Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

Geometría Euclidiana

Para

Olimpiadas Matemáticas

Darío Durán Cepeda

2014

Geometría Euclidiana para Olimpíadas Matemáticas

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, Mayo 2014

Hecho el depósito de Ley.

Depósito Legal: If25220145101918

ISBN: 978-980-6195-36-3

Formato digital: 134 páginas

Diseño general: Darío Durán Cepeda

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida por ningún medio, sin aprobación previa de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

La tarea más fascinante y, por ello, más difícil que debe realizar un profesor de matemática es mantener despiertos a sus alumnos en las clases. Quizás el aburrimiento que sienten se debe a que la matemática que le enseñaron fue un conjunto rígido de reglas que nunca entendieron y tenían que aprenderse por el apremio de sus ductores.

La matemática es intuir observar, experimentar, reflexionar, entender, discutir, justificar, abstraer, argumentar, razonar, pensar, demostrar, explicar y resolver problemas. También es descubrir y crear. La Matemática es apasionante, emocionante e intrigante como toda actividad humanan. Estudiar Matemática es trasladarse al mundo de la belleza y de la verdad y éstas son, quizás, las mejores razones para estudiarlas.

Estas clases están basadas en las siguientes creencias del autor:

- La matemática es un arte que no se enseña sino que se aprende.
- La única manera de aprender matemática es resolviendo sus problemas.
- Para mejorar la resolución de problemas cada estudiante tiene que tratar de resolver los problemas que no sabe hacer.
- Me adhiero a que "el principio estético universal en matemática es que lo **simple es bello** y esas cosas simples son imaginarias" dicho por Paul Lockhart en El lamento de un matemático.
- Un argumento matemático es un poema y de este modo el **qué** en matemática debe sustituirse por el **por qué**.
- Las definiciones y los teoremas surgen de los problemas y no al revés.

En este curso se irán presentando problemas con sus explicaciones y soluciones, y la teoría matemática irá surgiendo de ellos. Se presentarán problemas para que tú los resuelvas. Trata de construir tus propias soluciones y envíamelas para que yo pueda aprender un poco más.

El único objetivo del curso es que sus participantes tengan respuestas adecuadas para las siguientes interrogantes:

- ¿Qué es la geometría?
- ¿Cuáles son sus propiedades más relevantes?
- ¿Cómo se resuelven sus problemas?

El autor espera que los estudiantes, cuando terminen el curso, puedan apreciar la belleza de la matemática, en particular de la geometría, y vibren con su armonía interior, para que después puedan hacer una mejor presentación a sus futuros discípulos de cualquiera de los temas matemáticos que prefieran o necesiten.

Estoy convencido de que toda persona puede aprender matemática si desea hacerlo realmente, y esto quiere decir con mucho esfuerzo y extrema laboriosidad. Hay que trabajar mucho y diariamente para aprender matemática. La ventaja que tiene es que no necesita ningún aparato para hacerlo sino muchas hojas de papel, lápices en cantidades y sentarse en cualquier lugar que le guste a resolver problemas. Si un estudiante, al salir de su clase, se dedica a estudiar lo que se discutió en esa clase podrá darse cuenta de sus fallas y en la próxima clase pedir otras explicaciones a su instructor. Pero, si va dejando las tareas

para después, los impedimentos son insalvables y no se obtiene ningún aprendizaje. Si un alumno no está convencido de las afirmaciones anteriores le recomiendo que no asista a este curso.

Este curso tratará sobre la geometría que un profesor debería saber para ayudar a que los estudiantes del bachillerato venezolano aprendan. Dispensen los caros lectores la petulancia

Un famoso escritor dijo "Lo que es escrito sin esfuerzo es en general leído sin placer" Espero que los alumnos de este curso vean el esfuerzo que se ha hecho para construir estas notas. Cualquier crítica a estas páginas será bien recibida.

El objetivo de este curso, como todo objetivo presuntuoso, es hacer llegar algunas ideas a algunas personas que el autor, por su larga experiencia escolar, ha desarrollado a lo largo de su vida profesional como profesor de matemática. Posiblemente estas ideas puedan ayudar en su aula de clases en algún tiempo y en algún lugar.

El error más grave que cometen los especialistas en educación matemática es creer que existe necesariamente una mejor manera de enseñar ciertos temas de matemática. No se dan cuenta de que lo que es apropiado en ciertas circunstancias no lo es en otras circunstancias, que la personalidad y formación intelectual de una persona son distintas a las de otra persona y, lo que es más importante, lo que aprende un discente en una clase de matemática es distinto a lo que aprende otro de sus compañeros de clase.

La historia de la matemática revela que no existe un "camino real" para aprenderla, y los matemáticos griegos se dieron cuenta de ello desde hace unos dos mil años. No se puede enseñar a correr a una persona sin antes haberle enseñado a caminar, y la matemática enseñada en bases endebles contribuye al fracaso escolar. No existe ninguna didáctica de la matemática que evite tal fracaso y los egresados del bachillerato venezolano confirman con creces este aserto.

El objetivo de este curso es recurrir a la matemática para resolver los problemas de su enseñanza y de esa manera emocionar a los jóvenes para que estudien y aprendan matemática. Este curso en particular está dirigido a toda persona que quiera aprender matemática y, en particular, geometría y sólo se necesitan ganas de aprender. Saber matemática consiste en resolver problemas de matemática y en este curso se resolverán muchos y variados problemas de matemática.

Este esfuerzo está dedicado a todos los participantes de este curso. Bienvenidos a todos.

Darío Durán C.
Maracaibo, Venezuela, 2014
durandario7@gmail.com

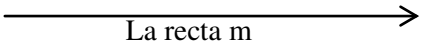
Capítulo 1. La recta y los ángulos.

Los términos primitivos de nuestra teoría son

punto, recta, plano

y no se definen. Se establece a continuación un convenio para que sus representaciones sean comunes a todos.

Un **punto** es como la marca que deja la punta de un lápiz sobre el plano y cada punto se denotará usando una letra mayúscula. Una **recta** es como la marca que deja la punta de un lápiz al deslizarla sobre el borde de una regla. Cada recta es un **conjunto de puntos** y se denotará mediante una letra minúscula. Cada recta se extiende indefinidamente en ambos lados y se puede considerar como una carretera de un solo **sentido** el cual se indicará en ocasiones con una flecha.



La recta m

El **plano** es nuestro universo y contiene los puntos y las rectas, y es como una mesa que se extiende indefinidamente en todos los sentidos. En el plano hay suficientes puntos y rectas para todas las construcciones geométricas.

Definición 1.1. Se llama **figura** a un conjunto de puntos.

Un punto, una recta y el conjunto vacío son figuras

Si P es un punto de una figura F, entonces se dirá que "P está en F" o "P pertenece a F" o "F pasa por P" o "F contiene a P".

Axioma 1. Por dos puntos distintos pasa una única recta.

La expresión "la recta AB" denotará la única recta que pasa por los puntos A y B. Las rectas AB y BA denotan rectas **coincidentes** en el sentido de que contienen exactamente los mismos puntos.

Teorema 1.1.

(A) Por un punto pasa al menos una recta.
(B) Dos rectas distintas tienen, a lo más, un punto en común.

Solución:

(A) Sea A un punto cualquiera. Para poder aplicar el axioma 1 se necesitan al menos dos puntos distintos. Tómese un punto B distinto de A. Por el axioma 1 existe la única recta AB que pasa por A.
(B) Sean m y n dos rectas distintas. Si A y B son dos puntos distintos comunes a las rectas m y n, entonces del axioma 1 se deduce que las rectas AB, m, n coinciden. Pero, esto es falso porque m y n son distiuntas. Luego, las rectas m y n no pueden tener más de un punto en común.

Ya que el punto B usado en la demostración del teorema 1.1(A) es arbitrario se concluye que por un punto cualquiera del plano pasan infinitas rectas distintas.

Definición 1.2.

(A) Se dice que dos rectas **se cortan** si tienen un único punto en común.
(B) Se dice que dos rectas son **paralelas** si no se cortan.
(C) Se dice que varias rectas son **concurrentes** si todas ellas pasan por un mismo punto.
(D) Varios puntos se dicen **colineales** si todos ellos están en una misma recta.

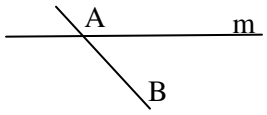
Problema 1.1.

(A) ¿Existen rectas que se cortan?

(B) ¿Existen rectas paralelas?

(C) ¿Existen rectas paralelas distintas?

Solución:



(A) Sea A un punto de una recta m y sea B un punto que no está en m. Los puntos A y B son distintos pues A está en m y B no lo está. Por el axioma 1 existe la recta AB que es distinta de m porque B está en AB y no está en m. Luego, las rectas AB y m se cortan por el problema 1.2. Por consiguiente, hay rectas que se cortan.

(B) Dos rectas que coinciden son paralelas ya que no tienen un único punto en común. Por tanto, hay rectas paralelas.

(C) El autor de estas notas no tiene, en estos momentos, respuesta a esta interrogante.

Definición 1.3. Se dice que n puntos **están en posición general** si $n > 2$ y cada tres de ellos no son colineales.

Problema 1.2. Sean $A_1, A_2, \ldots,$ An n puntos en posición general.

(A) Todos esos puntos son distintos.

(B) Las rectas que pasan por cada dos puntos distintos son distintas.

(C) ¿Cuántas rectas pasan por cada dos puntos?

Solución:

(A) Supóngase que los puntos A_i y A_k coinciden y sea B ese punto común. Si A_p es un tercer punto, entonces la recta BA_p contiene los tres puntos colineales A_i, A_k y A_p lo cual es absurdo. Por tanto, A_i y A_k no pueden coincidir.

(B) Si las rectas A_iA_k y A_mA_n coinciden, entonces los cuatro puntos A_i, A_k, A_m, A_n son colineales lo cual es absurdo.

(C) Las $n - 1$ rectas A_1A_2, A_1A_3, …, A_1A_n que pasan por A_1 y los restantes puntos son distintas por (B). Por el punto A_2 pasan las $n - 2$ rectas distintas A_2A_3, A_2A_4, …, A_2A_n porque las rectas A_1A_2 y A_2A_1 coinciden. Luego, por el punto A_j pasan las $n - j$ rectas distintas A_jA_{j+1}, A_jA_{j+2}, …, A_jA_n ya que las rectas anteriores habían sido contadas. Por tanto, el número total de rectas está dada por

$$S = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Por la propiedad conmutativa de la suma se puede escribir

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1)$$

Al sumar miembro a miembro verticalmente se obtiene

$$2S = n + n + n + \ldots + n + n + n$$

Ya que hay $n - 1$ sumandos iguales a n se ve que $2S = (n - 1)n$ y al dividir por 2 la respuesta es

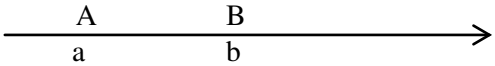
$$S = \frac{(n-1)n}{2}$$

En el próximo axioma se van a asociar puntos de una misma recta con los números reales. Se escribirá A(a) para indicar que al punto A de esa recta se le asoció el número real a, y que al número real a se le asoció el punto A de la recta.

Axioma 2. A cada punto de una recta m se le asigna un único número real, llamado su **coordenada**, tal que a puntos distintos se le asignan coordenadas distintas y cada número real es la coordenada de un único punto de m. Si A(a) y B(b) son dos puntos de la recta m, entonces $a < b$ si y sólo si el punto B está

más cerca de la flecha de m que el punto A, y la **distancia** de A a B está dada por AB = $|b - a|$ donde las rayas verticales indican valor absoluto.

Esta asignación se llama **sistema de coordenadas** en m. El punto de m cuya coordenada es el número cero se llama **origen de coordenadas**.



De acuerdo con el axioma 2 un sistema de coordenadas en una recta m es una **función biyectiva** de dominio el conjunto de los puntos de m y de rango el conjunto $\Re$ de los números reales, y se establece un **orden** en los puntos de la recta m.

La mera yuxtaposición de dos letras mayúsculas indica la distancia entre los puntos asociados. Así, AB denota la distancia entre los puntos A y B.

Problema 1.3.

(A) Halle X(x) si A(3) y AX = 5.

(B) Halle Z(z) si A(5) y AZ $\leq$ 3.

Solución:

(A) Del axioma 2 se ve que $|x - 3| = 5$. Luego, $x - 3 = 5$ ó $3 - x - 5$. Por ende, $x = 8$ ó $x = -2$. Las soluciones son los puntos X(8) y X(–2).

(B) Del axioma 2 se ve que $|z - 5| \leq 3$. Luego, $z - 5 \leq 3$ ó $5 - z \leq 3$. Por tanto, $z \leq 8$ ó $z \geq 2$. Las soluciones son todos los puntos Z(z) tales que $2 \leq z \leq 8$.

Teorema 1.2.

(A) Dos puntos coinciden si y sólo si la distancia entre ellos es cero.

(B) Si A(a) es un punto de una recta m y d es un número real positivo, pruebe que existen exactamente dos puntos en la recta que están a la distancia d del punto A.

Demostración:

(A) Los puntos A(a) y B(b) coinciden si y sólo si a = b si y sólo si AB = $|b - a| = 0$.

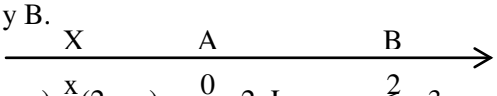
(B) Si se toman los puntos P(a + d) y V(a – d), entonces AP = $|(a + d) - a| = d$ y AQ = $|(a - d) - a| = d$. Se ha demostrado que hay dos puntos P y Q que están a la distancia d del punto A. Mostremos ahora que son únicos. Sea Z(z) otro punto tal que AZ = d. Entonces $|z - a| = d$ y se producen las dos posibilidades: $z - a = d$ ó $a - z = d$. En el primer caso se tiene que $z = a + d$ y el punto Z coincide con el punto P; en el segundo caso se tiene que $z = a - d$ y el punto Z coincide con el punto Q.

Problema 1.4. Sean A, B dos puntos de una recta m tales que AB = 2. Halle todos los puntos X de m tales que $2AX - BX \geq 1$.

Solución:

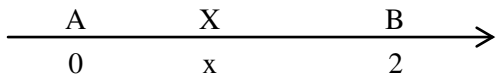
Ya que AB = 2 se puede hacer A(0) y B(2). Para evitar los valores absolutos estudiemos la posición del punto X respecto de los puntos A y B.

Caso 1. $x < 0$.

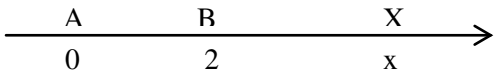


Se tiene que $1 \leq 2AX - BX = 2(0 - x) - (2 - x) = -x - 2$. Luego, $x \leq -3$ y x está en el intervalo $(-\infty, -3]$.

Caso 2. $0 \leq x < 2$



Se tiene que $1 \leq 2AX - BX = 2(x - 0) - (2 - x) = 3x - 2$. Así, $3x \geq 3$ y $x \geq 1$. Luego, x esta en el intervalo [1, 2).



Caso 3. $x \geq 2$

Se tiene que $1 \leq 2AX - BX = 2(x - 0) - (x - 2) = x + 2$. Luego, $x \geq -1$ lo cual es siempre cierto porque x no es menor que 2.

En el lenguaje de los intervalos la respuesta es $(-\infty, 3] \cup [1, +\infty)$.

Definición 1.4.

(A) Se dice que el punto P **está entre** los puntos A y B si $a < p < b$. En este caso también se dice que los puntos A y P **están del mismo lado** de B o que los puntos P y B **están del mismo lado** de A o que los puntos A y B **están en lados opuestos** de P

(B) La figura formada por dos puntos distintos A y B, y todos los puntos que están entre A y B se llama **segmento** AB de **extremos** A y B. La distancia AB se llama el **tamaño** o la **longitud** del segmento AB.

(C) Un punto de un segmento se llama **punto interior** si no es un extremo.

(D) La **prolongación** del segmento AB es la figura formada por los puntos P tales que B está entre A y P.

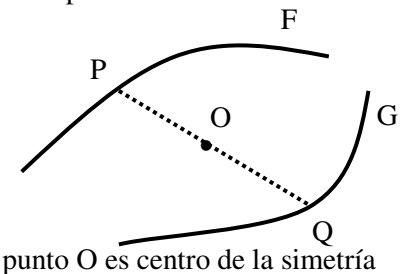
(E) La **prolongación** del segmento BA es la figura formada por los puntos Q tales que A está entre Q y B.

(F) Se dice que M es el **punto medio** del segmento AB si M está entre A y B y AM = MB.

(G) Se dice que el punto M **biseca** al segmento AB si M es el punto medio del segmento AB.

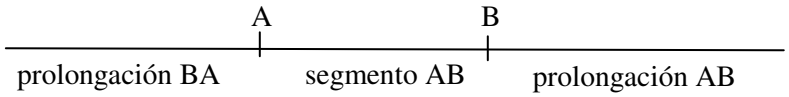
(H) Se dice que los puntos A y B son **simétricos** respecto del punto M si M es el punto medio del segmento AB. También se dice que A es el **simétrico** de B respecto de M.

(I) Se dice que las figuras F y G son **simétricas** respecto de un punto O si cada punto P de F tiene en G un simétrico respecto de O. El punto O se llama **centro de simetría**.



El punto O es centro de la simetría

Los segmentos AB y BA coinciden pero sus prolongaciones son distintas.



Teorema 1.3.

(A) Si el punto P está entre los puntos A y B, entonces AP + PB = AB. AP < AB y PB < AB

(B) Si A, B, Q son tres puntos colineales, distintos y AQ + QB = AB, entonces Q está entre A y B.

