{[ACH]}{[ABC]}, \ \frac{HZ}{CZ} = \frac{HZ.AB}{CZ.AB} = \frac{[ABH]}{[ABC]}$. Por tanto, se ve que $\frac{HX}{AX} + \frac{HY}{BY} + \frac{HZ}{CZ} = \frac{[BCH] + [ACH] + [ABH]}{[ABC]} = \frac{[ABC]}{[ABC]} = 1$. Por otro lado,
$\frac{AU}{AX} + \frac{BV}{BY} + \frac{CW}{CZ} = \frac{AX + XU}{AX} + \frac{BY + YV}{BY} + \frac{CZ + ZW}{CZ} = 1 + \frac{HX}{AX} + 1 + \frac{HY}{BY} + 1 + \frac{HZ}{CZ} = 4.$ Hemos demostrado el

TEOREMA # 45.
Si las alturas AX. BY, CZ del trriángulo ABC se cortan en el ortocentro H y cortan al circuncírculo del triángulo en los puntos U, V, W, entonces $\frac{AU}{AX} + \frac{BV}{BY} + \frac{CW}{CZ} = 4$.

Como BY, CZ son perpendiculares a AC, AB los puntos Y, Z están en la circunferencia de diámetro BC. Luego, el cuadrilátero BCYZ es cíclico, es decir, está inscrito en una circunferencia. Por tanto, B + ∠CYZ = 180°. Pero,. ∠AYZ + ∠CYZ = 180°. Se deduce de ambas igualdades que B = ∠AYZ. Ya que A es un ángulo común a los triángulos ABC, AYZ se sigue que esos triángulos son semejantes. Puede escribirse que}

$$ABC \sim AYZ \sim XBZ \sim XYC \qquad (20)$$

TEOREMA # 46.
Los tres triángulos que se forman en un triángulo dado por los lados de su triángulo órtico son semejantes al triángulo dado.

De la segunda semejanza dada en (20) se ve que $\frac{AZ}{XZ} = \frac{YZ}{BZ}$, es decir, AZ.ZB = XZ.YZ. De manera análoga se tiene que AY.YC = YX.YZ y BX.XC = XZ.XY

TEOREMA # 47.
El producto de los segmentos en que un lado de un triángulo es dividido por el correspondeinte vértice del triángulo órtico es igual al producto de los lados del triángulo órtico que pasan por el vértice considerado.

Al multiplicar las tres igualdades anteriores se tiene que $AZ.ZB.AY.YC.BX.XC = XZ^2.YZ^2.XY^2$.

TEOREMA # 48.
El producto de los seis segmentos en que los lados de un triángulo son divididos por los pies de las alturas es igual al cuadrado del producto de los tres lados del triángulo órtico.

DEFINICIÓN 7.
Un punto de una recta que contenga a un lado de un triángulo se llama **punto de Menelao** de ese lado si no es vértice de dicho triángulo. Un segmento que une un vértice con un punto de Menelao del lado opuesto se llama **ceviana**.

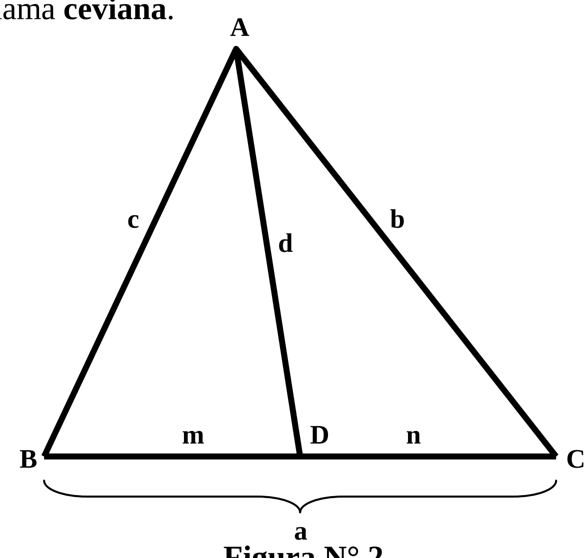


Figura N° 2

Vea la figura N° 2. Se tiene un triángulo ABC. El segmento AD = d es una ceviana interior, es decir, D es un punto entre B y C. Se tiene que AB = c, AC = b, BD = m, PC = n, a = m + n. Si AD es altura, entonces aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos ABD, ACD se tiene que

