Prueba Final OJM 2015

La prueba final de la OJM 2015 se realizó en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad de Carabobo, Valencia, el sábado 13 de junio. La prueba constó de cuatro problemas, cada uno de ellos con un valor de 7 puntos. Los participantes dispusieron de tres horas y media para resolverlos.

0.1. Prueba de Primer Año

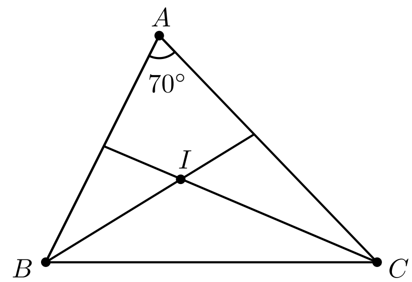
Problema 1. Ana repartió una bolsa de caramelos entre los asistentes a su cumpleaños: le dió 15 caramelos a cada niño y le sobró uno. Pero de pronto llegaron dos niños más. Entonces Ana recogió todos los caramelos y los volvió a repartir. Esta vez le tocaron 11 caramelos a cada niño y sobraron tres. ¿Cuántos caramelos tenía la bolsa?

Problema 2. N es un entero positivo de 5 dígitos. P es el número que se obtiene al colocar un 1 a la derecha del último dígito de N. Q es el número que se obtiene al colocar un 1 a la izquierda del primer dígito de N. Si P es el triple de Q, ¿cuál es el valor de N?

Problema 3. Cinco niños de edades diferentes tienen 9 caramelos para repartirse, y acuerdan hacerlo de la siguiente manera: El mayor de ellos efectuará una propuesta de reparto, que será sometida a votación. Si obtiene el apoyo de al menos la mitad de los niños presentes (incluido el proponente), será aceptada y asunto concluido. Si es rechazada, el proponente es eliminado del grupo y le tocará el turno de proponer al mayor de los que queden, repitiéndose el proceso descripto. Cada vez que una propuesta no obtenga el apoyo de al menos la mitad de los presentes, el proponente es eliminado y el turno pasa al mayor de los niños que queden. ¿Cómo se repartirán los caramelos?

Notas: 1) Los caramelos son indivisibles. 2) Cada niño basa sus decisiones exclusivamente en su provecho personal. 3) Si aceptar o rechazar una propuesta les rinde el mismo beneficio, optan por rechazarla para tratar de eliminar al proponente.

Problema 4. En el triángulo ABC se trazan las bisectrices de los ángulos en B y en C, que se cortan en I. Si $\angle BAC = 70°$, halle la medida del ángulo BIC.



0.1.1. Soluciones

1. Si c es el número de caramelos y n el número inicial de niños, entonces $c = 15n + 1 = 11(n + 2) + 3$. Luego $4n = 22 + 3 - 1 = 24$, de donde $n = 6$ y $c = 15 \cdot 6 + 1 = 91$.

Solución alternativa: Si n es el número inicial de niños, para darle caramelos a los dos niños nuevos Ana debió quitarle 4 a cada uno de los que ya estaban. Esos $4n$ caramelos y el sobrante hacen $4n + 1$, que alcanzaron para hacer 2 grupos de 11 y sobraron 3. Es decir que $4n+1 = 2 \cdot 11+3 = 25$. Por lo tanto $4n = 24$, $n = 6$ y la cantidad de caramelos era $15 \cdot 6 + 1 = 91$.

2. $P = 10N + 1$, $Q = 10^5 + N$, $10N + 1 = 3(10^5 + N)$, o sea $7N = 300000 - 1 = 299999$, de domde $N = 299999/7 = 42857$.

3. Numeremos los niños del 1 al 5, en orden decreciente de edades. Supongamos que sólo queden dos niños 4 y 5. Entonces el 4 se queda con todo, pues su voto es la mitad. Si hay tres niños 3, 4 y 5, y el 3 propone quedarse con todo, será eliminado, ya que al 4 le conviene pues luego podrá quedarse con todo y el 5 quedará igual sin nada, pero opta por la alternativa de eliminación. Sin embargo proponiendo 8 caramelos para él y uno para el número 5, el 3 obtendrá el voto favorable de 5 y gana la votación. Si hay cuatro niños 2, 3, 4 y 5, el 2 necesita conseguir un voto (además del suyo). Para ello basta con que le ofrezca un caramelo al número 4, pues éste, de ser rechazada la propuesta, no recibiría nada (por el caso anterior). Finalmente, si son 5 niños, el 1 necesita conseguir dos votos (además del suyo). Para ello basta que ofrezca un caramelo al número 3 y otro al 5, quienes apoyarán la propuesta pues de ser rechazada quedarían sin nada (por el caso anterior). Por lo tanto los caramelos se repartirán así: 7 caramelos para el número 1, uno para el 3, uno para el 5 y nada para 2 y 4.