Demostración:

(A) Por hipótesis se tiene que $a < p < b$. Luego, $AP + PB = (p - a) + (b - p) = b - a = AB$. Cada sumando no negativo es menor que la suma.

(B) Supóngase que Q no está entre A y B. Existen dos casos.

Caso 1. Q está en la prolongación del segmento AB.

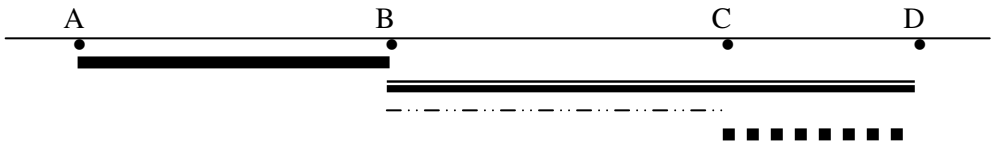
De 1 se ve que AQ = AB + BQ y al usar la hipótesis se tiene que AB = AB + BQ + QB. Al simplificar se tiene que 2BQ = 0 y así BQ = 0. Pero, esto es absurdo pues los puntos B y Q son distintos.

Caso 2. Q está en la prolongación del segmento BA.

De 1 se ve que QB = QA + AB y al usar la hipótesis se tiene que AB = AQ + QA + AB. Al simplificar se tiene AQ = 0 lo cual es también absurdo pues los puntos A y Q son distintos.
De ambos casos se desprende que Q está entre A y B.

Problema 1.5. Los tres puntos A, B, C están en una recta m y en ese mismo orden tales que AB = 3 y BC = 6. Halle todos los puntos D, en la recta m, de modo que entre los cuatro segmentos AB, BD, BC y CD haya exactamente dos segmentos iguales.

Solución:



Se pueden tomar los puntos A(0), B(3), C(9) y se cumple todas las hipótesis. Si D(d), entonces AB = 3, BD = $|d–3|$, BC = 6 y CD = $|d–9|$.

Caso 1. AB = BD.

Se tiene que $|d–3| = 3$ y así $d–3 = \pm 3$. Por ende, d = 0 ó d = 6. Para d = 0 se tiene que AB = 3, BD = 3, BC = 6, CD = 9. Luego, d = 0 es solución. Para d = 6 se tiene que AB = 3, BD = 3, BC = 6, CD = 3. Luego, d = 6 no es solución.

Caso 2. BD = BC.

Se tiene que $|d–3| = 6$ y así $d – 3 = \pm 6$. Por tanto, d = –3 ó d = 9. Para d = –3 se ve que AB = 3, BD = 6, BC = 6, CD = 12. Luego, d = –3 es solución. Para d = 9 se tiene que AB = 3, BD = 6, BC = 6, CD = 0. Luego, d = 9 es solución.

Caso 3. CD = AB

Se tiene que $|d–9| = 3$ y así $d–9 = \pm 3$. Por tanto, d = 12 ó d = 6. Para d = 12 se ve que AB = 3, BD = 9, BC = 6, CD = 3. Luego, d = 15 es solución. Ya vimos en el caso 1 que d = 6 no es solución.

Caso 4. CD = BC.

Se tiene que $|d–9| = 6$ y así $d–9 = \pm 6$. Por tanto, d = 15 ó d = 3. Para d = 15 se ve que AB = 3, BD = 12, BC = 6, CD = 6. Luego d = 15 es solución. Para d = 3 se ve que AB = 3, BD = 0, BC = 6, CD = 6. Luego, d = 3 es solución.

Caso 5. BD = CD.

Se tiene que $|d–3| = |d–9|$ Si $d > 9$, entonces $d – 3 = d – 9$ lo cual es imposible. Si $3 < d < 9$, entonces $d – 3 = 9 – d$ y así d = 6 que ya vimos no es solución. Si $d < 3$, entonces $3 – d = 9 – d$ lo cual es imposible.

En resumen la solución está formada por los puntos de coordenadas –3, 0, 3, 9, 12 y 15.

Definición 1.5.

(A) Sean O y A dos puntos distintos. Se llama **semirrecta** OA de **origen** O a la figura formada por los puntos que están en el segmento OA o en su prolongación. También se dice que la semirrecta OA **parte de** O y **pasa** por A.

(B) Las semirrectas OA y OB se dicen **opuestas** si el origen común O está entre los puntos A y B.

Problema 1.6.

(A) Dados dos puntos distintos A y B caracterice las coordenadas de los puntos que están en la semirrecta AB.

(B) Sean A(1) y B(–3) dos puntos. Halle las coordenadas de los puntos de la semirrecta AB. Halle un punto en esa semirrecta que esté a la distancia 7 de A.

Solución:

(A) La semirrecta AB tiene origen el punto A y pasa por el punto B. Si P es un punto de esa semirrecta, entonces P está en el segmento AB o en su prolongación, es decir, $a \le p \le b$ ó $b < p$. Todo eso es equivalente a la desigualdad $a \le p$.

(B) En este caso la semirrecta AB parte de A y pasa por B. Luego, un punto Q de esa semirrecta tiene coordenada $q \leq 1$. Por último si U es un punto de la semirrecta AB y AU = 7, entonces $u \leq 1$ y del axioma 2 se tiene que $|u - 1| = 7$. Por tanto, $u = -6$.

Definición 1.6.

(A) Se llama **razón** entre dos segmentos AB y CD al cociente de sus tamaños.

(B) Se dice que las razones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ son **iguales** y se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e si ad = bc. Esta última igualdad se llama **producto en cruz.**

(C) La igualdad de dos razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se llama una **proporción** y las cantidades se llaman **términos**. Las cantidades a y d se llaman **extremos** y las cantidades b y c se llaman **medios**. El término d se llama **cuarta proporcional** de los restantes términos.

(D) Se dice que el segmento de tamaño b es **media proporcional** entre los segmentos de tamaños a y c si $b^2 = ac$. En este caso la cantidad c se llama **tercera proporcional** entre a y b.

(E) Se dice que los segmentos de tamaños a, b, c son **proporcionales** a los segmentos de tamaños x, y, z si $a \leq b \leq c$, $x \leq y \leq z$ y $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$. El número k se llama la **razón de proporcionalidad**.

(F) Se dice que los segmentos de tamaños a, b, c son **inversamente proporcionales** a los segmentos de tamaños x, y, z si ambas ternas están ordenadas en orden contrario y $a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z$.

(G) Se dice que el punto P **divide internamente** al segmento AB en la **razón** $k > 0$ si el punto P está entre A y B, y $\frac{AP}{PB} = k$.

(H) Se dice que el punto Q **divide externamente** al segmento AB en la **razón** $k > 0$ si Q está en una de las prolongaciones del segmento AB y $\frac{AQ}{QB} = k$.

(I) Se dice que los puntos P, Q son **conjugados armónicos** respecto del segmento AB si lo dividen interna y externamente en la misma razón. También se dice que Q es el **conjugado armónico** de P respecto del segmento AB o que los segmentos AB y PQ son **armónicos** o que los puntos A, B, P, Q **forman una cuaterna armónica.**

Teorema 1.4. Sea AB un segmento.

(A) Si un punto P está en la prolongación del segmento AB, entonces $\frac{AP}{PB} = k > 1$.

(B) Si un punto P está en la prolongación del segmento BA, entonces $\frac{AP}{PB} = k < 1$.

(C) Si P es el punto de la recta AB tal que $\frac{AP}{PB} = k = 1$, entonces P es el punto medio del segmento AB.

Demostración:

(A) Si P está en la prolongación del segmento AB, entonces $a < b < p$. De $a < b$ al multiplicar por -1 se tiene que $-a > -b$ y al sumar p se tiene que $p - a > p - b$, es decir, $PA > PB$. Al dividir entre $PB > 0$ se tiene que $\frac{AP}{PB} = k > 1$.

(B) Si P está en la prolongación del segmento BA, entonces $p < a < b$. Al restar p se obtiene que $a - p < b - p$, es decir, $AP < BP$ y al dividir por BP se ve que $\frac{AP}{PB} = k < 1$.

(C) De la hipótesis se ve que AP = PB, y del axioma se sigue que $|p - a| = |b - p|$. De estas igualdades se ven cuatro posibilidades: $p - a = b - p$, $p - a = p - b$, $a - p = b - p$, $a - p = p - b$. El segundo y tercer caso no pueden darse porque se tendría que $a = b$. En los otros dos casos se tiene que $p = \frac{a+b}{2}$ lo que indica que P es el punto medio del segmento AB.

Problema 1.7. Sean A(0), B(180), P(120) Q(300).

(A) ¿Es Q el conjugado armónico de P respecto del segmento AB?
(B) Halle el conjugado armónico de P respecto del segmento AB.
(C) Halle el conjugado armónico de Q respecto del segmento AB.
(D) Halle el conjugado armónico de A respecto del segmento PQ.
(E) Halle el conjugado armónico de B respecto del segmento PQ..

Solución:

A	P	B	Q
0	120	180	300

(A) El punto P divide internamente al segmento AB en la razón $\frac{AP}{PB} = \frac{120-0}{180-120} = \frac{120}{60} = 2$. El punto Q divide externamente al segmento AB en la razón $\frac{AQ}{QB} = \frac{300-0}{300-180} = \frac{300}{120} = \frac{5}{2}$. Como estas dos razones no son iguales se ve que P y Q no son conjugados armónicos respecto del segmento AB.

(B)

A	P	B	T
0	120	180	t

Ya que P divide internamente al segmento AB en la razón 2 su conjugado armónico, que llamaremos T, debe dividir externamente al segmento AB en la razón 2. Del teorema 1.4 se deduce que T está en la prolongación del segmento AB. Luego, $2 = \frac{AT}{TB} = \frac{t-0}{t-180} = \frac{t}{t-180}$. Al despejar t se obtiene que t = 360. O sea, T(360) es el conjugado armónico de P respecto del segmento AB.

(C) Como Q divide externamente al segmento AB en la razón $\frac{5}{2}$ su conjugado armónico S lo debe dividr internamente en esa misma razón.

A	S	B	Q
0	s	180	300

Así, $\frac{5}{2} = \frac{AS}{SB} = \frac{s-0}{180-s} = \frac{s}{180-s}$. Al despejar s se obtiene que $s = \frac{900}{7}$. Luego, $S\left(\frac{900}{7}\right)$ es el comjugado armónico del punto Q respecto del segmento AB.

(D) El punto A divide externamente al segmento PQ en la razón $\frac{PA}{AQ} = \frac{120-0}{300-0} = \frac{120}{300} = \frac{2}{5}$. Su conjugado armónico U deberá dividirlo internamente en la misma razón.

A	P	U	Q
0	120	u	300

Teorema 1.5.

(A) En la recta AB existe un único punto que divide internamente al segmento AB en la razón k > 0.
(B) En la recta AB existe un único punto que divide externamente al segmento AB en la razón k > 0 y k ≠ 1.

Demostración:

(A) Sea P un punto de coordenada $p = \frac{a+bk}{k+1}$. Se ve que $p - a = \frac{a+bk}{k+1} - a = \frac{a+bk-ak-a}{k+1} = \frac{(b-a)k}{k+1} > 0$ lo que indica que a < p. Por otro lado, se tiene que $b - p = b - \frac{a+bk}{k+1} = \frac{bk+b-a-bk}{k+1} = \frac{b-a}{k+1} > 0$ lo que indica que p < b. Se ha demostrado que P está entre A y B. Además, $\frac{AP}{PB} = \frac{p-a}{b-p} = \frac{\frac{(b-a)k}{k+1}}{\frac{b-a}{k+1}} = k$. Si Z es otro punto que divide internamente al segmento AB en la razón k, entonces a < z < b y $\frac{AZ}{ZB} = k$. Luego, $\frac{z-a}{b-z} = k$ y al despejar z se obtiene que $z = \frac{a+bk}{k+1}$ lo que indica que los puntos P y Z coinciden porque tienen las mismas coordenadas.

(B) Caso 1. $0 < k < 1$

Defínase el punto Q de coordenada $q = \frac{a-bk}{1-k}$. Así, $a - q = a - \frac{a-bk}{1-k} = \frac{a-ak-a+bk}{1-k} = \frac{(b-a)k}{1-k} > 0$. Luego, $q < a$ lo que indica que Q está en la prolongación del segmento BA. Además, se cumple que $b - q = b - \frac{a-bk}{1-k} = \frac{b-bk-a+bk}{1-k} = \frac{b-a}{1-k}$. Por tanto, $\frac{AQ}{QB} = \frac{a-q}{b-q} = \frac{\frac{(b-a)k}{1-k}}{\frac{b-a}{1-k}} = k$. Por último, si U está en la prolongación del segmento BA y $\frac{AU}{UB} = k$, entonces $k = \frac{a-u}{b-u}$ y al despejar u se verifica que los puntos U y Q coinciden por tener las mismas coordenadas.

Caso 2. $k > 1$

Defínase el punto Q de coordenada $q = \frac{bk-a}{k-1}$. Así, $q - b = \frac{bk-a}{k-1} - b = \frac{bk-a-bk+b}{k-1} = \frac{b-a}{k-1} > 0$ lo que indica que Q está en la prolongación del segmento AB. Además, $q - a = q - \frac{bk-a}{k-1} = \frac{bk-a-ak+a}{k-1} = \frac{(b-a)k}{k-1}$. Luego, $\frac{AQ}{QB} = \frac{q-a}{q-b} = \frac{\frac{(b-a)k}{k-1}}{\frac{b-a}{k-1}} = k$. Por último, si V está en la prolongación del segmento AB y $k = -\frac{AV}{VB}$, entonces se tiene que $k = \frac{v-a}{v-b}$ y al despejar v se verifica que los puntos V y Q coinciden por tener las mismas coordenadas.

De estos dos teoremas se desprende la siguiente propiedad importante: si P, Q son puntos en el interior del segmento AB o en su exterior y $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$, entonces los puntos P y Q coinciden.

Problema 1.8. Sean AB y PQ dos segmentos armónicos de razón k.

(A) Halle PQ

(B) Halle MN donde M y N son los puntos medios de los segmentos AB y PQ.

Solución:

(A) Caso 1. $0 < k < 1$

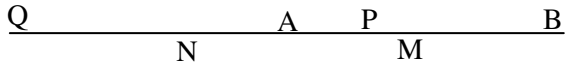
En el problema anterior se vió que la coordenada del punto P es $\frac{a+bk}{k+1}$ y la coordenada del punto Q es $\frac{a-bk}{1-k}$. Por tanto, $PQ = p - q = \frac{a+bk}{k+1} - \frac{a-bk}{1-k} = \frac{a+bk-ak-bk^2-ak-a+bk^2+bk}{(k+1)(1-k)} = \frac{2bk-2ak}{1-k^2} = \frac{2kd}{1-k^2}$ donde $d = b - a$.

Caso 2. $k > 1$

En este caso la coordenada de Q es $\frac{bk-a}{k-1}$. Luego, $PQ = q - p =$

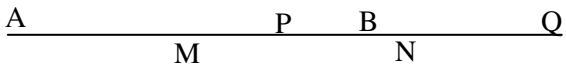
$$\frac{bk-a}{k-1} - \frac{a+bk}{k+1} = \frac{bk^2+bk-ak-a-ak+a-bk^2+bk}{(k-1)(k+1)} = \frac{2bk-2ak}{k^2-1} = \frac{2kd}{k^2-1} \text{ donde } d = b - a.$$

(B) Caso 1. $0 < k < 1$



$$MN = QM - QN = QA + AM - QN = AQ + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}PQ = \frac{kd}{1-k} + \frac{d}{2} - \frac{kd}{1-k^2} = \frac{2kd(1+k)}{2(1-k)(1+k)} + \frac{d(1-k^2)}{2(1-k^2)} - \frac{2kid}{1-k^2)} = \frac{2kd+2k^2d+d-k^2d-2kd}{2(1-k^2)} = \frac{k^2d+d}{2(1-k^2)} = \frac{(k^2+1)d}{2(1-k^2)}$$

Caso 2. $k > 1$



$$MN = AN - AM = AP + PN - AM = AP + \frac{1}{2}\ PQ - \frac{1}{2}\ AB =$$

$$\frac{kd}{k+1} + \frac{kd}{k^2-1} - \frac{d}{2} = \frac{2kd(k-1)}{2(k+1)(k-1)} + \frac{2kd}{2(k^2-1)} - \frac{d(k^2-1)}{2(k^2-1)} = \frac{2k^2d-2kd+2kd-dk^2+d}{2(k^2-1)} = \frac{k^2d+d}{2(k^2-1)} = \frac{(k^2+1)d}{2(k^2-1)}$$

Problema 1.9. Halle la razón k > 1 si AB, PQ son segmentos armónicos y PQ = 2AB.
Solución:

Del problema #1.8(A) se ve que PQ $= \frac{2kd}{k^2-1}$. Haciendo PQ = 2d y simplificando se obtiene la ecuación cuadrática $k^2 - k - 1 = 0$ cuya única raíz positiva es $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Definición 1.7. Se dice que el punto P divide al segmento AB en **extrema** y **media** razón si $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$.

