

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA  
Prueba Nacional — Caracas, 15 de junio de 2013  
Tercer Año

Apellidos y Nombres: \_\_\_\_\_ N° de Cédula: \_\_\_\_\_

Teléfono(s): \_\_\_\_\_ Dirección de correo electrónico: \_\_\_\_\_

Instituto: \_\_\_\_\_ Ciudad: \_\_\_\_\_ Estado: \_\_\_\_\_

(No escriba en esta línea) Puntos: 1 \_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_ 3 \_\_\_\_\_ 4 \_\_\_\_\_ Total: \_\_\_\_\_

Todas las respuestas deben justificarse.

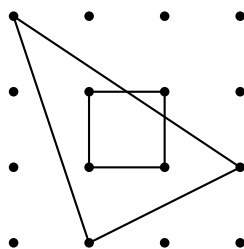
Duración de la prueba: 3 horas y media

Valor de cada problema: 7 puntos

**Problema 1.** Digamos que un conjunto de enteros positivos menores que 2013 es *interesante* si todos sus elementos son compuestos y coprimos dos a dos. Por ejemplo el conjunto  $\{8, 45, 77\}$  es interesante. Escriba un conjunto interesante con la mayor cantidad posible de elementos.

Nota: dos enteros positivos son *coprimos* si su máximo común divisor es 1.

**Problema 2.** Los puntos de la figura son los vértices de una cuadrícula, de modo que la distancia horizontal o vertical entre dos puntos consecutivos es 1 cm. ¿Cuál es el área del pentágono que resulta al intersectar el cuadrado con el triángulo?



**Problema 3.** Un farmacéuta desea preparar 24 cucharadas de una medicina que contenga las sustancias A, B y C por partes iguales. Dispone de un recipiente donde hay A y C mezclados por partes iguales; otro en el que hay A y B mezclados en la proporción 2 : 3 y un tercero en el que hay B y C mezclados en la proporción 1 : 2. ¿Cuántas cucharadas de cada recipiente debe usar para obtener la mezcla deseada?

Nota: las cantidades  $X$  e  $Y$  están en la proporción  $a : b$  si  $\frac{X}{Y} = \frac{a}{b}$ .

**Problema 4.** Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A, a poner fichas en un tablero de  $4 \times 4$ . Cada jugador, en su turno, elige una casilla vacía, coloca allí una ficha y se anota un número de puntos igual al de fichas ubicadas en casillas vecinas a la que seleccionó. Cuando se llena el tablero cada jugador suma sus puntos, y A se suma un punto adicional. El que obtenga más puntos gana, o empatan si quedan igualados. Muestre que uno de los dos jugadores tiene una estrategia que le permita ganar, juegue como juegue su adversario, y descríbalas.

Nota: Dos casillas son vecinas si son diferentes pero tienen al menos un vértice en común.