4. Sean $\beta = \angle CBA$ y $\gamma = \angle BCA$. Entonces $\beta + \gamma + 70 = 180$, de donde $\beta + \gamma = 110$. Por otra parte $\angle CBI = \frac{1}{2}\beta$ y $\angle BCI = \frac{1}{2}\gamma$, luego en el triángulo BIC se tiene $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \angle BIC = 180$, de donde

$$\angle BIC = 180 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 180 - \frac{110}{2} = 180 - 55 = 125.$$

Luego la respuesta es 125°.

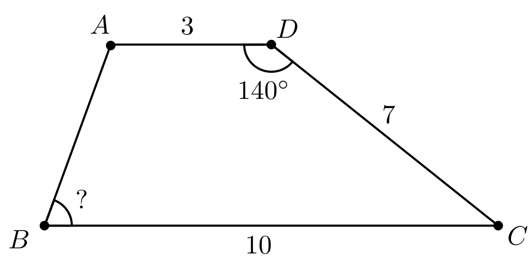
0.2. Prueba de Segundo Año

Problema 1. Idéntico al Problema 1 de Primer Año (ver pág. 1).

Problema 2. Halle el menor número natural n tal que $9n$ tenga todos sus dígitos iguales a 1.

Problema 3. Idéntico al Problema 3 de Primer Año (ver pág. 1).

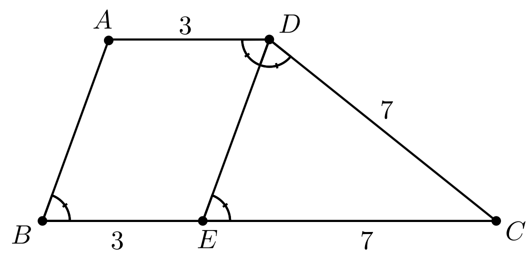
Problema 4. $ABCD$ es un trapecio con AD paralela a BC, $AD = 3$, $BC = 10$, $CD = 7$ y $\angle ADC = 140°$. Determine la medida del ángulo ABC.



0.2.1. Soluciones

2. Como $9n$ es divisible entre 9, la suma de sus dígitos debe ser divisible entre 9. Pero si esos dígitos son todos iguales a 1, entonces su número debe ser divisible entre 9. El menor valor posible para $9n$ es entonces 111111111, y en consecuencia el menor valor posible para n es $111111111/9 = 12345679$.

4. Tracemos la paralela a AB por D y sea E su punto de corte con el lado BC. Entonces $ABED$ es un paralelogramo y $BE = AD = 3$. Luego $EC = BC - BE = 10 - 3 = 7 = CD$ y el triángulo CDE es isósceles. Por lo tanto $\angle CDE = \angle CED$. Pero $\angle CED = \angle EDA$ por alternos internos, luego $\angle CDE = \angle EDA$ y como ambos suman 140°, cada uno de ellos debe medir 70°. Finalmente por ser ángulos opuestos de un paralelogramo se tiene $\angle ABC = \angle EDA = 70°$. (También se puede argumentar que $\angle DCE = 40°$ por ser suplementario de $\angle ADC = 140°$, luego los ángulos en la base del triángulo isósceles CDE miden 70°.)



Alternativamente se puede comenzar por ubicar el punto E en el lado BC de modo que $BE = 3$, con lo cual $EC = 7$. Entonces $ABED$ es un paralelogramo por tener los lados BE y AD paralelos e iguales. Luego se continúa de la misma manera.

0.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Halle la suma de todos los dígitos del número $10^{2015} - 2015$.

Problema 2. Idéntico al Problema 3 de Primer Año (ver pág. 1).

Problema 3. Idéntico al Problema 4 de Segundo Año (ver pág. 3).

Problema 4. Juan montó sus chivos en una carreta para ir a venderlos al mercado. También puso en la carreta una cantidad de repollos exactamente igual al cuadrado del número de chivos. Durante el viaje cada chivo se comió dos repollos. Una vez en el mercado Juan vendió 5 chivos y cierto número de repollos. Al final del día observó con sorpresa que el número de repollos que tenía era igual al cuadrado del número de chivos que le quedaban. Entonces puso todo lo que no vendió en la carreta y emprendió el regreso. Pero durante el viaje cada chivo se comió dos repollos, y al llegar a su casa Juan tenía chivos pero ningún repollo. ¿Cuántos repollos vendió Juan en el mercado?

0.3.1. Soluciones

1. $10^{2015} - 2015 = 10^{2015} - 1 - 2014$. Ahora bien, $10^{2015} - 1$ se compone de 2015 nueves, y al restarle 2014 queda $\underbrace{999\ldots999}_{2011\text{ nueves}}7985$, cuyos dígitos suman $2011 \times 9 + 7 + 9 + 8 + 5 = 18099 + 29 = 18128$.