Teorema 1.6. Si P divide al segmento AB en extrema y media razón, entonces $\tau = \frac{AB}{AP} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Demostración:

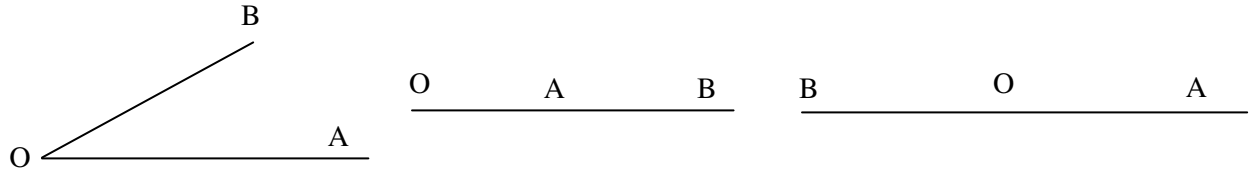
Se tiene que $\tau = \frac{AB}{AP} = \frac{AP+PB}{PB} = 1 + \frac{PB}{AP} = 1 + \frac{1}{\frac{AP}{PB}} = 1 + \frac{1}{\tau}$. Al multiplicar por el número τ resulta la ecuación cuadrática $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ cuya única solución positiva es $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Este número está asociado a la belleza y se dice que la arquitectura de la antigua Grecia usó mucho este número en sus construcciones. Los antiguos egipcios lo habían usado en la construcción de las pirámides. A través de la historia este número ha recibido las siguientes denominaciones:

- **Sección áurea**
- **Razón dorada**
- **Número dorado**
- **Divina proporción**
- **Número de Fidias**
- **Proporción áurea.**

Definición 1.8.

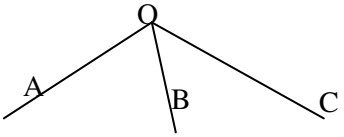
(A) Se llama **ángulo** a la figura formada por dos semirrectas que tienen un mismo origen. El origen común se llama **vértice** del ángulo y las semirrectas se llaman **lados** del ángulo.
(B) Un ángulo se dice **nulo** o **cero** si sus lados coinciden.
(C) Un ángulo se dice **llano** si sus lados son semirrectas opuestas



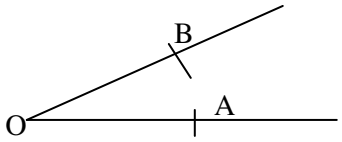
En la figura izquierda se ha representado un ángulo de vértice el punto O y de lados las semirrectas OA y OB. En la figura central se ha representado un ángulo nulo de vértice O y de lados las semirrectas coincidentes OA y OB. En la tercera figura se ha representado un ángulo llano de vértice O y de lados las semirrectas opuestas OA y OB.

Si AOB es un ángulo también se dirá entonces que dicho ángulo **está comprendido** o **está formado** por OA y OB, o que los lados OA y OB **comprenden** o **forman** el ángulo.

Un ángulo de vértice O y de lados OA, OB se denotará mediante la expresión "el ángulo AOB" o mediante el símbolo "$\angle$AOB". El orden de las letras no importa a excepción de la letra del vértice que va en el centro. Cuando no haya confusión alguna se usará sólo la letra del vértice para denotar al ángulo.



En la figura anterior las semirrectas OA, OB, OC forman los ángulos AOB, AOC y BOC. En este caso al escribir "el ángulo O" crea confusión ya que ¿a cuál de los tres ángulos se refiere?

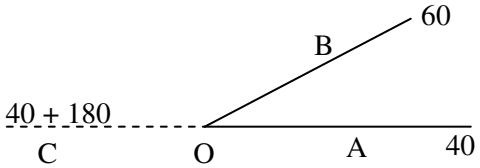


En la figura anterior se han dibujado dos semirrectas OA y OB de origen O tales que OA = OB. Se puede pensar que punto A "se movió hasta la posición del punto B manteniendo su distancia al vértice O". Este movimiento físico puede hacerse de dos maneras, y solamente nos interesará cuando se hace en el sentido contrario al de las agujas del reloj, que se llamará el **sentido positivo de rotación**.

Los antiguos matemáticos babilonios usaron los **grados** para medir los ángulos y, para ello, dividieron la circunferencia en 360 ángulos centrales iguales y, a cada uno de esos ángulos se le asignó la medida un grado que se escribe 1°. En este libro las medidas de los ángulos estarán comprendidas entre 0° y 180°, ambos inclusives.

Axioma 3. A cada semirrecta cuyo vértice es un punto fijo O se le asigna un único número real entre 0 y 180 inclusives tal que:

(A) A semirrectas distintas se le asignen números distintos
(B) Cada número real entre 0 y 180 se le asigna a cada semirrecta
(C) Los números van creciendo en el sentido positivo de rotación.
(D) Si a una semirrecta se le asigna el número p, entonces a su semirrecta opuesta se le asignará el número p + 180.
(E) Si a las semirrectas OA y OB se le asignan los números a y b, entonces la **medida** del ángulo AOB es igual al número no negativo $|a - b|°$ donde el símbolo º se lee "grados".



En la figura anterior a las semirrectas OA y OB se le asignaron los números 40 y 60, y a la semirrecta OC, opuesta de OA, se le asignó el número 40 + 180 = 220. Por tanto, las medidas de los ángulos AOB, BOC y AOC son, respectivamente, 60 – 40 = 20°, (40 + 180) – 60 = 160° y (40 + 180) – 40 = 180°.

Se usará la palabra **ángulo** para designar tanto a la figura geométrica como a su medida. Asímismo, la notación ∠AOB o, simplemente ∠O denota tanto al ángulo de vértice O como a su medida.

Teorema 1.7.

(A) Un ángulo nulo mide 0º.
(B) Un ángulo llano mide 180º.

Demostración:

(A) Si ∠AOB es un ángulo nulo, entonces las semirrectas OA y OB coinciden. Por tanto, a cada una de ellas se le asignará el mismo número y al restar ambos números da cero.
(B) Si ∠AOB es un ángulo llano, entonces las semirrectas OA y OB son opuestas. Si a la semirrecta OA se le asigna el número p, entonces a la semirrecta OB que es su opuesta se le asignará el número p + 180 como se dijo antes. Luego, ∠AOB = (p + 180) – p =180º.

Definición 1.9. Sea ∠AOB un ángulo.

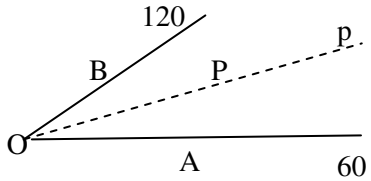
(A) Se dice que la semirrecta OP **está entre** las semirrectas OA y OB si el número asignado a OP está entre los números asignados a OA y a OB. También se dice que la semirrecta OP **separa** las semirrectas OA y OB o que las semirrectas OA y OB **están en lados opuestos** de la semirrecta OP
(B) Se dice que el punto P es un **punto interior** del ángulo si OP es una semirrecta que está entre OA y OB. El **interior** de un ángulo es el conjunto de sus puntos interiores.
(C) Un punto Q se llama **punto exterior** del ángulo si no está en el ángulo ni es un punto interior.
(D) Un ángulo A se dice **menor** que un ángulo B, y se escribe A < B, si la medida de A es menor que la medida de B.
(E) Un ángulo A se dice **igual** a un ángulo B, y se escribe A = B, si la medida de A es igual a la medida de B.
(F) Un ángulo A se dice **mayor** que un ángulo B, y se escribe A > B, si la medida de A es mayor que la medida de B.
(G) Una semirrecta OP se llama **bisectriz** del ángulo si lo separa en dos ángulos iguales.
(H) Dos ángulos se dicen **contiguos** o **sucesivos** si tienen el mismo vértice y un mismo lado que está entre los otros dos lados.
(I) Dos ángulos son **adyacentes** si son contiguos y los lados no comunes son opuestos.
(J) Un ángulo se dice **agudo** si su medida es menor que 90°.
(K) Un ángulo se dice **recto** si su medida es 90°.
(L) Un ángulo se dice **obtuso** si su medida es mayor que 90°.
(M) Dos ángulos se dicen **complementarios** si la suma de sus medidas es 90°'.
(N) Dos ángulos se dicen **suplementarios** si la suma de sus medidas es 180°'.

Problema 1.10.

(A) A las semirrectas OA y OB del ángulo AOB se le asignaron los números 30 y 120.
  (a) ¿Qué número habrá que asignarle a su bisectriz OP?
  (b) ¿Qué número habrá que asignarle a una semirrecta OQ que está entre OA y OB, y el ángulo BOQ tenga una medida que sea cuatro veces la medida del ángulo AOQ?
(B) Si OP es la bisectriz del ángulo AOB, pruebe que la medida del ángulo AOB es la suma de las medidas de los ángulos AOP y POB. Además, los ángulos AOP y POB son menores que el ángulo AOB.
(C) Halle un ángulo x si su suplemento es ocho veces su medida.
(D) Halle dos ángulos suplementarios que sean proporcionales a los números 3 y 6.

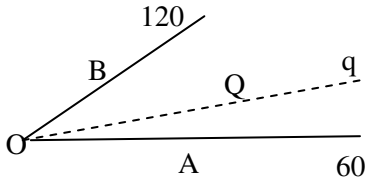
Solución:

(A)



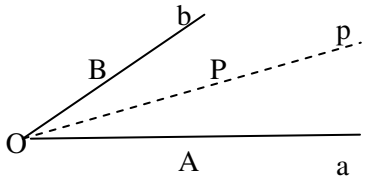
(a) Sea p el número asignado a la bisectriz OP del ángulo AOB. Ya que ∠AOP = ∠BOP se sigue del axioma 3 que 120 – p = p – 60. Al despejar p se obtiene que p = 75.

(b)



Se tiene que ∠BOQ = 4∠QOA, es decir, 120 – q = 4(q – 30). Al despejar q se ve que q = 48. Luego, ∠BOQ = 120 – 48 = 72° y ∠QOA = 48 – 30 = 18°.

(B)



Si a, b, p son los números asignados a las semirrectas OA, OB, OP, entonces ∠AOP + ∠POB = (p – a) + (p – b) = b – a. Luego, 2p = a + b y así $p = \frac{a+b}{2}$

(C) El suplemento de x es 180 – x y es igual a 8x, es decir 180 – x = 8x. Al despejar x se obtiene que x = 20°

(D) Dos ángulos suplementarios son x y 180 – x. Como son proporcionales a 3 y 6 se puede escribir que $\frac{x}{3} = \frac{180-x}{6}$ y al despejar x se obtiene que x = 60°.

Teorema 1.8.

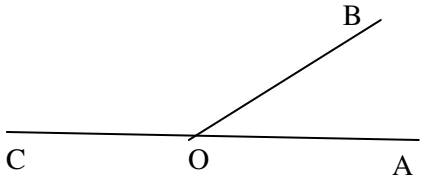
(A) Dos ángulos adyacentes son suplementarios.

(B) Si dos ángulos adyacentes son iguales, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.

(C) Dos ángulos son iguales si y sólo si sus ángulos complementarios son iguales.

(D) Dos ángulos son iguales si y sólo si sus ángulos suplementarios son iguales.

Demostración:



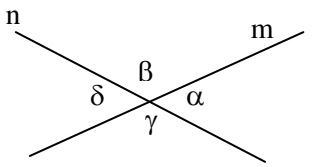
(A) Si ∠AOB y ∠BOC son adyacentes, entonces al ser ∠AOC un ángulo llano se tiene que ∠AOB + ∠BOC = 180°.

(B) Si ∠AOB y ∠BOC son ángulos adyacentes e iguales se sigue de (A) que 2∠AAOB = 180°. Luego, ∠AOB = 90°.

(C) Los ángulos x, y son iguales si y sólo si x = y si y sólo si –x = –y si y sólo si 90° – x = 90° – y.

(D) Se ve que x = y si y sólo si x = y si y sólo si –x = –y si y sólo si 180° – x = 180° – y.

Problema 1.11.



En la figura a la derecha se han representado dos rectas m, n que cortan y forman los ángulos que se han marcado con las letras griegas α, β, δ, γ.

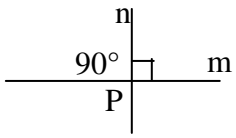
(A) Pruebe que $\alpha + \beta + \delta + \gamma = 360°$.
(B) Si uno de los cuatro ángulos es recto, entonces los demás son rectos.
(C) Si los cuatro ángulos son iguales, entonces cada uno de ellos es recto.

Solución:

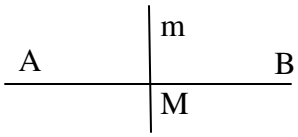
(A) Los pares de ángulos (α, β) y (δ, γ) son adyacentes. Del problema #1.14(C) se ve que $\alpha + \beta = 180°$ y $\delta + \gamma = 180°$. Al sumar ambas igualdades se obtiene el resultado deseado.
(B) Supóngase que $\alpha = 90°$. De las igualdades $\alpha + \beta = 180°$ y $\alpha + \gamma = 180°$ se deduce que $\beta = \gamma = 90°$. De la igualdad $\beta + \delta = 180°$ se verifica que $\delta = 90°$.
(C) Al dividir 360° entre 4 resulta 90°.

Definición 1.10.

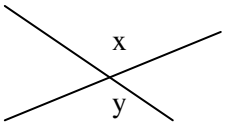
(A) Se dice que dos rectas son **perpendiculares** u **ortogonales** si uno de los cuatro ángulos que forman es recto. El punto común de ambas rectas se llama **pie** de la perpendicular.
(B) Se llama **mediatriz** de un segmento AB a la recta que es perpendicular a la recta AB y pasa por el puno medio del segmento.
(C) Dos ángulos se dicen **opuestos por el vértice** si tienen el mismo vértice y los lados de uno de los ángulos son las semirrectas opuestas de los lados del otro ángulo.



m, n son perpendiculares y P es su pie



m es la mediatriz del segmento AB



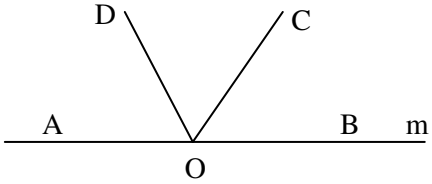
x, y son ángulos opùestos por el vértice

Teorema 1.9.

(A) La perpendicular a una recta en uno de sus puntos es única.
(B) Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

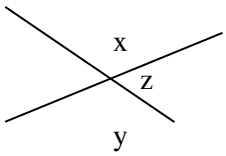
Demostración:

(A)



Sea O un punto de la recta m situado entre los puntos A y B como se indica en la figura anterior. Trace dos semirrectas OC y OD que no estén separadas por las semirrectas OA y OB. Si $\angle AOD = 90° = \angle BOC$, entonces las rectas OC y OD son perpendiculares a m. Luego, $180° = \angle AOD + \angle COD + \angle BOC = 90° + \angle COD + 90°$. Al simplificar se ve que $\angle COD = 0°$ lo que muestra que las rectas OC y OD coinciden. Por tanto, por O solo pasa una perpendicular a m.

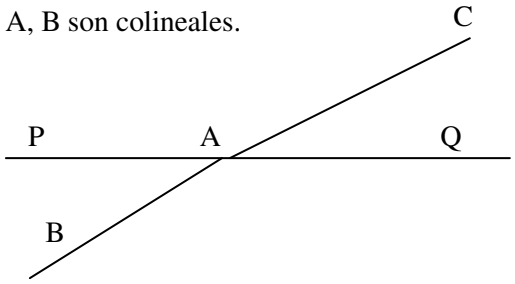
(B)



Los ángulos x, y de la figura anterior son ángulos opuestos por el vértice. Los pares de ángulos (x, z), (y, z) son ángulos adyacentes. Por tanto, x + z = 180° = y + z y al simplificar se ve que x = y.

Axioma 4. Un ángulo mide 180° si y sólo si dicho ángulo es llano.

Problema 1.12. En el dibujo que sigue los puntos P, A, Q son puntos colineales y ∠PAB = ∠QAC, entonces los puntos C, A, B son colineales.
Solución:



Se tiene que ∠BAC = ∠BAQ + ∠QAC = ∠BAQ + ∠PAB = 180º y del axioma 4 se deduce el resultado.

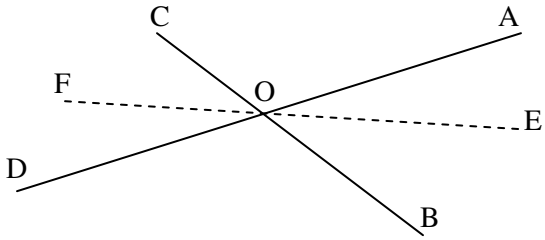
Teorema 1.10.

(A) Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son semirrectas opuestas.

(B) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares.

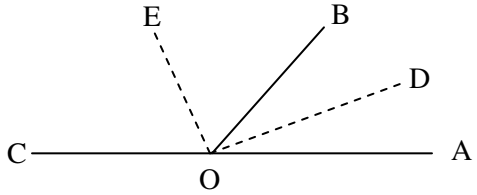
Demostración:

(A)



Sean AOB y COD dos ángulos opuestos por el vértice. Sean OE y OF las bisectrices de esos ángulos. Entonces del teorema 1.9(B) se ve que ∠AOB = ∠COD y así ∠AOE = ½ ∠AOB = ½ ∠COD = ∠FOD. Del problema anterior se tiene que E, O, F son colineales.

(B)



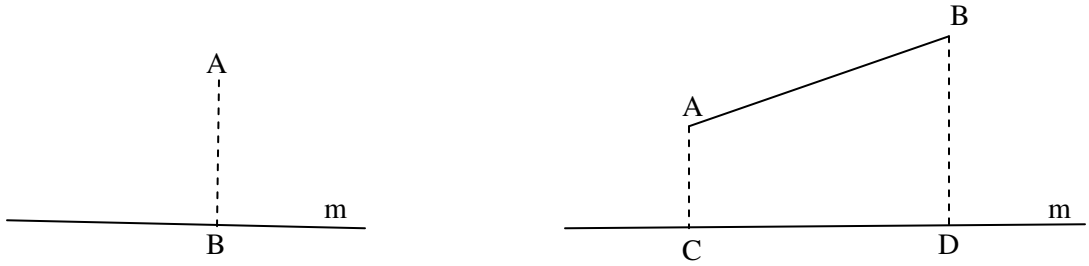
Sean AOB y BOC dos ángulos adyacentes de bisectrices OD y OE, respectivamente. Entonces ∠AOD = ∠DOB = x, ∠BOE = ∠ EOC = z. Pero, 2x + 2z = 180° y así ∠DOE = x + z = 90°.