$$c^2 = m^2 + d^2 \quad (21)$$
$$b^2 = n^2 + d^2 \quad (22)$$

Restando ambas igualdades resulta $c^2 - b^2 = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = a(m - n) = a(a - 2n)$. Luego,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \qquad (23)$$

En el triángulo ADC se ve que $\cos C = \frac{n}{b}$ y así $n = b.\cos C$. Al sustituir este valor en (23) se obtiene la igualdad $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

TEOREMA # 49.
El cuadrado de un lado de cualquier triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de esos lados por el coseno del ángulo formado por estos dos lados.

Si C = 90°, entonces cos C = 0 y de (23) se obtiene el teorema de Pitágoras. Por esta razón se dice que (23) es la generalización del teorema de Pitágoras, y se llama el **teorema del coseno**.
Supóngase ahora que AP no es altura. Aplicando el teorema del coseno a los triángulos ABP, ACP se tiene que

$$c^2 = m^2 + d^2 - 2md\cos \angle BDA \qquad (24)$$
$$b^2 = n^2 + d^2 - 2nd\cos \angle DCA \qquad (25)$$

Un ángulo en D es agudo y el otro es obtuso. Por tanto, los signos en el tercer sumando a la derecha de (24) y (25) tienen signos opuestos. Sin embargo, al sumarlos no se eliminan porque, en general, m y n son distintos. Al multiplicar (24) por n, (25) por m y sumar se obtiene la igualdad $mb^2 + nc^2 = (n + m)d^2 + (m + n)mn = (m + n)(d^2 + mn) = a(d^2 + mn)$. Hemos demostrado el

TEOREMA # 50.
En el triángulo ABC de la figura N° 2 se cumple la igualdad

$$mb^2 + nc^2 = a(d^2 + mn)$$

La igualdad anterior fue presentada en 1746, sin demostración, por el matemático **Matthew Stewart** (1717-1785). Por esta razón la igualdad del teorema anterior se llama el **teorema de Stewart**. Este teorema fue demostrado en 1751 por **Thomas Simpson** (1710-1761); en 1780 por **Leonard Euler** (1707-1783), y en 1803 por **Lazare N. M. Carnot** (1753-1823)

Si AD = d es la mediana de BC = a, entonces $m = n = \frac{a}{2}$. Usando el teorema de Stewart se tiene que $m(b^2 + c^2) = a(d^2 + m^2)$, o sea, $\frac{a}{2}\left(b^2 + c^2\right) = a\left(d^2 + \frac{a^2}{4}\right)$l Al efectuar las operaciones indicadas y haciendo las simplificaciones se ve que $4d^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$. Hemos demostrado el

TEOREMA # 51.
Cuatro veces el cuadrado de una mediana de un triángulo es igual al doble de la suma de los cuadrados de los lados que forman la mediana menos el cuadrado del tercer lado.

Si AD, BE, CF son las medianas del triángulo ABC, entonces del teorema anterior se tienen las igualdades $4AD^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$, $4BE^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2$, $4CF^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$. Al sumar estas igualdades vemos que

$$4(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (26)$$

Hemos demostrado el

TEOREMA # 52.
La suma de los cuadrados de las medianas de un triángulo es los tres cuartos de la suma de los cuadrados de los lados.

Si G es el baricentro del triángulo ABC, es decir, el corte de sus medianas, entonces AD = $\frac{3}{2}$AG

BE = $\frac{3}{2}$BG, CF = $\frac{3}{2}$CG Sustituyendo estos valores en (26) se ve que 9($AD^2 + BE^2 + CF^2$) = 3($a^2 + b^2 + c^2$), y se tiene que

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (27)$$

Hemos demostrado el

TEOREMA # 53.
La suma de los cuadrados de las distancias del baricentro de un triángulo a sus vértices es igual a un tercio de la suma de los cuadrados de los lados.