4. Si Juan montó x chivos en su carreta entonces puso también x^2 repollos. Al llegar al mercado quedaban $x^2 - 2x$ repollos. Si vendió y repollos entonces quedaron $x^2 - 2x - y$, y como le quedaron $x - 5$ chivos se tiene que

$$x^2 - 2x - y = (x - 5)^2. \qquad (*)$$

Durante el viaje de regreso los $x^2 - 2x - y$ repollos fueron comidos por los $x - 5$ chivos que quedaron, a razón de 2 por chivo, es decir que

$$x^2 - 2x - y = 2(x - 5). \qquad (*)$$

De (*) y (**) resulta $(x - 5)^2 = 2(x - 5)$, y como $x - 5 \neq 0$ se tiene $x - 5 = 2$ y $x = 7$. De (**) se despeja $y = x^2 - 2x - 2(x - 5) = 49 - 14 - 4 = 31$, o sea que Juan vendió 31 repollos.

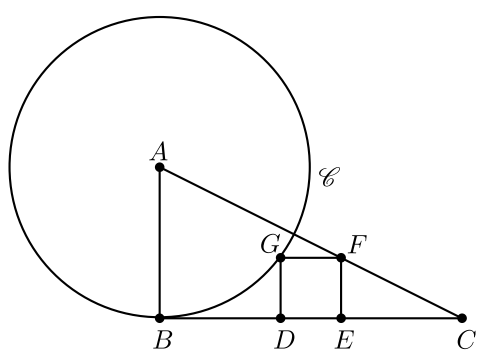
0.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Halle dos cuadrados perfectos, cada uno de 4 dígitos, que difieran en 2015.

Problema 2. Idéntico al Problema 4 de Tercer Año (ver pág. 4).

Problema 3. Juan tiene tres tarjetas en blanco. En cada una de ellas escribe un dígito diferente, del 0 al 8. Entonces reparte las tarjetas entre Ana, Berta y Claudia, dándole una tarjeta a cada una. Cada una de ellas anota el número de su tarjeta en un papel. Luego Juan recoge las tarjetas, las baraja y las vuelve a repartir. Cada una de las tres chicas anota el número de su nueva tarjeta. Este proceso se repite algunas veces. Al final, cada chica suma los números que anotó. La suma de Ana es 9, la de Berta 25 y la de Claudia 31. ¿Qué números estaban escritos en las tarjetas? Halle todas las posibilidades.

Problema 4. ABC es un triángulo rectángulo en B, con $AB = 5$ cm y $BC = 10$ cm. $\mathscr{C}$ es la circunferencia de centro A que pasa por B. $DEFG$ es un cuadrado contenido en el triángulo ABC, que tiene los vértices D y E en el segmento BC, el vértice F en el segmento AB y el vértice G en la circunferencia $\mathscr{C}$ ¿Cuál es el área de $DEFG$?



0.4.1. Soluciones

1. Sean a^2 y b^2, con $b^2 - a^2 = 2015$ y $1000 \leq a^2 < b^2 \leq 9999$. Entonces $32 \leq a < b < 100$ y $(b-a)(b+a) = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Como $65 \leq b+a < 200$, las únicas posibilidades para $b+a$ son 65 y 155. Si $b+a = 65$ entonces $b-a = 31$, de donde $a = 17$, que se descarta pues $17^2 = 289$ tiene sólo tres dígitos. La otra posibilidad es $b+a = 155$, $b-a = 13$, de donde $a = 71$ y $b = 84$. Entonces $a^2 = 5041$ y $b^2 = 7056$ son la respuesta.

3. Sea n el número de repartos y S la suma de los dígitos en las tarjetas. Entonces $nS = 9+25+31 = 65$. Luego S es un divisor de $65 = 5 \cdot 13$. Pero $0+1+2 = 3 \leq S \leq 6+7+8 = 21$, luego $S = 5$ y $n = 13$ o $S = 13$ y $n = 5$.

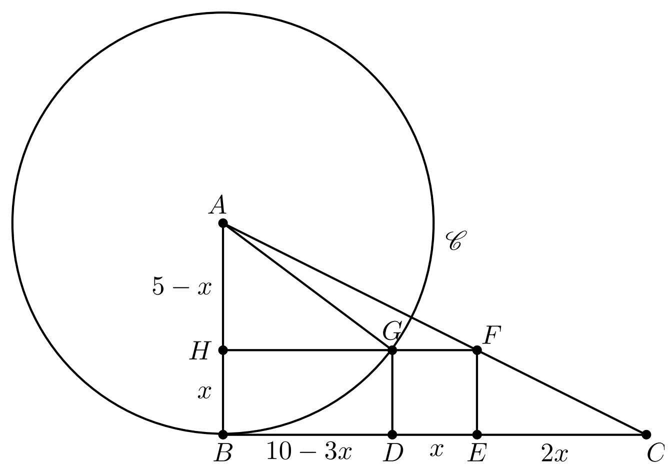
En el primer caso los dígitos sólo pueden haber sido 0, 1 y 4 o 0, 2 y 3. Ambas alternativas son posibles, como muestran los repartos $6(0,1,4)+3(4,1,0)+3(4,0,1)+(1,0,4)$ y $5(0,3,2)+4(0,2,3)+3(2,0,3)+(3,2,0)$, respectivamente.