Definición 1.11.

(A) Se llama **proyección ortogonal de un punto P sobre una recta m** a la intersección de esa recta con la perpendicular a ella por P.

(B) Se llama **proyección ortogonal del segmento AB sobre una recta m** al segmento determinado por las proyecciones ortogonales de A y B sobre m.

(C) Se llama **distancia** de un punto P a una recta m a la distancia entre P y su proyección ortogonal sobre m.



En la figura izquierda B es la proyección ortogonal del punto A sobre la recta m si y sólo si AB es perpendicular a m. En la figura a la derecha el segmento CD es la proyección ortogonal del segmento AB sobre la recta m.

Problemas del capítulo 1.

1. Si tres puntos no son colineales, entonces son distintos.
2. ¿Qué es una figura?
3. Si F y G son dos figuras, entonces la unión y la intersección de ellas son figuras.
4. ¿Puedes dibujar 4 rectas que se corten en 5 puntos distintos?
5. Sean A, B, C tres puntos distintos situados en una recta m y sea D un punto que no está en m. ¿Cuántas rectas pasan por esos cuatro puntos? ¿Cuáles son esas rectas?
6. ¿Cuántas rectas distintas pasan por los puntos dados A y B?
7. En el ejemplo 1.5 vimos que por 1 punto pasan infinitas rectas. Del axioma 2 se desprende que por 2 puntos distintos pasa una sola recta. ¿Cuántas rectas pasan por 3 puntos distintos? ¿Y por 4 puntos distintos?
8. Halle la distancia AB si (a) A(−5), B(0) (b) A(π), $B\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $A\left(\sqrt{2}\right), B\left(\sqrt{3}\right)$
9. (a) Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos de una recta colocados en ese mismo orden. ¿Cuántos segmentos pueden formarse?
   (b) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n puntos distintos de una recta colocados en ese mismo orden. ¿Cuán-tos segmentos pueden formarse?
10. Halle el punto C si A(4), B(−7), B está entre A y C, AC = 17.
11. Dos segmentos de tamaños 3 y 6 están en una recta m de tal manera que la distancia entre sus puntos medios es 4. ¿Se cortan dichos segmentos?
12. Sean A y B dos puntos distintos. Describa la intersección de las semirrectas AB y BA.
13. Sean A, B y C tres puntos colineales tales que AB = 5 y BC = 7. ¿De cuántas maneras será posible disponer de esos puntos?
14. Si B está entre A y C, entonces C está en la semirrecta AB.
15. De tres puntos colineales y distintos uno de ellos está entre los otros dos.
16. La coordenada de M, punto medio de AB, es 5. Si la coordenada de A es mayor que la coordenada de B y MB = 9, ¿cuáles son las coordenadas de A y B?
17. Trace una recta horizontal m y trace en ella cuatro puntos distintos A, B, C y D en ese mismo orden. Trace cuatro copias de la figura anterior y en cada una de ellas resalte una de las figuras siguientes:
    (a) el segmento AB
    (b) el segmento DB
    (c) la semirrecta AC
    (d) la semirrecta DB

18. Sean A, B, P puntos colineales tales que AP = 8 y BP = 14. ¿Será posible decir qué punto está entre los otros dos?
19. ¿Qué relación hay entre las coordenadas de un punto P y la de los puntos A y B si P es un punto de la recta AB que no está en el segmento AB?
20. Un punto P está en la prolongación del segmento AB si y sólo si $a < b < p$.
21. La proposición "Un punto P es **punto medio** del segmento AB si AP = BP" no define el punto medio de un segmento. ¿Por qué?
22. Sean A, B, C tres puntos colineales en ese mismo orden. Si las longitudes de los segmentos AB y BC son dos números primos consecutivos, distintos de 2, entonces la longitud del segmento AC es el producto de tres enteros mayores que 1.
23. (a) Dados un segmento AB = 15 y un punto P a la derecha de A tal que AP = 5. Halle la razón en que el punto P divide al segmento AB. ¿Lo divide interna o externamente?
    (b) Haga (a) si AP = 15.
    (c) Haga (a) si AP = 55.
24. (a) Dado un segmento AB = 11 halle los puntos P y Q que dividan al segmento en la razón $\frac{3}{8}$.
    (b) En (a) halle la mínima longitud del segmento AB si todas las longitudes involucradas son números enteros positivos.
25. Halle las posiciones de los puntos de **trisección** del segmento AB = 12. **Trisecar** significa dividir en tres partes iguales.
26. Sean A, B y C tres puntos de una recta y supóngase que C no está en el segmento AB, AB = 8 y BC = 4. Sean M, N y P los puntos medios de los segmentos AB, AC y BC. Los puntos medios de los segmentos MN y AP coinciden, ¿Cuál es la distancia de ese punto medio a A?
27. Divida un segmento de longitud d en n segmentos iguales usando n−1 puntos interiores al segmento. Halle una fórmula que permita determinar la razón en que cada uno de esos puntos divide internamente al segmento. Haga este ejercicio si d = 21 y n = 7.
28. Dividir un segmento de longitud 39 en tres partes tales que la razón de la primera parte a la segunda sea $\frac{2}{3}$ y la razón de la segunda a la tercera sea $\frac{4}{5}$.
29. Halle un punto C en la semirrecta AB tal que AB = 6 y BC = 15. ¿Es único?
30. Halle un punto C en la semirrecta AB tal que AB = 15 y AC = 6.
31. Sean A, B, C, D cuatro puntos colineales en ese mismo orden.
    (a) ¿Son CA y CD semirrectas opuestas?
    (b) ¿Está el punto C en la semirrecta BD?
    (c) Determine la intersección de las semirrectas CA y BD.
32. En cada caso haga −si es posible− un dibujo que ilustre la proposición indicada.
    (a) B está entre A y C, y C está entre A y D.
    (b) A, B, C, D son cuatro puntos colineales, A esta entre C y D y D está entre A y B.
33. Sean O, A, B, C, D cinco puntos de una recta m en ese mismo orden. Si OA = 1, OB = 3, OC = 5 y OD = 7, M y N son los puntos medios de los segmentos AB y CD y U es el punto medio del segmento MN. Halle OU.
34. Sean O, A y B tres puntos de una recta en ese mismo orden tal que OA = 4 y OB = 10. Calcule AB y OM donde M es el punto medio del segmento AB.

35. Sean A, B, C, D cuatro puntos de una recta m en ese mismo orden de modo que AB = 5, BC = 1 y CD = 3. Considérese un punto P de m que no esté en el segmento AC y $\frac{PA}{PC} = \frac{5}{2}$ y un punto Q de m entre B y C tal que $\frac{QB}{QC} = \frac{5}{3}$. Si M y N son los puntos medios de los segmentos AB y CD, evalúense las razones $\frac{PM}{PN}$ y $\frac{QM}{QN}$.

36. Sean A, B, C, D, E cinco puntos situados en una recta m en ese mismo orden. Sean 3, –1, 5, 0 y 1 sus coordenadas aunque no en ese mismo orden. Haga un dibujo y coloque correctamente las coordenadas. ¿Cuál es el nombre del origen de coordenadas? ¿Cuánto mide AE?

37. Sean A(1), B(5), C(5/2) y D(8) cuatro puntos de una recta m. ¿Son C y D los conjugados armónicos de A y B? En caso de una respuesta negativa halle el conjugado armónico de C respecto de A y B.

38. Colocar dos segmentos de longitudes dadas en una recta de modo que dichos segmentos sean armónicos.

39. Si A, B, P, Q es una cuaterna armónica y X está a la derecha de B, entonces $\frac{2BX}{AB} = \frac{PX}{AP} + \frac{QX}{AQ}$

40. Si M, A, P, Q son colineales y $MA^2 = MP \bullet MQ$, entonces el simétrico de A con respecto a M coincide con el conjugado armónico de A respecto de P y Q.

41. Si A, B, P, Q es una cuaterna armónica y M es el punto medio del segmento AB, entonces $MP^2 + MQ^2 = PQ^2 + 2MA^2$

42. Si A, B, P, Q es una cuaterna armónica, entonces $\frac{1}{PA \bullet PB} - \frac{1}{QA \bullet QB} = \frac{1}{MA \bullet MB}$ donde M es el punto medio del segmento AB.

43. Sea n un entero positivo. Dado un segmento AB = d, ¿es siempre posible hallar dos conjugados armónicos P y Q respecto de AB tales que $PQ = n \bullet AB$?

44. Si A(0), B(72), C es el punto medio del segmento AB, P(27) y Q(30) evalúe las razones $\frac{PA}{PC}$ y $\frac{QA}{QC}$. Halle los conjugados armónicos de P y Q respecto de A y B.

45. Sean A y B dos puntos de una recta m tales que AB = 4. Sean P y Q puntos de m de modo que $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = \frac{3}{2}$. Calcule PA, PB, QA y QB. Si O es el punto medio del segmento AB, entonces $OP \bullet OQ = OA^2$.

46. Si A, B, P, Q es una cuaterna armónica de razón k, entonces $\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = \frac{2}{AB}$.

47. Si el punto P divide internamente al segmento AB en la razón t, el punto Q lo divide externamente en la razón s y $\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = \frac{2}{AB}$, entonces t = s.

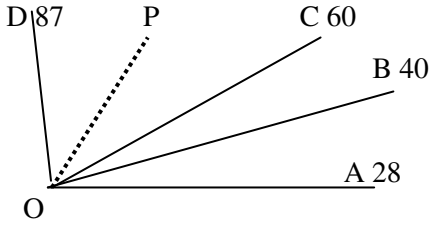
48. Si A, B, P, Q forman una cuaterna armónica de razón k, entonces $MP \bullet MQ = AM^2$ donde M es el punto medio del segmento AB.

49. Si M es el punto medio del segmento AB, P es un punto del segmento AB, Q es un punto de la prolongación del segmento AB y MP•MQ = AM^2, entonces A, B, P, Q forman una cuaterna armónica.

50. Si A, B, P, Q forman una cuaterna armónica de razón k y N es el punto medio del segmento PQ, entonces N divide externamente al segmento AB en la razón k^2.

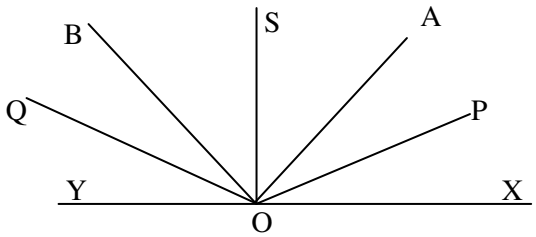
51. Supóngase que A, B, P, Q forman una cuaterna armónica de razón k, y M y N son los puntos medios de AB y PQ. Halle la distancia MN.

52. ¿Cuántos ángulos no llanos forman tres rectas concurrentes?
53. Cuatro semirrectas consecutivas OA, OB, OC, OD forman los ángulos x, y, u, v de modo que v = y = 2x y u = 3x. Halle cada uno de esos ángulos.
54. Halle los ángulos x, u, y, v que forman las cuatro semirrectas consecutivas OA, OB, OC, OD si son proporcionales a los números 1, 2, 3, 4.
55. En la figura a la derecha
    (a) Calcule las medidas de los ángulos AOB,
    (b) BOC y COD.
    (c) Si OP es la bisectriz de del ángulo COD, ¿qué número le corresponderá a esa semirrecta?
    (d) ¿Es la semirrecta OB bisectriz del ángulo AOC?
    (e) ¿Está OB entre las semirrectas OA y OP?



56. Si x = 68º, y = 145º, z = 32º y u = 118º . Halle los complementos y suplementos de esos ángulos. Calcule la suma de los 4 ángulos.
57. Se dan dos ángulos contiguos. Entonces el ángulo formado por sus bisectrices es igual a la semisuma de los ángulos dados. ¿Cuál es el ángulo de las bisectrices si los ángulos son complementarios? ¿y si son suplementarios?
58. ¿Cuántos pares de ángulos opuestos por el vértice se forman al cortarse dos rectas? ¿y tres rectas?
59. Si los ángulos BAD y DAC miden 65º y 32º, ¿cuánto mide CAB?
60. Considérese un ángulo XOY. Si OX es la bisectriz de un ángulo AOB y OY es la bisectriz de un ángulo COD, entonces los ángulos AOC y BOD son suplementarios.
61. Cinco semirrectas de origen O forman cinco ángulos contiguos que son proporcionales a los números 2, 3, 4, 5 y 6. Halle esos ángulos.
62. Las cuatro semirrectas OA, OB, OC, OD forman los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD. Supóngase que OA y OD son semirrectas opuestas y que el ángulo BOC mide 120º. Calcule la suma de los ángulos OAB y COD y el ángulo formado por las bisectrices de AOB y COD.
63. ¿Qué ángulo forma el minutero de un reloj si va desde las 3 y 17 a las 3 y 25. ¿Desde las 3 y 17 a las 3 y 55?
64. Dos rectas que se cortan forman un ángulo de 36º. Halle las medidas de los otros tres ángulos.
65. El minutero está a las 3 y 15. ¿Qué hora marcará si recorre un ángulo de 72º?
66. Un ángulo es agudo si y sólo si su suplementario es obtuso.
67. Si las bisectrices de dos ángulos contiguos son perpendiculares, entonces dichos ángulos son adyacentes.
68. Todo ángulo menor que un agudo es agudo.
69. Todo ángulo que es mayor que un obtuso es obtuso.
70. ¿Qué puede decirse de un ángulo menor que un obtuso?
71. Dos ángulos consecutivos suman 100º, ¿cuál es el ángulo de sus bisectrices?
72. Halle x si su complemento es 2x.
73. ¿Qué ángulo es igual al doble de su complemento?

74. Cinco semirrectas consecutivas OA, OB, OC, OD, OE forman cinco ángulos contiguos x, y, z, u, v. Calcular dichos ángulos si los cuatro primeros están entre sí en la razón 1, 2, 3, 4 y OD coincide con la bisectriz del ángulo AOB = x.
75. Halle dos ángulos cuya suma sea 90º y su diferencia sea 10º.
76. Halle dos ángulos suplementarios cuya diferencia sea 140º.
77. Halle dos ángulos suplementarios si uno es 20 mayor que el otro.
78. Halle el ángulo que es igual a su complemento.
79. ¿Cuál es el ángulo si su suplemento es 30 más que dos veces su complemento?
80. Desde un punto O de una recta XY se trazan dos semirrectas OA y OB del mismo lado de XY, y las bisectrices de los ángulos XOA, AOA y BOY. Halle los ángulos si la bisectriz de AOB es perpendicular a XY y las bisectrices de los ángulos externos forman 100º.
81. La diferencia de dos ángulos consecutivos es 90º. Halle el ángulo entre sus bisectrices.
82. Una antigua unidad de medida de ángulos es el "signo" que viene de la astrología donde 12 signos son equivalentes a 360º.
    (a) ¿Cuántos grados tiene un signo?
    (b) ¿Cuántos grados tiene el complemento de un signo?
    (c) ¿Cuántos grados tiene el suplemento de un signo?
    (d) ¿De dónde habrá salido el nombre de "signo"?
83. El suplemento de un ángulo dado es ocho veces el ángulo. Halle dicho ángulo.
84. Halle dos ángulos suplementarios que sean proporcionales a 3 y 6.
85. Si dos rectas que se cortan no son perpendiculares, entonces uno de los ángulos que se forma es agudo y el otro es obtuso.
86. En la figura a la derecha X, O, Y son puntos colineales y OP, OS, OQ son las bisectrices de los ángulos XOA, OB, BOY. Calcule todos los ángulos que se forman si la recta OS es perpendicular a la recta XY y la suma de los ángulos XOA y QOY es 120º.



Capítulo 2. Los triángulos.

Definición 2.1.

(A) Un **triángulo** es la figura formada por tres puntos no colineales. A cada uno de esos puntos se llama **vértice** del triángulo. El segmento que une dos vértices se llama **lado** del triángulo.

(B) El ángulo formado por dos semirrectas que parten de un vértice de un triángulo y contienen a dos de sus lados se llama **ángulo** del triángulo. Un ángulo de un triángulo cuyo vértice no es extremo de un lado se llama **ángulo opuesto** a ese lado. También se dice que el lado es opuesto a ese ángulo.

(C) Un ángulo adyacente a un ángulo de un triángulo se llama **ángulo exterior** a ese triángulo.

(D) Un punto se dice **interior** a un triángulo si es interior a cada uno de los ángulos del triángulo.

(E) Un punto se dice **exterior** a un triángulo si es exterior a de los ángulos del triángulo.

(F) Un **punto de Menelao** de un lado de un triángulo es un punto de la recta que contiene a ese lado y no es vértice del triángulo. Se llama **ceviana** de un vértice de un triángulo al segmento determinado por ese vértice y un punto de Menelao del lado opuesto. Este último punto se llama **pie** de la ceviana. Una ceviana se dice **interior** o **exterior** según que su pie sea un punto interior o exterior al lado.

(G) Un triángulo se dice **isósceles** si tiene dos lados iguales. En este caso el otro lado se llama **base** y su ángulo opuesto se llama **ángulo vertical**.

(H) Un triángulo se dice **equilátero** si tiene sus tres lados iguales.

(I) Un triángulo se dice **escaleno** si no es isósceles.

(J) Un triángulo dícese **acutángulo** si sus ángulos son agudos.

(K) Un triángulo dícese **obtusángulo** si tiene un ángulo obtuso.