Sea P un punto cualquiera del plano del triángulo ABC y sea M el punto medio de AG donde G es el baricentro. Aplicando el teorema # 51 a los triángulos PBG, PDM, PAG se tiene que $4PD^2 = 2PB^2 + 2PC^2 – BC^2$, $4PG^2 = 2PD^2 + 2PM^2 – AG^2$, $4PM^2 = 2PA^2 + 2PB^2 – AG^2$. Multiplicando la segunda estas igualdades por 2, sumando y simplificando se obtiene que

$$6PG^2 + BC^2 + 3AG^2 = 2(PA^2 + PB^2 +´PC^2)$$

Al considerar las otras dos medianas se obtienen las igualdades

$$6PG^2 + AC^2 + 3BG^2 = 2(PA^2 + PB^2 + PC^2)$$
$$6PG^2 + AB^2 + 3CG^2 = 2(PA^2 + PB^2 + PC^2)$$

Sumando las tres igualdades anteriores se obtiene
$18PG^2 + (AB^2 + AC^2 + BC^2) + 3(AG^2 + BG^2 + CG^2) = 6(PA^2 + PB^2 + PC^2)$. Del teorema # 52 se ve que $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(AG^2 + BG^2 + CG^2)$ y se observa que

$$18PG^2 + 6(AG^2 +´BG^2 + CG^2) = 6(PA^2 + PB^2 + PC^2)$$

y al dividir por 6 resulta $PA^2 + PB^2 + PC^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2$. Hemos demostrado el

TEOREMA # 54.
Si G es el baricentro de un triángulo ABC y P es un punto cualquiera de su plano, entonces

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2$$

Si P es circuncentro O del triángulo ABC, entonces OA = OB = OC = R y al sustituir arriba se verifica que $3R^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3OG^2$. Se tiene entonces que

$OG^2 = R^2 - \frac{1}{3}\left(AG^2 + BG^2 + CG^2\right)$. Por el teorema # 53 $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}\left(AB^2 + AC^2 + BC^2\right)$. Se ha demostrado el

TEOREMA # 55.
El cuadrado de la distancia entre el circuncentro de un triángulo y su baricentro es igual al cuadrado de su circunradio menos la novena parte de la suma de los cuadrados de sus lados.

Si la ceviana AD en la figura N° 2 es la bisectriz de A, entonces $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$. Los triángulos BAD y DAC tiene la misma altura h. Luego,

(BCD) = $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BD.h}{DC.h} = \dfrac{2[ABD]}{2[ADC]} = \dfrac{AB.AD.sen\alpha}{AD.AC.sen\alpha} = \dfrac{AB}{AC}$. Hemos demostrado el

TEOREMA # 56.
Los segmentos determinados en un lado de un triángulo por el pie de la bisectriz del ángulo opuesto están en la misma razón que los otros dos lados.

¿Cómo podremos calcular los segmentos m y n en el caso en que AD sea una bisectriz de A? Por lo dicho antes se tiene que $\dfrac{m}{n} = \dfrac{c}{b}$, y al sumar 1 se ve que $\dfrac{m+n}{n} = \dfrac{b+c}{b}$. Pero, m + n = a y se obtiene que $n = \dfrac{ab}{b+c}$. Además, $m = a - n = \dfrac{ac}{b+c}$. Hemos calculado los valores de m y n. Si aplicamos el teorema de Stewart al triángulo se ve que $c^2.\dfrac{ab}{b+c} + b^2.\dfrac{ac}{b+c} = a\left(d^2 + \dfrac{ac}{b+c}.\dfrac{ab}{b+c}\right)$.
Al simplificar por a y multiplicar por $(b + c)^2$ se ve $c^2.b(b + c) + b^2.c(b+c) = d^2.(b + c)^2 + a^2.b.c$, es decir, $d^2(b + c)^2 = bc[(b + c)^2 - a^2] = bc(b + c + a)(b + c - a)$. Al hacer $2s = a + b + c$ se tiene que $2(s - a) = b + c - a$, y al sustituir en la igualdad anterior se ve que $d^2(b + c)^2 = 4bcs(s - a)$. Hemos demostrado