En el segundo caso sean $x < y < z$ los dígitos escritos en las tarjetas. Es claro que $z \geq 7$, ya que si $z \leq 6$ en 5 turnos cada chica podría totalizar a lo sumo 30 puntos (y Claudia totalizó 31). Además $x \leq 1$, ya que si $x \geq 2$ en 5 turnos cada chica habría totalizado por lo menos 10 puntos (y Ana totalizó 9). Nos quedan entonces las siguientes posibilidades:

x	y	z	comentario
0	5	8	No se puede totalizar 9
0	6	7	No se puede totalizar 9
1	4	8	No se puede totalizar 9
1	5	7	$9 = 1+1+1+1+5$

Entonces en este caso la única posibiliada que queda para x, y, z es que sean 1, 5 y 7. Los repartos pueden haber sido así: (1,5,7), (1,5,7), (1,7,5), (1,7,5), (5,1,7).

4. Sea x el lado del cuadrado $DEFG$. Como CEF es semejante a CBA se tiene $CE/EF = CB/BA = 10/5 = 2$, es decir que $CE = 2x$. Por lo tanto $BD = 10 - x - 2x = 10 - 3x$. Prolonguemos FG hasta cortar a AB en H. Es claro que el triángulo AHG es rectángulo en H, $AH = AB - HB = 5 - x$, $HG = BD = 10 - 3x$ y $AG = AB = 5$. Luego por Pitágoras $(5-x)^2 + (10-3x)^2 = 5^2$, o sea $10x^2 - 70x + 100 = 0$, que dividiendo entre 10 queda $x^2 - 7x + 10 = 0$. Las raíces de esta ecuación de segundo grado son 2 y 5. Evidentemente 5 no cumple la condiciones del problema, luego $x = 2$ y finalmente el área pedida es $2^2 = 4$ cm^2.



0.5. Prueba de Quinto Año

Problema 1. Idéntico al Problema 1 de Cuarto Año (ver pág. 5).

Problema 2. María escribió en la pizarra los números desde el 1 hasta el 2015. Luego borró todos los números pares, y de los que quedaron borró todos los múltiplos de 3.

(a) ¿Cuántos números quedaron en la pizarra?

(b) ¿Cuál es la suma de todos ellos?

Problema 3. Idéntico al Problema 3 de Cuarto Año (ver pág. 5).

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Cuarto Año (ver pág. 5).

0.5.1. Soluciones

2. Primero María borra los pares 2, 4, 6,..., 2014, que forman una progresión aritmética de 1007 números que suman $(2+2014)1007/2 = 1015056$. Quedan los impares 1, 3, 5, 7, 9,..., 2013, 2015, de los cuales se borran los múltiplos de 3: 3, 9, 15,..., 2013. Estos números también forman una progresión aritmética con diferencia común 6. Como $2013 = 3+2010 = 3+6\cdot 335$, son 336 números y su suma es $(3+2013)336/2 = 338688$. En total se borraron $1007 + 336 = 1343$ números con suma total $1015056 + 338688 = 1353744$. Por lo tanto en la pizarra quedaron $2015-1343 = 672$ nçumeros. Como $1+2+3+\cdots+2015 = 2016\cdot 2015/2 = 2031120$, la suma de los que quedaron es $2031120 - 1353744 = 677376$.

Solución alternativa: Cada entero es de la forma $6q + r$, con $0 \leq r \leq 5$. Los números de la forma $6q$, $6q + 2$ y $6q + 4$ son pares. Los de la forma $6q + 3$ son múltiplos de 3. Entonces los que quedan son de la forma $6q + 1$ ó $6q + 5$. Los de la forma $6q + 1$ son 1, 7, 13,..., 2005, 2011. Forman una progresión aritmética de diferencia común 6, y como $2011 = 1 + 6 \cdot 335$, son 336 términos y su suma es $(1 + 2011)336/2 = 338016$. Los de la forma $6q + 5$ son 5, 11, 17,..., 2009, 2015. También forman una progresión aritmética con 336 términos y con suma $(5 + 2015)336/2 = 339360$. En total son 672 números con suma 677376.