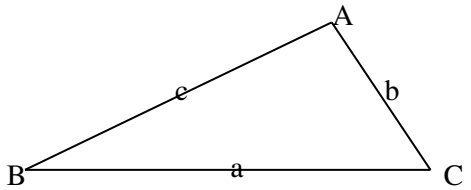
(L) Un triángulo dícese **rectángulo** si tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el tercer lado se llama **hipotenusa**.

(M) El segmento que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto se llama **mediana** de ese lado. También se llama **mediana** a la longitud de ese segmento.

(N) El segmento que une un vértice de un triángulo con su proyección ortogonal sobre la recta que contiene al lado opuesto se llama **altura** de ese lado. También se llama **altura** a la longitud de ese segmento.

(O) La parte de la bisectriz de un ángulo de un triángulo comprendida entre su vértice y el lado opuesto se llama **bisectriz** de ese ángulo. También se llama **bisectriz** al tamaño de ese segmento.

(P) La suma de las longitudes de los lados de un triángulo se llama **perímetro** del triángulo. A la mitad de esa longitud se llama **semiperímetro**.



En la figura a la derecha hay un triángulo de vértices A, B, C. Sus lados son BC = a, AC = b, AB = c. Su perímetro es 2s = a + b + c y su semiperímetro es s.

La palabra **semejante**, de acuerdo con la cuarta acepción que aparece en la vigésima primera edición del Diccionario de la Lengua Española, "dícese de dos figuras distintas solo por el tamaño y cuyas partes guardan todas respectivamente la misma proporción". Luego, se dice que "una **semejanza** es la cualidad de ser semejantes".

En la definición 1 del Libro sexto de los Elementos de Euclides, escrito unos 300 años antes de Cristo, se lee: "**Figuras rectilíneas semejantes** son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales".

En la proposición 4 del mismo libro se lee: "En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes".

En la proposición 5 se lee: "Si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes".

En la proposición 6 se lee: "Si dos triángulo tienen un ángulo (del uno) igual a un ángulo (del otro) y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes".

En 1932 apareció en el volumen 33 de los **Annals de Mathematics** el artículo titulado "Un conjunto de postulados para la Geometría Plana basada en la Regla Graduada y el Transportador", escrito por el matemático norteamericano George David Birkhoff. Allí se elige la proposición 6 como su axioma número cinco, y las proposiciones 4 y 5 se demuestran a partir de allí. En estas notas se aceptará ese artículo y se escribirán los tres criterios sin demostración. Para ver una demostración de los criterios léase nuestro texto [DDC1] en la bibliografía.

Una **correspondencia biunívoca** entre dos triángulos es una función que asigna a cada vértice de un triángulo un único vértice del otro triángulo, llamado su **imagen**, tal que a vértices distintos se le asignan imágenes distintas. Un par de puntos formado por un vértice y su imagen se llaman **vértices correspondientes**. Dos ángulos se dicen **correspondientes** si sus vértices forman un par de vértices correspondientes. Dos lados se dicen **correspondientes** si sus ángulos opuestos son ángulos correspondientes.

Se escribirá ABC↔DEF para indicar la correspondencia biunívoca entre los triángulos ABC y DEF si las imágenes de A, B, C son, respectivamente, D, E, F.

Definición 2.2. Una **semejanza** entre dos triángulos es una correspondencia biunívoca entre sus vértices tal que cada par de ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales. El factor de proporcionalidad de los lados correspondientes se llama la **razón de semejanza**. Dos triángulos son **semejantes** si existe una semejanza entre ellos. Una **congruencia** es una semejanza de razón uno. Dos triángulos son **congruentes** si existe una congruencia entre ellos.

Se escribirá ABC ~ DEF para indicar que los triángulos ABC y DEF son semejantes donde ABC ↔ DEF, ABDE=ACDF=BCEF. Se escribe ABC ≅ DEF para indicar que los triángulos ABC y DEF son congruentes donde ABC ↔ DEF, A = D, B = E, C = F y AB = DE, AC = DF, BC = EF.

Primer criterio de semejanza: Si un ángulo de un triángulo es igual a un ángulo de otro triángulo y los lados que forman dichos ángulos son proporcionales, entonces ambos triángulos son semejantes.

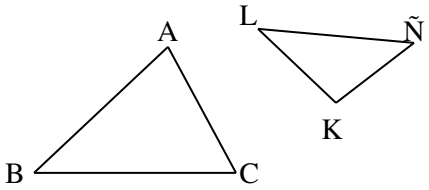
Este primer criterio de semejanza es nuestro quinto y último axioma de la geometría plana.

Segundo criterio de semejanza: Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo, entonces ambos triángulos son semejantes.

Tercer criterio de semejanza: Si los lados de un triángulo son proporcionales a los ángulos de otro triángulo, entonces ambos triángulos son semejantes.

Lo importante de una semejanza entre triángulos es su escritura. Daremos a continuación tres ejemplos para mostrar un método que uso para escribir la semejanza de triángulos para cada criterio

Ejemplo 2.1. En los triángulos ABC y KLÑ indicados en la figura anexa se tiene que A = 40°, AB = 20, AC = 15, Ñ = 40°, LÑ = 4, KÑ = 3. Pruebe que ambos triángulos son semejantes, escriba la semejanza y obtenga las relaciones entre los ángulos y lados no conocidos.



Solución:
Lo primero que se nota es que los ángulos A y K miden lo mismo. Los lados que forman el ángulo A ABLÑ=ACKÑ=5. Del primer criterio de semejanza se deduce que esos dos triángulos son semejantes. ¿Cómo se escribe la semejanza? Colocamos ABC ~ _ _ _ donde en cada rayita hay que colocar las imágenes de A, B, C, respectivamente. Como A = Ñ = 40° la imagen de A es Ñ y quedará ABC ~ Ñ _ _. Como no hay más ángulos iguales se recurren a las proporciones. En la proporción AB va con LÑ. El ángulo opuesto al lado AB es C y el opuesto a LÑ es K. Luego, la imagen de C es K y se escribe ABC ~ Ñ _ K. La última letra que falta es L. Luego, se escribe ABC ~ ÑLK. De esta notación se infiere que A = ABLÑ=ACKÑ=□□KL=5. La razón de semejanza es 5 y ello indica que el lado BC es 5 veces el lado KL.

Ejemplo 2.2. Supóngase que en la figura del ejemplo anterior se tiene que A = Ñ = 40° y B = K = 50°. ¿Son semejantes esos triángulos? Escriba la semejanza y obtenga relaciones entre los ángulos y lados no conocidos.
Solución:
Hay dos ángulos en el triángulo ABC que son iguales a dos ángulos del triángulo KLÑ. Del segundo criterio de semejanza se tiene que ambos triángulos son semejantes. Se escribe ABC ~ _ _ _ donde en cada rayita hay que colocar las imágenes de A, B, C, respectivamente. En este caso se conocen dos ángulos. Así, la imagen de A es Ñ y la imagen de B es K. Por tanto, ABC ~ ÑKL. De esta escritura se ABÑK=ACÑL=□□KL.

ABKL=ACÑL=□□ÑK. ¿Son semejantes esos triángulos? Escriba la semejanza y obtenga relaciones entre los ángulos y lados no conocidos.
Solución:

Como los lados del triángulo ABC son proporcionales a los lados del triángulo KLN se sigue del tercer criterio de semejanza que ambos triángulos son semejantes. Se escribe ABC ~ _ _ _ donde en cada rayita hay que colocar las imágenes de A, B, C, respectivamente. En este caso no se conocen relaciones entre ángulos por lo que recurrimos a las proporciones. Los ángulos opuestos a AB y KL son C y Ñ, los ángulos opuestos a los lados ACX y ÑL son B y K, y los ángulos opuestos a los lados BC y ÑL son A y L. Por tanto, la escritura es ABC ~ LKÑ. Por consiguiente, A = L, B = K y C = Ñ.

Teorema 2.1. En un triángulo isósceles

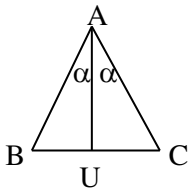
(A) La bisectriz del ángulo vertical forma dos triángulos rectángulos congruentes.
(B) Los ángulos de la base son iguales.
(C) La bisectriz del ángulo vertical coincide con la mediana y la altura de la base, y todos esos segmentos están contenidos en la mediatriz de la base.
(D) Las alturas de los lados iguales son iguales.
(E) Las medianas de los lados iguales son iguales.
(F) Las bisectrices de los ángulos iguales son iguales.

Demostración:

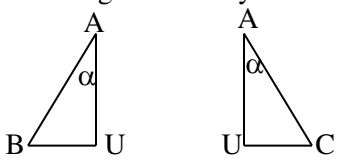
Sea ABC un triángulo isósceles con AB = AC. Esto indica que A es el ángulo vertical y BC es su base.

(A) Si AU es la bisectriz del ángulo A, entonces

$$\angle BAU = \alpha = \angle CAU \quad (*)$$



Además, se forman los triángulos ABU y CAU.



De la hipótesis se sigue que

□BAC=□UA□=*1*

Del primer criterio de semejanza se obtiene que ABU ~ ACU. Ya que la razón de semejanza es uno se ve que

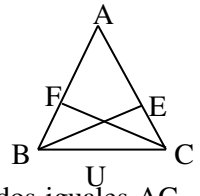
$$ABU \cong ACU \quad (**)$$

De (**) se deduce que el ángulo U del triángulo ABU es igual al ángulo U del triángulo ACU, y como estos ángulos son adyacentes se obtiene que ∠AUB = 90° = ∠AUC. Se ha probado que los triángulos ABU y ACU son congruentes y rectángulos.

(B) De (**) se ve que ∠ABU = ∠ACU que son los ángulos de la base.

(C) De (**) se ve que BU = CU lo que indica que U es el punto medio de la base BC. Luego, AU es la mediana de la base. Vimos en (A) que AU es perpendicular a la base BC. Luego, AU es la altura de la base. Por último, la recta AU es mediatriz de la base BC pues es perpendicular a ella y pasa por su punto medio U.

(D)

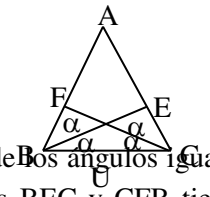


Sean BE, CF las alturas de los lados iguales AC, AB. Entonces E = 90° = F. Además, de (B) se

□□□□=□□□□=*1* y así BE = CF.

12□□=*12*□□=□□. De (B) vimos que B = C. Por el primer criterio de semejanza se tiene que CBE ~ □□□□=□□□□=*1* y así BE = CF.

(F)



Sean BE, CF las bisectrices de los ángulos iguales B, C. Entonces ∠ABE = α = ∠CBE y ∠ACF = α = ∠BCF. Los triángulos BEC y CFB tienen los ángulos comunes α y 2α y del segundo □□□□=□□□□=*1* y se tiene que BE = CF.

Teorema 2.2.

(A) Si dos ángulos de un triángulo son iguales, entonces dicho triángulo es isósceles.

(B) Si la bisectriz de un ángulo de un triángulo coincide con la altura del lado opuesto, entonces dicho triángulo es isósceles.

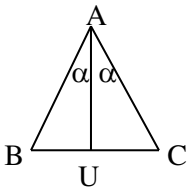
(C) La perpendicular a la bisectriz de un ángulo forma con sus lados un triángulo isósceles.

(D) Si la bisectriz de un ángulo de un triángulo coincide con la mediana del lado opuesto, entonces dicho triángulo es isósceles.

(E) Si la altura de un lado de un triángulo coincide con la mediana de ese mismo lado, entonces dicho triángulo es isósceles.

Demostración:

(A)

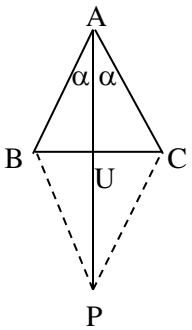


Supóngase que B = C en el triángulo ABC. Si AU es la bisectriz del ángulo A, Entonces ∠BAU = □□□□=□□□□=*1* y AB = AC.

(B) Supóngase que AU es la bisectriz del ángulo A en el triángulo ABC y es altura del lado BC. Entonces ∠BAU = α = ∠CAU y ∠BUA = 90° = ∠CUA. Del segundo criterio de semejanza se ve □□□□=□□□□=*1* y así AB = AC.

(C) Basta ver que esa bisectriz es altura.

(D)



Supóngase que AU es la bisectriz del ángulo A en el triángulo ABC y es mediana del lado BC. prolónguese la mediana AU hasta el punto P tal que AU = UP. Como BU = UC y ∠AUB =

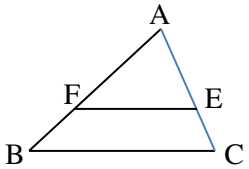
∠PUC se sigue del primer criterio de semejanza que AUB ~ PUC. Luego, AB = PC y ∠BAU = ∠CPU = α. Ya que en el triángulo APC se tiene que ∠CAP = ∠CPA por lo que AC = AP. De la igualdad anterior se ve que AB = AC.

(E) Supóngase que AU es la altura y mediana del lado BC del triángulo ABC.
Entonces BU = UC y ∠BUA = 90° = ∠CUA. Ya que AU = AU se sigue del primer
□□□□=□□□□=*1* y así AB = AC.

Teorema 2.3. Si dos puntos dividen interna o externamente a dos lados de un triángulo en la misma razón, entonces la recta que pasa por dichos puntos forma con esos lados un triángulo semejante al dado.

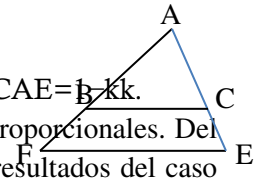
Demostración:

AFFB=AEEC=□ (*)

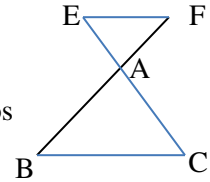


Caso 1. El punto E está entre A y C.

En este caso el punto F estará entre A y B. Al invertir en (*) se tiene que FBAF=ECAE=1k. Al sumar 1 se ve que □□□□+*1*=□□□□+*1*=*1*□+*1*, o sea, □□+□□□□=□□+□□□□=□+1□. Luego, □□□□=□□□□=k+1□. Esta igualdad dice que los lados que forman el ángulo A en los triángulos ABC y AFE son proporcionales. Se tiene que ABC ~ AFE por el primer □□□□=□□□□=□□□□=k+1□.



Caso 2. El punto E está en la prolongación del lado AC. En este caso el punto F estará FBAF=ECAE=1k y así FBAF=1−ECAE=1−1k. Luego, AF−FBAF=AE−ECAE=1−kk, es decir, ABAF=ACAE=1−kk. Esto indica que los lados que forman el ángulo A en los triángulos ABC y AFE son proporcionales. Del primer criterio de semejanza se obtiene que ABC ~ AFE, y se obtienen los mismos resultados del caso anterior.



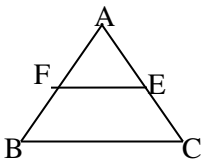
Caso 3. El punto E está en la prolongación del lado CA. Entonces el punto F está en AFFB=1−AEEC=1−k, o sea, ABFB=ACEC=1−k. Esto indica que los lados que forman el ángulo A en los triángulos ABC y AFE son proporcionales. Del primer criterio de semejanza se sigue que □□□□=□□□□=□□□□=*1*−□.

Teorema 2.4.

(A) El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es la mitad del tercer lado.
(B) Los puntos medios de los lados de un triángulo forman cuatro triángulos congruentes.
(C) La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.
(D) Un ángulo exterior a un triángulo es la suma de los ángulos no adyacentes a él.
(E) Un ángulo exterior a un triángulo es mayor que cada ángulo no adyacente a él

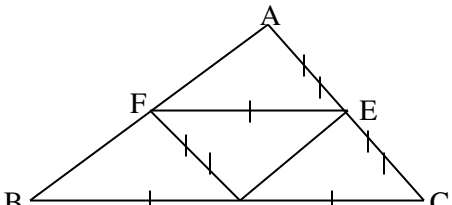
Demostración:

(A)



□□□□=□□□□=*1*. Del problema 2.3 se deduce que ABC ~ AFE. Luego, □□□□=□□□□=*2*.

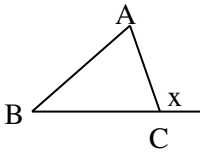
(B)



Sean D, E, F los puntos medios de los lados BC, AC, AB del triángulo ABC. Usando (A) se ve que FE = BD = DC, FD = AE = EC, DE = BF = FA. Los cuatro triángulos AFE, FBD, EDC, DEF tienen sus lados iguales y del tercer criterio de semejanza se sigue que esos triángulos son semejantes. Como la razón de semejanza es uno dichos triángulos son congruentes. Nótese que esos cuatro triángulos son semejantes al triángulo inicial ABC.

(C) De AFE ≅ DEF se ve que A = D = ∠FDE. De BFD ≅ DEC se sigue que B = ∠EDC y ∠BDF = C. Luego, A + B + C = ∠FDE + ∠EDC + ∠BDF = 180° ya que forman un ángulo llano en el punto D.

(D)



Sea x un ángulo exterior al triángulo ABC en el vértice C. Entonces A + B + C = 180° = x + C. Al simplificar por C se ve que A + B = x.

(E) Basta ver que A + B > A y A + B > B.

El teorema 2.4(C) es de tal importancia que no se menciona cuando se usa porque esta proposición es universal, y es conocida aún por las personas a las que no les gusta la matemática.

Definición 1.3. El triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un triángulo dado se llama **triángulo medial** del dado.

Teorema 2.5.

(A) Ningún ángulo de un triángulo puede ser nulo o llano.
(B) Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto.
(C) Un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso.
(D) Los ángulos iguales de un triángulo isósceles son agudos.
(E) Los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo son complementarios y agudos.