TEOREMA # 57.
Las longitudes de las bisectrices de un triángulo ABC están dadas mediante

$$w_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcas(s-a)},\ w_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)},\ w_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$$

Si un triángulo es isósceles, entonces es fácil verificar que las bisectrices de los dos ángulos iguales son iguales. ¿Será cierto el recíproco, es decir, si dos bisectrices en un triángulo son iguales es dicho triángulo isósceles? La respuesta es si. Supóngase que $w_c = w_b$. Entonces

$$w_c^2 - w_b^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} - ac + \frac{acb^2}{(a+c)^2} = a(b-c) + abc\left[\frac{b}{(a+c)^2} - \frac{c}{(a+b)^2}\right] = a(b-c) +$$

$$\frac{abc}{(a+c)^2(a+b)^2}[b(a+b)^2 - c(a+c)^2] = a(b-c) + \frac{abc}{(a+c)^2(a+b)^2}[ba^2 + 2ab^2 + b^3 - ca^2 - 2ac^2 - c^3]$$

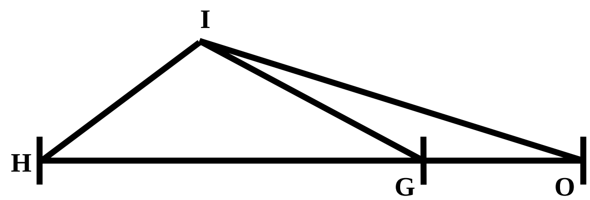
$$= a(b-c) + \frac{abc}{(a+c)^2(a+b)^2}[a^2(b-c) + 2a(b+c)(b-c) + (b-c)(b^2 + c^2 + bc] =$$

$$(b-c)\left[a + \frac{abc}{(a+c)^2(a+b)^2}[a^2 + 2a(b+c) + b^2 + c^2 + bc]\right].$$ Por nuestra hipótesis el primer miembro $w_c - w_b$ es cero, y como la cantidad entre corchetes es positiva se tendrá que $b - c = 0$, es decir, $b = c$, y el triángulo es isósceles. Hemos demostrado

TEOREMA # 58.
Si las bisectrices de dos ángulos de un triángulo son iguales, entonces dicho triángulo es isósceles.

En 1840 **D. C. Lehmus** (1780-1863) le propuso este teorema a **Jacob Steiner** (1796-1863), quién es considerado como uno de los geómetras más imoprtantes desde los tiempos de **Apolonio** (ca.262-ca.190 A.C.). **Steiner** publicó en 1833 **Die geometrischen Construktionen ausgeführt mettels der geraden Linie, und Eines festen Kreises** (Construcciones geométricas realizadas con una regla y un círculo fijo), y en 1867 publicó **Vorlesungen über Synthestische Geometrie** (Los fundamentos de la Geometría Sintética) en dos volúmenes. Por esta razón el resultado del teorema anterior recibe el nombre de **Teorema de Steiner-Lehmus**.

Nótese que si también puede demostrarse de allí que si dos lados son iguales, las bisectrices lo son.



En este dibujo hemos representado el ortocentro H, el baricentro G, el circuncentro O y el incentro I de un triángulo. Aplicando el teorema de Stewart se tiene que $IH^2.GO + IO^2.HG = HO(IG^2 + HG.GO)$. Por el teorema # 28 se ve que HG = 2GO y HO = 3GO, y así obtenemos $IH^2.GO + IO^2.2GO = 3GO(IG^2 + 2GO^2)$, y al simplificar por GO se tiene el

TEOREMA # 59.
Si H es el ortocentro, O es el circuncentro, G es el baricentro e I es el incentro de un triángulo, entonces se cumple la iguadad $HI^2 + 2.OI^2 = 3(IG^2 + 2.OG^2)$.