Demostración:

(A) Si en el triángulo ABC se tiene que A = 0° o A = 180°, entonces A, B, C son colineales y ABC no forma triángulo.
(B) Si en el triángulo ABC se tiene que A = B = 90°, entonces 90° + 90° + C = 180°. Luego, C = 0° lo cual es absurdo por (A).
(C) Si en el triángulo ABC se tiene que A > 90° y B > 90°, entonces A + B + C > 180° lo cual es absurdo.
(D) Sea ABC un triángulo isósceles con B = C. Entonces A + B + C = 180° y así A + 2B = 180°. Por tanto, 2B < 180° y al dividir por 2 se obtiene que B < 90°.
(E) Sea ABC un triángulo rectángulo con C = 90°. Luego, A + B + 90° = 180° y así A + B = 90° lo que indica que A y B son complementarios. Además, A < A + B = 90° y B < A + B = 90°.

Teorema 2.6.

(A) Todo triángulo equilátero es equiangular y cada ángulo mide 60°.
(B) Todo triángulo equiangular es equilátero.
(C) Si un ángulo en triángulo isósceles mide 60°, entonces dicho triángulo es equilátero.

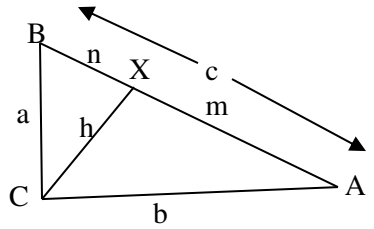
Demostración:

(A) Si ABC es un triángulo equilátero, entonces AB = AC = BC. Del problema 2.1(B) se sigue que A = B = C. Luego, A + B + C = 180°, es decir, 3A = 3B = 3C = 180° y al dividir entre 3 resulta que A = B = C = 60°.
(B) Si ABC es un triángulo equiangular, entonces A = B = C. Del problema 2.2(A) se sigue que BC = AC = AB.
(C) Sea ABC un triángulo isósceles de ángulo vertical A. S A = 60°, entonces hay que repartir 120° entre dos ángulos iguales. Luego, A = B = C = 60° y de (B) se sigue que ABC es equilátero. Si B = 60°, entonces C = 60° y se tendrá que A = 60° produciendo el mismo resultado.

Teorema 2.7. En un triángulo rectángulo ABC con C = 90°

(A) La altura de la hipotenusa forma dos triángulos rectángulos que son semejantes al triángulo inicial.
(B) Un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección ortogonal del cateto sobre ella.
(C) La altura de la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que el pie de esa altura determina sobre la hipotenusa.
(D) La altura de la hipotenusa multiplicada por la hipotenusa es igual al producto de los catetos.
(E) La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.
(F) Si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado del tercer lado, entonces dicho triángulo es rectángulo.

Demostración:



(A) Sea CX la altura de la hipotenusa AB y se forman los triángulos rectángulos BCX y ACX. Entonces ∠CBX = ∠ACX = B, ∠BCX = ∠CAX = A y ∠CXB = ∠CXA = C = 90°. Del segundo criterio de semejanza se ve que ABC ~ CBX ~ ACX. Haciendo BC = a, AC = b, AB = c, BX = n, AX = m, CX = h se obtiene

$$\frac{a}{n}=\frac{h}{h}=\frac{c}{a} \qquad (1)$$

$$\frac{b}{m}=\frac{c}{b}=\frac{h}{h}. \qquad (2)$$

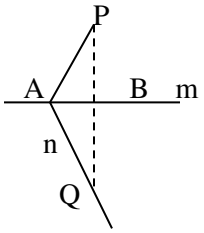
(B) De (1) se tiene que $a^2 = cn$. De (2) se ve que $b^2 = cm$.
(C) De (1) se ve que ha = bn y de (2) se ve que hb = ma. Al multiplicar miembro a miembro las dos últimas igualdades se obtiene $abh^2 = abmn$. Al simplificar por ab se tiene que $h^2 = mn$.
(D) De la primera proporción de (1) se sigue que hc = ab.
(E) De (B) se tiene que $a^2 + b^2 = cn + cm = c(n + m) = c\cdot c = c^2$.

(F) Sea ABC un triángulo tal que $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Sea UVW un triángulo rectángulo en W tal que UW = AC y VW = BC. De (D) se sigue que $UW^2 + VW^2 = UV^2$. Luego, $AC^2 + BC^2 = UV^2$. De la hipótesis se concluye que UV = AB. Esto quiere decir que los triángulos ABC y UVW son semejantes y como UVW es rectángulo se concluye que el triángulo ABC es rectángulo.

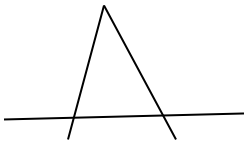
Los teoremas 2.7(E) y 2.7(F) forman el **Teorema de Pitágoras.**

Teorema 2.8. Por un punto dado fuera de una recta dada pasa una y sólo una recta perpendicular a dicha recta.

Demostración:



Sea m una recta dada y sea P un punto dado fuera de m. Sean A y B dos puntos distintos de la recta m. Trace por A la recta n, distinta de la recta AP, que forme con m el mismo ángulo PAB. Sea Q el punto en n tal que AP = AQ. El triángulo APQ es isósceles de ángulo vertical A y bisectriz m. Del problema 2.1(C) se sigue que la recta PQ es perpendicular a m. Probemos ahora que dicha perpendicular es única.



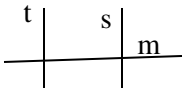
Si por el punto P pasan dos perpendiculares a la recta m, entonces existiría un triángulo con dos ángulos rectos lo cual es absurdo.

Teorema 2.9.

(A) Existen rectas paralelas distintas.
(B) Por un punto pasa una única recta paralela a una recta dada.
(C) Dos rectas cortadas por una transversal son paralelas si y sólo si un par de ángulos alternos internos son iguales.
(D) Dos rectas cortadas por una transversal son paralelas si y sólo si un par de ángulos correspondientes son iguales.
(E) El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.
(F) Si los lados de un triángulo son paralelos a los lados de otro triángulo, entonces ambos triángulos son semejantes.

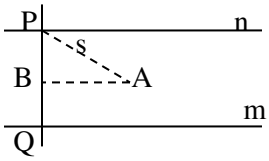
Demostración:

(A)



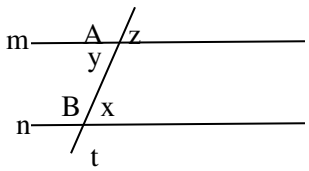
Dos perpendiculares distintas a una recta m no pueden cortarse pues se tendría un triángulo con dos ángulos rectos.

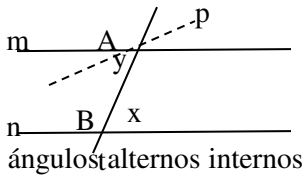
(B)



Si el punto está en la recta, entonces la única paralela a ella es ella misma. Supóngase ahora que P Es un punto dado fuera de la recta m. Sea Q la proyección ortogonal de P sobre m. La perpendicular n a la recta PQ por P es paralela a m por (A). Sea s una recta cualquiera que pase por P y sea A un punto en s distinto de P. Sea B la proyección ortogonal del punto A sobre la □□□□=□□□□. Ya que los ángulos B y Q son rectos se deduce del primer criterio de semejanza que PBA ~ PBS. Luego, ∠BPA = ∠QPS lo que indica que el punto S está en la recta s. Se ha probado que cualquier recta distinta de n no es paralela a m porque la corta.

(C)



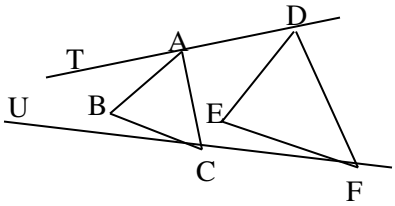


Sean m y n dos rectas cortadas por una transversal t, y sea x, y ángulos alternos internos iguales. Si m y n se cortan en un punto Q, entonces se forma el triángulo ABQ donde x es un ángulo exterior e y es un ángulo del triángulo no adyacente a x. Del problema #2.4(E) se ve que x > y o x < y lo que contradice la hipótesis. Por tanto, m y n son paralelas. Recíprocamente, sea m y n dos rectas paralelas cortadas por la transversal t en los puntos A y B, y sean x, y dos ángulos alternos internos. Trace por A una recta p que forme con t el ángulo x. Entonces por lo anterior p es paralela a n y debe coincidir con m por (B).

(D) En la figura anterior izquierda los ángulos x, z son correspondientes. Ya que y = z, por ser ángulos opuestos por el vértice, se ve que ángulos correspondientes iguales es lo mismo que ángulos alternos internos iguales. Use (C).

(E) Sean E y F son los puntos medios de los lados AC y AB de un triángulo ABC. En el teorema 2.4(A) vimos que ABC ~ AFE. Luego, B = F y del teorema 2.9(D) se sigue que las rectas FE y BC son paralelas.

(F)



Sean ABC y DEF dos triángulos tales que los pares de lados (AB, DE), (BC, EF), (AC, DF) sean respectivamente paralelos. Entonces ∠TAC = ∠TDF y ∠TAB = ∠TDE por ser ángulos correspondientes. Al restar miembro a miembro ambas igualdades se ve que A = D. además, ∠UCA = ∠UFD y ∠UCB = ∠UFE por ser ángulos correspondientes. Al restar miembro a miembro ambas igualdades se ve que C = F. Al aplicar el segundo criterio de semejanza se ve que ABC ~ DEF.

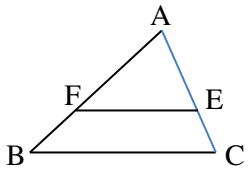
Teorema 2.10

(A) Toda paralela a un lado de un triángulo, que no pase por el vértice opuesto, corta los otros dos lados en segmentos proporcionales.

(B) Si una recta corta dos lados de un tríángulo en segmentos proporcionales, entonces dicha recta es paralela al tercer lado.

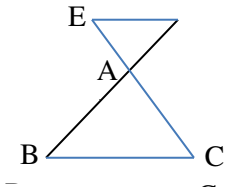
Demostración:

(A) Sea m una recta paralela al lado BC de un triángulo ABC, que no pasa por A y corta los lados AB y AC en los puntos F y E, respectivamente.



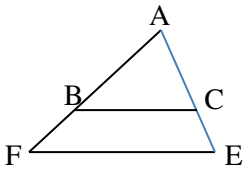
Caso 1. E está entre A y C.

Como la recta m = EF es paralela al lado BC se sigue del problema 2.9(D) que ∠AFE = ∠ABC. Del segundo criterio de semejanza se ve que □□□□=□□□□, es decir □□+□□□□=□□+□□□□. O sea, □□□□=*1*+□□□□. Por tanto, □□□□=□□□□.



Caso 2. A está entre B y E.

Como la recta m = EF es paralela al lado BC se sigue del problema #9(C) que ∠EFA = ∠ABC. Del segundo criterio de semejanza se tiene que □□□□=□□□□.



Caso 3. B está entre A y F.

Como la recta m = EF es paralela al lado BC se sigue del problema 2.9(C) que ∠EFA = ∠ABC. Del segundo criterio de semejanza se tiene que □□□□=□□□□, o sea, □□+□□□□=□□+□□□□. Luego, FAAB=EAAC.

□□□□=□□□□. Debemos mostrar que la recta FE es paralela al lado BC.

Caso 1. E está entre A y C.

Vea el dibujo del caso 1 del problema 2.10(A). Del problema 2.3 se deduce que AFE ~ ABC. Luego, ∠AFE = ∠ABC. Del problema 2.9(D) se ve que FE es paralela a BC.

Caso 2. A está entre B y F.

Vea el dibujo del caso 2 del problema 2.10(A). Del problema 2.3 se tiene que ABC ~ AFE. Luego, ∠ABC = ∠AFE. Del problema 2.9(C) se ve que EF y BC son paralelas.

Caso 3. B está entre F y A.

Vea el dibujo del caso 3 del problema 2.10(A). Del problema 2.3 se tiene que ABC ~ AFE. Luego, ∠ABC = ∠AFE. Del problema 2.9(C) se ve que EF y BC son paralelas.

Este teorema recibe en ocasiones el nombre de **Teorema de Thales.**

Teorema 2.11.

(A) Si una paralela a un lado de un triángulo corta a un lado en un punto que divide a ese lado en una razón, entonces esa recta corta a otro lado del triángulo en un punto que lo divide en la misma razón.

(B) Si una paralela a un lado de un triángulo corta a otro lado en su punto medio, entonces dicha recta corta al tercer lado en su punto medio.

Demostración:

AFFB=k. Si m corta al lado AC en el punto E, entonces del problema 2.10(A) se ve que AFFB=AEEC.

(B) Hágase k = 1 en (A).

Teorema 2.12.

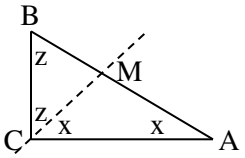
(A) Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea rectángulo es que el punto medio de un lado equidiste de los tres vértices.

(B) Una condición necesaria y suficiente para que un ángulo de un triángulo rectángulo mida 30° es que el cateto opuesto a ese ángulo sea la mitad de la hipotenusa.

(C) Si P es un punto en el interior de un triángulo ABC, entonces ∠BPC = ∠ABP + ∠ACP + A.

Demostración:

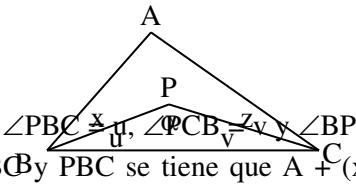
(A)



Sea ABC un triángulo rectángulo en C. Trácese una recta por C que forme con AC el ángulo A = x hasta cortar la hipotenusa en el punto M. El triángulo CMA es isósceles de base AC. Luego, CM = MA. Sea B = z. Además, ∠BCM = 90° − ∠x = B. Por tanto, el triángulo BCM es isósceles de base BC y se tiene que BM = CM. Por tanto, BM = MA = CM y M es el punto medio de la hipotenusa AB y equidista de los vértices. Recíprocamente, supóngase que M es el punto medio de la hipotenusa AB. AL ser MA = MB = MC los triángulos MCA y MCB son isósceles de bases AC y BC. Luego, ∠MCA = ∠MAC = x y ∠MBC = ∠MCB = z. Por tanto, 2x + 2z = 180° y al dividir por 2 resulta que x + z = 90° y el triángulo ABC es rectángulo en C.

(B) Si se hace x = 30° en (A) se ve que z = 60° y el triángulo BMC es equilátero por ser equiangular. Luego, AB = AM + MB = 2BC. Recíprocamente, supóngase que 2BC = AB. De (A) se sigue que AM = BM = CM. Luego, 2BC = AB = AM + MB = 2BM, o sea, BM = BC = CM y el triángulo BCM es equilátero. Por ende, z = 60° y así x = 30°.

(C)



Sean ∠ABP = x, ∠ACP = z, ∠PBC = u, ∠PCB = v y ∠BPC = α. Se debe demostrar que α = x + z + A. En los triángulos ABC y PBC se tiene que A + (x + u) + (v + z) = α + u + v= 180°. Simplificando por u + v se obtiene el resultado esperado.

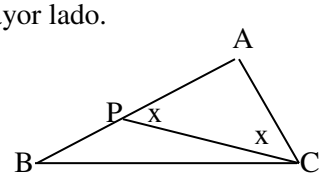
Teorema 2.13. En todo triángulo

(A) A mayor lado se le opone un mayor ángulo.

(B) A mayor ángulo se opone un mayor lado.

Demostración:

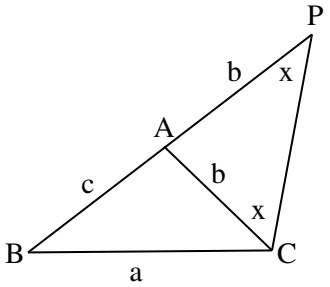
(A)



Sea ABC un triángulo tal que AB > AC. Debe demostrarse que C > B. Como AB > AC se puede hallar un punto P en el lado AB tal que AP + AC. Luego, el triángulo APC es isósceles de base PC. Luego, ∠APC = x = ∠ACP. Pero, ∠ACP < C por ser P un punto en el interior del lado AB y ∠APC > B por ser ángulo exterior al triángulo PBC. Por la transitividad de la desigualdad se verifica que C > B.

(B) Sea ABC un triángulo tal que C > B. Debe demostrarse que AB > AC. Se cumple una y sólo una de las siguientes posibilidades: AB = AC, AB < AC, AB > AC. En el primer caso se tendrá que C = B lo que contradice la hipótesis. En el segundo caso se ve de (A) que C < B lo que vuelve a contradecir la hipótesis. En consecuencia, AB > AC

Teorema 2.14. En un triángulo la suma de las longitudes de dos lados es mayor que el tercer lado.
Demostración:



Sea ABC un triángulo cualquiera. Sea P un punto en la prolongación del lado BA tal que AP = b = AC. Entonces el triángulo ACP es isósceles de base CP y ∠APC = x = ∠ACP. En el triángulo BCP se tiene que ∠BCP > x = ∠BPC. Del problema anterior se sigue que BP > BC, es decir, b + c > a.

Este teorema se llama la **Desigualdad triangular**.

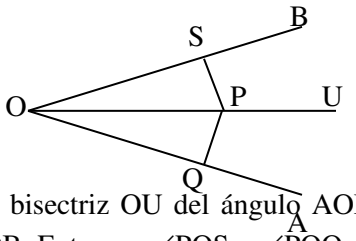
Teorema 2.15.

(A) Un punto está en la bisectriz de un ángulo si y sólo si el punto equidista de los lados del ángulo.

(B) Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un punto.

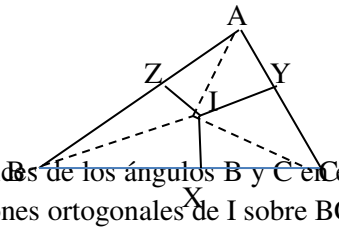
Demostración:

(A)



Sea P un punto de la bisectriz OU del ángulo AOB y sean Q, S sus proyecciones ortogonales sobre los lados OA, OB. Entonces ∠POS = ∠POQ y ∠PSO = ∠PQO = 90°. Del segundo criterio □□□□=□□□□=□□□□. P or tanto, PS = PQ y P equidista de los lados OA y OB. Recíprocamente, sea P un punto que equidista de OA y OB. Esto quiere decir que PQ = PS donde Q, S son las proyecciones ortogonales de P sobre OA y OB. Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos OSP, OQP se tiene que $OQ^2 = OP^2 - PQ^2 = OP^2 - PS^2 = OS^2$. Luego, OQ = OS. Del tercer criterio de semejanza se sigue que OSP ~ OQP. Por ende, ∠POS = ∠POQ lo que muestra que el punto P está en la bisectriz del ángulo AOB.

(B)



Supóngase que las bisectrices de los ángulos B y C en el triángulo ABC se cortan en un punto I y sean X, Y, Z las proyecciones ortogonales de I sobre BC, AC, AB. De (A) se ve que IZ = IX y XI = YI. Luego, YI = ZI y de (a) se deduce que la bisectriz del ángulo A pasa por el punto I.

Definición 2.4. El punto de intersección de las de las bisectrices de los ángulos de un triángulo se llama **incentro** del triángulo. La distancia del incentro a cada lado del triángulo se llama **inradio**. Se llama **indiámetro** al doble del inradio.

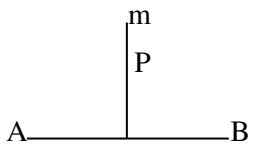
Teorema 2.16.

(A) Un punto está en la mediatriz de un segmento si y sólo si el punto equidista de los extremos del segmento.

(B) Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto.

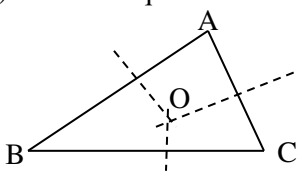
Demostración:

(A)



Sea P un punto en la mediatriz del segmento AB. Entonces PM, donde M es el punto medio de AB, es altura y mediana del triángulo PAB. Luego, PA = PB y P equidista de los extremos A y B. Recíprocamente, supóngase que el punto P equidista de los extremos Ay B del segmento AB, es decir, PA = PB. Del teorema 2.1(C) se deduce que P está en la mediatriz del segmento AB.

(B)



Sea O el corte de las mediatrices de los lados BC y AB. De (A) se tiene que OB = OC y OA = OB. Luego, OA = OC y de (A) se deduce que O está en la mediatriz del lado AC.

Definición 2.5. El punto de intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo se llama **circuncentro** del triángulo. La distancia del circuncentro a los vértices del triángulo se llama **circunradio**. Se llama **circundiámetro** al doble del circunradio.

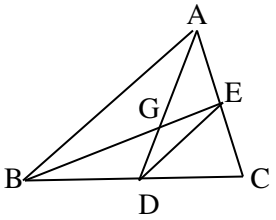
Teorema 2.17.

(A) El punto de corte de dos medianas de un triángulo triseca a cada mediana.

(B) Las medianas de los lados de un triángulo se cortan en un punto.

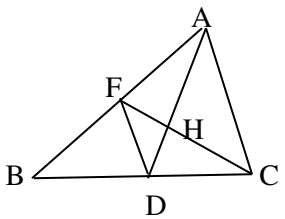
Demostración:

(A)



Sea G el corte de las medianas AD, BE de los lados BC, AC de un triángulo ABC. De los teorema 2.10(B) y 2.4(A) se ve que DE es paralela a AB y vale su mitad. Del teorema 2.9(E) se □□□□=□□□□=□□□□ y así GB = 2EG y AG = 2DG. Esto indica que G triseca a AD y a BE.

(B)



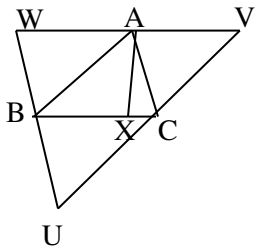
Sea H el corte de las medianas AD, CF. De (A) se deduce que H triseca a AD. Del teorema 1.5 se deduce que H coincide con G porque ese punto de trisección es único.

Definición 2.6. El punto de intersección de las medianas de los lados de un triángulo se llama **baricentro** o **centro de gravedad** del triángulo.

Teorema 2.18.

Las alturas de los lados de un triángulo se cortan en un punto.

Demostración:



Sea AX la altura del lado BC del triángulo ABC. Trace por cada vértice del triángulo la paralela al lado opuesto formando un nuevo triángulo UVW. ∠WBA = A y ∠WAB = B por ser ángulos alternos internos A□□□=□□□□. De allí se deduce que WA = BC. De manera análoga se tiene que ∠ACV = A y ∠CAV = C. □□□□=□□□□. Luego, AV = BC. Se ha visto que WA = AV. Por tanto, la altura AX es la mediatriz del segmento WV. De manera análoga se muestra que las alturas del triángulo ABC son las mediatrices del triángulo UVW y del teorema 2.16(B) se deduce que las alturas de un triángulo se cortan en un punto.

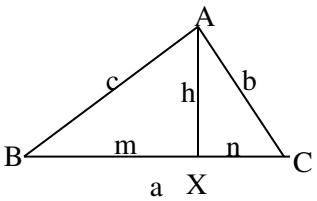
Definición 2.7. El punto de intersección de las alturas de un triángulo se llama **ortocentro**.

Teorema 2.19. El teorema del coseno.

El cuadrado de un lado de un triángulo cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de esos lados por el coseno del ángulo formado por esos dos lados. En un triángulo ABC se tiene que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Demostración:

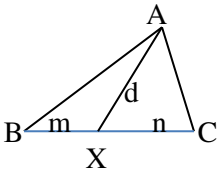


Considérese el triángulo ABC de altura AX = h, BX = m y XC = n.Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos AXB, AXC se tiene que $c^2 = m^2 + h^2$, $b^2 = n^2 + h^2$. Restando ambas igualdades se ve que $c^2 - b^2 = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) = (m - n)a = (a - 2n)a = a^2 - 2an$. Por tanto, $c^2 = a^2 + b^2 -$ □□ y así, $n = b\cdot\cos C$. Colocando este valor en la igualdad anterior se obtiene el resultado deseado: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Teorema 2.20. El teorema de Stewart.

Si AX = d es una ceviana interior al lado BC de un triángulo ABC, BX = m y XC = n, entonces se cumple la igualdad $b^2 \cdot m + c^2 \cdot n = a(d^2 + mn)$.

Demostración:



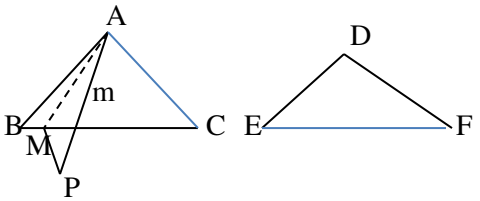
Aplicando el teorema del coseno a los triángulos ABX, ACX se tiene que $c^2 = m^2 + d^2 - 2mdcos\ \angle BXA$ y $b^2 = n^2 + d^2 - 2ndcos\ \angle CXA$ Nótese que $\angle BXA + \angle CXA = 180°$ y $cos\ \angle BXA = -cos\ \angle CXA$. Al multiplicar por n la primera igualdad anterior, multiplicar por m la segunda igualdad anterior y sumar se obtiene $c^2 \cdot n + b^2 \cdot m = m^2 \cdot n + d^2.n + n^2 \cdot m + d^2 \cdot m = d^2(m + n) + mn(m + n) = d^2 \cdot a + mna = a(d^2 + mn)$.

Este teorema fue propuesto, sin demostración, por Matthew Stewart (1717–1785). En 1751 fue demostrado por Thomas Simpson (1710–1761); en 1780 por Leonhard Euler y en 1803 por Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753–1823).

Teorema 2.21. Teorema de la charnela.

En dos triángulos que tienen dos lados iguales, el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo triángulo si y sólo si el ángulo opuesto al primero es mayor que el ángulo opuesto al segundo.

Demostración:



Sean ABC y DEF dos triángulos tales que AB = DE, AC = DF. Si A > D, entonces debe demostrarse que BC > EF. Trace por A una recta m que forme con AC el ángulo D y tome un punto P en m tal que AP = □□□□=□□□□. Luego, PC = EF. Sea M el corte de BC con la bisectriz del ángulo BAP. En los triángulos ABM y APM se ve que AB = AP, AM = AM, $\angle BAM = \angle PAM$. Del primer criterio de semejanza se □□□□=□□□□. Por tanto, BM = PM. De la desigualdad triangular se ve que EF = PC < CM + MP = CM + MB = BC. Recíprocamente, sean ABC y DEF dos triángulos tales que AB = DE, AC = DE y BC > EF. Si □□□□=□□□□. Luego, BC = EF lo que contradice la hipótesis. Si A < D, entonces de lo anterior se sigue que BC < EF lo que vuelve a contradecir la hipótesis. Por consiguiente, A > D.

Teorema 2.22.

(A) El pie W de la bisectriz AW del ángulo A del triángulo ABC divide internamente al lado opuesto acb+c y WC = n = abb+c

(B) Si W divide internamente al lado BC del triángulo ABC, entonces AU es la bisectriz del ángulo A.

(C) Las bisectrices interior y exterior de un ángulo de un triángulo son perpendiculares.

(D) El pie U de la bisectriz exterior AU del ángulo A del triángulo ABC divide externamente al lado □□□−□, CU = □□□−□

(E) Si U divide externamente al lado BC del triángulo ABC, entonces AU es la bisectriz exterior del ángulo A.

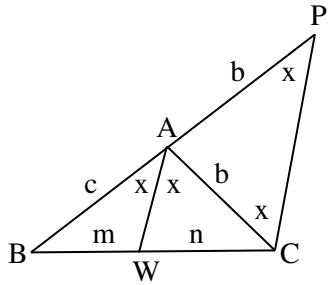
(F) La distancia de un vértice de un triángulo a la proyección ortogonal del incentro sobre uno de los lados que parten de ese vértice es igual al semiperímetro menos la longitud del lado opuesto a ese vértice.

(G) El ángulo interior que forman dos bisectrices de un triángulo es igual a un ángulo recto incrementado por la mitad del tercer ángulo del triángulo.

(H) El cuadrado de la bisectriz de un ángulo de un triángulo es igual al producto de los lados que forman el ángulo menos el producto de los segmentos determinados por la bisectriz sobre el tercer lado.

Demostración:

(A)

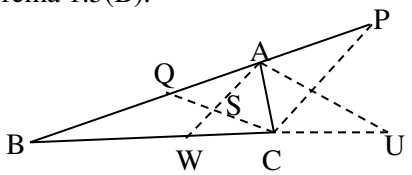


Prolongue el lado BA hasta el punto P tal que AP = b. El triángulo PAC es isósceles y PA = AC = b y ∠APC = ∠PCA = x. Como A es ángulo exterior al triángulo ABC se tiene que A = 2x. □□=□□. Por tanto, mn=cb. Al sumar 1 en la igualdad anterior se obtiene □+□□=□+□□, o sea, □□=□+□□. Luego, WC = n = □□□+□ y BW = m = a – n = □□□+□

(A) Supóngase que W divide internamente al lado BC del triángulo ABC en la razón de los lados que parten de A. De (A) vemos que la bisectriz también divide internamente al lado opuesto en esa misma razón. Del teorema 1.2(A) se deduce que AU es la bisectriz de A.

(B) Basta ver el teorema 1.5(B).

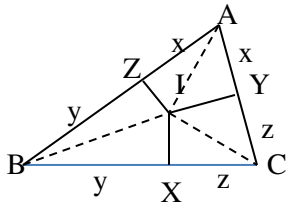
(C)



La bisectriz exterior ÁU del ángulo A del triángulo ABC es perpendicular a la bisectriz AW de A. Prolongue el lado BA hasta el punto P tal que AP = AC = b. Trace por C la perpendicular a AW que cortará a AW en S y a AB en Q. El triángulo AQC es isósceles ya que AS es bisectriz y BQBC=QACU, es decir, c− ba=bCU y se ve que CU = □□□−□. Por otro lado, BU = a + CU = □□□−□. Por consiguiente, BUCU=□b.

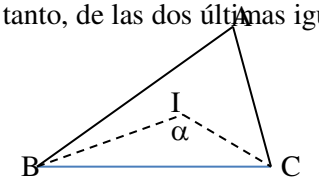
(D) Supóngase que U divide externamente al lado BC del triángulo ABC en la razón de los lados que parten de A. De (D) vemos que la bisectriz exterior también divide internamente al lado opuesto en esa misma razón. Del teorema 1.5 se deduce que AU es la bisectriz exterior de A.

(E)



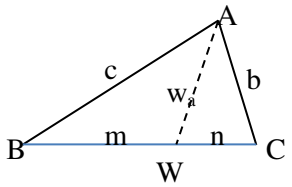
Sean X, Y, Z las proyecciones ortogonales del incentro I del triángulo ABC. Del teorema 2.15(A) se tiene que IX = IY = IZ = r. Aplicando el teorema de Pitágoras en los seis triángulos rectángulos se ve que $AZ^2 = AI^2 - IZ^2 = AI^2 - IY^2 = AY^2$, $BZ^2 = BI^2 - IZ^2 = BI^2 - IX^2 = BX^2$, $CX^2 = CI^2 - IX^2 = CI^2 - IY^2 = CY^2$. De las tres igualdades se ve que AZ = AY = x, BZ = BX = y, CX = CY = z. Luego, 2s = 2x + 2y + 2z y al dividir por 2 se tiene que s = x + y + z. Pero, a + y + z, b = x + z, c = x + y. Por tanto, de las dos últimas igualdades se obtiene que x = s–a, y = s – b, z = s – c.

(F)



Sea α el ángulo que forman las bisectrices BI y CI de los ángulos B y C del triángulo ABC. Del teorema 2.12(C) se sigue que α = (1/2)B + (1/2)C + A = (1/2)(A + b + C) + (1/2)A = 90° + (1/2)A.

(G)



La bisectriz AW = w_a del ángulo A del triángulo ABC determina los segmentos BW = m y WC = n en el lado a. Aplicando el teorema de Stewart se tiene que $a(w_a^2 + mn) = b^2 \cdot m + c^2 \cdot n$. Usando el □□□+□ + c^2·.□□□+□ = abc, y al simplificar por a se obtiene que $w_a^2 + mn = bc$ y así $w_a^2 = bc - mn$.

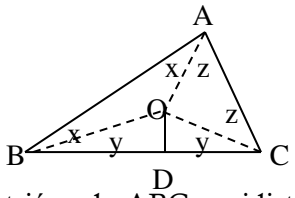
Teorema 2.23.

(A) El ángulo que forman dos circunradios que llegan a dos vértices de un triángulo es igual al doble del ángulo del triángulo en el tercer vértice.

(B) **El teorema del seno:** Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos trigonométricos de sus ángulos opuestos, y la razón de proporcionalidad es el circundiámetro del triángulo.

Demostración:

(A)



El circuncentro O del triángulo ABC equidista de sus vértices. El circunradio es OA = OB = OC = R. Del teorema 2.12(C) se deduce que ∠BQC = x + z + A = x + z + x + z = 2(x + z) = 2A.

(B) Ya que el triángulo BOC es isósceles su altura OD es bisectriz y de (A) se tiene que ∠BOD = BDOB=a/2R. Por tanto, se obtiene que □□□□ □=2R.

$$a\,\text{sen}\,A = b\,\text{sen}\,B = c\,\text{sen}\,C = 2R$$

Teorema 2.24. Sean O el circuncentro de un triángulo ABC, H su ortocentro y G su baricentro.

(A) Si D es el punto medio del lado BC, entonces AH = 2OD

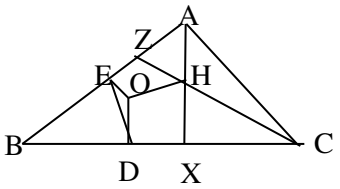
(B) Los puntos O, G, H son colineales y GH = 2OG.

(C) Si N es el punto medio del segmento OH, X es el pie de la altura de BC y K es el punto medio del segmento AH, entonces ND = NX = NK = (1/2)R.

(D) Los puntos G y H son conjugados armónicos respecto del segmento ON.

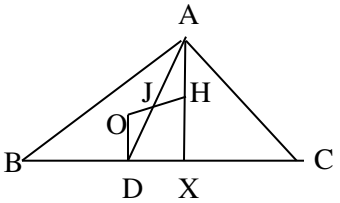
Demostración**:**

(A)



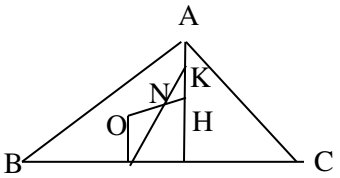
Sea E el punto medio del lado AC y sea Z el pie de la altura CZ. Entonces OD, AX son paralelas por ser perpendiculares a BC; OE, CZ son paralelas por ser perpendiculares a AB; DE, AC son paralelas y AC = 2DE por el teorema 2.4(A). Luego, DOE ~ AHC por tener sus lados 12=DEAC=DOAH. Por tanto, AH = 2OD

(B)



Sea J el corte de la mediana AD y el segmento OH. Entonces DOJ ~ AHJ por tener sus lados AH=DJAJ. Por (A) se tiene que 12=DJAJ y así AJ = 2DJ. Esta igualdad indica que J es el baricentro G del triángulo ABC. Por ende, O, G, H son colineales y HG = 2OG.

(C)



Sea N el punto medio del segmento OH. La recta DN corta la altura AX en punto K. Entonces ONHN=DOKH=DNNK y de allí se ve que DN = NK. Es decir, N es el punto medio de DK. Pero, de (A) se tiene que KH = DO = (1/2)AH y se ve que K es el punto medio de AH. Además, en el triángulo rectángulo DKX el punto medio N de la hipotenusa DK equidista de D, X, K. Así, ND = NX = NK. Por otro lado, al trazar OK se forman los triángulos AOK, DOK y ∠AKO = ∠DOK por ser ángulos alternos internos entre las paralelas AK, DO cortadas por la transversal OK. También se tiene que OD = AK y OK = OK. Del primer criterio de semejanza se sigue que AODK=AKOD=1. Por tanto, R = AO = DK = 2DN y así DN = (1/2)R.

(D)

OGGN=OHHN=2.

Definición 2.8.

(A) El segmento que un vértice de un triángulo con su ortocentro se llama **segmento de Euler**. El punto medio de un segmento de Euler se llama **punto de Euler**. El triángulo cuyos vértices son los puntos de Euler de un triángulo se llama **triángulo de Euler**.

(B) La recta que contiene al circuncentro, al baricentro y al ortocentro de un triángulo se llama **recta de Euler** de ese triángulo.

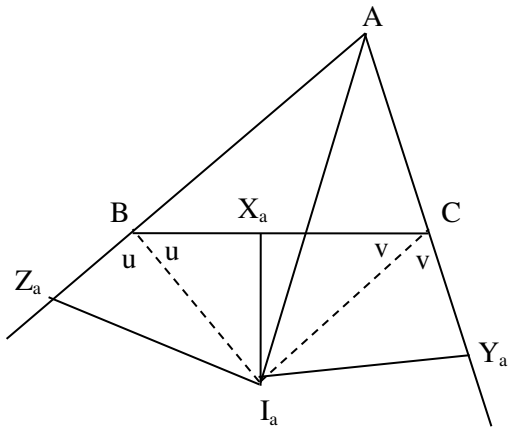
Teorema 2.25.

(A) Las bisectrices exteriores de dos ángulos de un triángulo se cortan en un punto de la bisectriz interior del tercer ángulo.

(B) La distancia de un vértice de un triángulo a la proyección de un excentro del triángulo sobre uno de los lados que parten de ese vértice es igual al semiperímetro del triángulo.

Demostración:

(A)



Supóngase que las bisectrices exteriores de los ángulos B y C del triángulo ABC se cortan en un punto I_a y sean X_a, Y_z, Z_a las proyecciones de I_a sobre el lado BC. Del segundo criterio de semejanza se ve que $I_aZ_aB \sim I_aX_aB$, $I_aY_aC \sim I_aX_aC$ Así, $\frac{I_aZ_a}{I_aX_a} = \frac{I_aB}{I_aB} = \frac{Z_aB}{X_aB}$ y al ser la segunda razón uno se tiene que $I_aZ_a = I_aX_a$ y $BZ_a = BX_a$, Análogamente, $\frac{I_aY_a}{I_aX_a} = \frac{I_aC}{I_aC} = \frac{Y_aC}{X_aC}$ y de allí se tiene que $I_aY_a = I_aX_a$, $CY_a = CX_a$.Se observa que el punto I_a equidista de los pares de rectas AB, BC y BC, AC. Por tanto, I_a equidista de las rectas AB y AC. Como los catetos I_aY_a, I_aZ_a son iguales en los triángulos rectángulos AY_aI_a, AZ_aI_a y la hipotenusa AI_a es la misma se sigue del teorema de Pitágoras que $AZ_a = AY_a$. Del tercer criterio de semejanza se sigue que los triángulos AY_aI_a, AZ_aI_a son semejantes de razón uno. Esto indica que los ángulos Z_aAI_a y Y_aAI_a son iguales y el punto I_a está en la bisectriz del ángulo A.

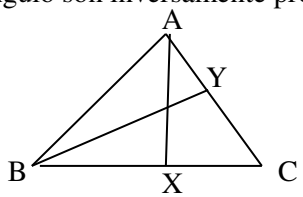
(B) Se vió de (A) que $AZ_a = AY_a$, $BX_a = BZ_a$, $CX_a = CY_a$. Así, $2AZ_a = AZ_a + AZ_a = AZ_a + AY_a = AB + BZ_a + AC + CY_a = AB + BX_a + AC + CX_a = AB + AC + (BX_a + CX_a) = AB + AC + BC = 2s$. Al dividir por 2 se obtiene que $AZ_a = AY_a = s$.

Definición 2.9. El punto de intersección dado en el teorema anterior se llama **excentro** del lado opuesto al ángulo de la bisectriz interior. La distancia del excentro a un lado y a las prolongaciones de los otros dos lados se llama **exradio**.

Los excentros de los lados a, b, c se denotarán respectivamente mediante I_a, I_b, I_c y sus exradios se denotarán mediante r_a, r_b, r_c. Nótese que r_a es la distancia de I_a al lado a y a las prolongaciones de los lados b y c. es decir, $I_aX_a = I_aY_a = I_aZ_a = r_a$.

Teorema 2.26.Los lados de un triángulo son inversamente proporcionales a sus alturas.

Demostración:



Sean $AX = h_a$, $BY = h_b$ las alturas de los lados a, b del triángulo ABC. Se tiene que $\angle AXC = \angle BYC$ y c = AXBY=ACBC. Luego, $BC \cdot AX = AC \cdot BY$, o sea, $ah_a = bh_b$. De manera análoga se demuestra que $ah_a = bh_b$.

Debido a las inundaciones anuales que ocurrían a la orillas del río Nilo los antiguos egipcios tuvieron la necesidad de medir las extensiones de sus tierras para poder reestablecer sus límites. De allí segura-mente surgió la noción de **área** de figuras. Este término usualmente se toma como un término primitivo y sus propiedades quedan determinadas mediante unos axiomas. Esto será omitido en esta edición y se acepta intuitivamente que el área de una figura plana es un número no negativo que mide de alguna manera su extensión. Las áreas de un punto, de un segmento, de una semirrecta y de una recta son iguales a cero.

Si F es una figura, entonces su área será denotada mediante [F]. En el teorema anterior se vió que en el triángulo ABC se cumplen las igualdades $a \bullet h_a = b \bullet h_b = c \bullet h_c$ lo que indica que el producto de un lado de un triángulo por su respectiva altura es constante. Los matemáticos le asignaron como área del triángulo a la mitad de esa constante, es decir,[ABC] = $\frac{1}{2} a \bullet h_a$

Definición 2.10.

(A) Dos figuras planas se dicen **equivalentes** si tienen la misma área.
12 h_a = *12* h_b = = *12* h_c se llama el **área** del triángulo ABC.

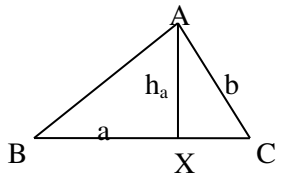
En ocasiones por razones tipográficas la fórmula anterior se escribe $2 \bullet [ABC] = a \bullet h_a$.

Teorema 2.27.

(A) El área de un triángulo es el semi-producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.
(B) Dos triángulos congruentes tienen la misma área.
(C) Una ceviana en un triángulo lo divide en dos triángulos cuya suma de áreas es igual al área total del triángulo inicial.
(D) La razón de las áreas de dos triángulos que tienen la misma altura es igual a la razón de sus bases.
(E) Una mediana de un triángulo lo divide en dos triángulos equivalentes.
(F) El área de un triángulo es igual al producto de su semiperímetro por su inradio.
(G) El área de un triángulo es el producto de sus tres lados dividido por el doble del circunradio.
(H) La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.
(I) El área de un triángulo es igual a un exradio de un lado por la diferencia entre el semiperímetro y ese lado.

Demostración:

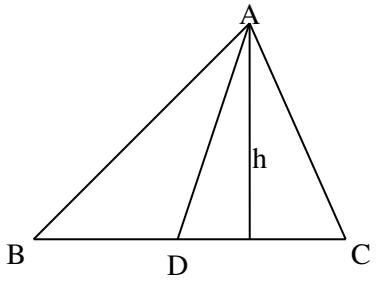
(A)



En la figura se tiene el triángulo ABC de base BC = a y de altura AX = h_a. En el triángulo AXC rectángulo en C se observa de la trigonometría que sen C = $\frac{AX}{AC} = \frac{h_a}{b}$. Al despejar h_a se obtiene que h_a = b•sen C y al colocar este valor en la fórmula del área se obtiene que [ABC] = $\frac{1}{2} a \bullet b \bullet \text{sen } C$.

(B) Dos triángulos congruentes tienen los mismos lados y las mismas alturas. Por tanto, tienen la misma área.

(C)



Si AD es una ceviana interior al lado BC de un triángulo ABC, entonces se forman dos triángulos de bases BD y CD, y de la misma altura h. Por tanto, [ABC][= BC•h = (BD + DC)•h = Bd•h + DC•h = [BDA] + [DCA].

(D) Se tiene que $\frac{[ABD]}{[DAC]} = \frac{\frac{1}{2}BD.h}{\frac{1}{2}CD.h} = \frac{BD}{CD}$.

(E) Si AD es la mediana, entonces BD = DC y las bases son iguales y la altura es la misma. Por ende, los triángulos ABC y ACD son equivalentes.

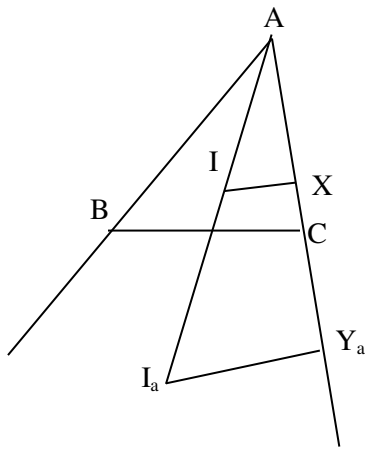
(F) Si I es el incentro del triángulo ABC y r es su inradio, entonces se forman tres triángulos cuyas bases con lados del triángulo y sus alturas son el inradio r. Por tanto, [ABC] = [BIC] + [CIA] + [AIB] = ½ ar + ½ br + ½ cr = = $\frac{1}{2}(a+b+c)\bullet r$ = s·r.

(G) De (A) se sigue que [ABC] = $\frac{1}{2}\bullet a \bullet b \bullet \text{sen } C$ y del teorema del seno se ve que sen C = $\frac{c}{2R}$. Por tanto, [ABC] = $\frac{abc}{4R}$.

(H) Si ABC y DEF son triángulos semejantes, entonces A = D y $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = k$. Así,

$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{\frac{1}{2}\bullet AB \bullet AC \bullet \text{sen } A}{\frac{1}{2}\bullet DE \bullet DF \bullet \text{sen } D} = \frac{AB}{DE}\bullet\frac{AC}{DF} = \frac{AB^2}{DE^2} = k^2.$$

(I)



Sea I el incentro y sea I_a excentro del triángulo ABC. Sean X, Y_a las proyecciones de I e I_a sobre la recta AC. Como los triángulos AIX y AI_aY_a son semejantes, por tener sus lados paralelos, se tendrá que $\frac{IX}{AX} = \frac{I_aY_a}{AY_a}$. Del teorema 2.22(F) se ve que AX = s – a, del teorema #2.25(B) se tiene que AY_a = s y $I_aY_a = r_a$. Además, IX = r. Colocando estos valores en la igualdad anterior se tiene que $\frac{r}{s-a} = \frac{r_a}{s}$. Por tanto, r•s = r_a•(s–a). De (F) se sigue que el primer miembro de esta igualdad es el área del triángulo ABC y [ABC] = r_a•(s–a). De manera análoga se ve que [ABC] = r_b•(s–b) y [ABC] = r_c•(s–c).

Teorema 2.27.

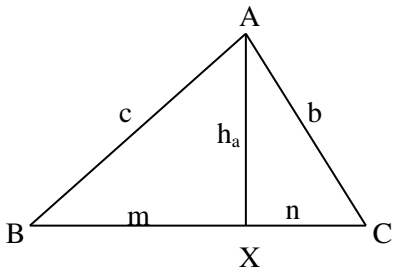
(A) Las alturas de un triángulo ABC son: $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ y $h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

(B) El área de un triángulo ABC es [ABC] = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Demostración:

(A)



Sea h_a = AX la altura del lado a = BC del triángulo ABC. En el triángulo rectángulo AXC se tiene que cos C = $\frac{n}{b}$ y así n = b•cos C. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo AXC se ve que $b^2 = h_a^2 + n^2$. Por tanto, $h_a^2 = b^2 - n^2 = b^2 - b^2 \bullet \cos^2 C = b^2(1 - \cos^2 C)$. Se obtiene que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \bullet \cos C$ aplicando el teorema del coseno al triángulo ABC Luego, cos C = $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Sustituyendo este valor arriba se obtiene que

I− a2+b2− c224a2b2 = 24 2 24a2b2− a2+b2− c22 = 14a22ab2− a2+b2− c22 =

14a22ab+a2+b2−c22ab−a2−b2+c2=

14a2a2+b2+2ab−c2c2−a2+b2−2ab =

14□2□+□2−□2□2−□−□2 = 14□2(a + b + c)(a + b – c)(c + a – b)(c – a + b).

Pero, 2s = a + b+ c, 2(s – a) = – a + b + c, 2(s – b) = a – b + c, 2(s – c) = a + b – c. Por tanto, $h_a^2 = \frac{1}{4a^2}2s.2(s\quad c).2(s\quad b).2(s\quad a) = \frac{4s(s\quad a)(s\quad b)(s\quad c)}{a^2}$. Al extraer raíces cuadradas se obtiene que $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Del mismo modo se obtienen las restantes alturas.

(B) Multiplicando por a y dividiendo por 2 en (A) se obtiene la fórmula pedida.

La fórmula [ABC] = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ se atribuye al matemático griego **Herón** de Alejandría, quién vivió en el siglo I antes de Cristo. No obstante, algunos matemáticos sostienen que esta fórmula ya era conocida por el gran matemático **Arquímedes** (ca. 287 – ca. 212 a.C.)

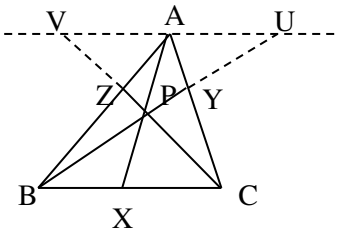
Teorema 2.28.

(A) Las cevianas AX, BY, CZ de un triángulo ABC se cortan en un punto P si y sólo si se cumple la □□□□·□□□□·□□□□=*1*.

(B) Los pies X, Y, Z DE Las cevianas AX,BY,CZ de un triángulo ABC son colineales si y sólo si se □□□□·□□□□·□□□□=*1*.

Demostración:

(A)



Supóngase que las cevianas AX, BY, CZ del triángulo ABC se cortan en un punto P. Trace una recta por A paralela a BC hasta cortar a BP, CP en los puntos U, V. Entonces, AZV ~ BZC, AUY ~ CBY, AVP ~ XCP, AUP ~ XVP por tener sus lados paralelos. Luego,

AZZB=AVVC (1)

CYYA=□□□□ (2)

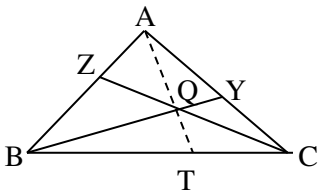
APPX=AVXC(3)

APPX=AUBX(4)

□□□□□□□□=AVAU□□□□ y así

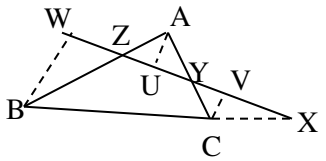
BXXC=AUAV (5)

□□XC□□□□□□□□=AUAV□□□□□□□□=□□□□□□□□□□□□□= 1. Recíprocamente, supóngase que se □□□□·□□□□·□□□□=*1* donde AX, BY, CZ son cevianas en el triángulo ABC.



Supóngase que las cevianas BY y CZ se cortan en un punto Q. Si AQ corta a BC en un punto T, □□□□·□□□□·□□□□=*1*. Al comparar ambas igualdades se ve que BTTC=BXXC y del teorema 1.5(A) se sigue que los puntos X y T coinciden. Por tanto, AX, BY, CZ son concurrentes.

(B)



Supóngase que los pies X, Y, Z de las cevianas AX, BY, CZ están en una recta. Sean U, V, W las proyecciones ortogonales de los vértices A, B, C del triángulo sobre la recta XY. Entonces AUZ ~ BWZ, AUY ~ CVY, CXV ~ BXW por tener sus lados paralelos. Por tanto,

AZZB=AUBW (1)
CYYA=CVAU (2)
□□XC=BWCV (3)

□□□□·□□□□·□□□□=□□□□.□□□□.□□□□=*1*. Recíprocamente, supóngase que las cevianas AX, BY, CZ □□□□·□□□□·□□□□=*1*. Supóngase que la recta YZ corta la recta bc en un punto J. De (B) se sigue □□□□·□□□□·□□□□=*1*. Al comparar ambas relaciones se tiene que □□XC=BJJC lo que indica que los puntos X y J coinciden. Por tanto, los puntos X, Y, Z son colineales.

El teorema 2.28(A) da condiciones necesarias y suficientes para que tres cevianas de un triángulo sean concurrentes. Este resultado fue descubierto por el matemático italiano Giovanny Ceva (1647 – 1734) en 1678 y por eso se llama el **Teorema de Ceva**. El matemático Ceva también redescubrió y publicó el teorema 2.28(B) que había sido realizado por el matemático griego Menelao de Alejandría (ca.70 – ca. 130) que da condiciones necesarias y suficientes para que tres puntos en los lados de un triángulo estén alineados. Al teorema 2.28(B) se le llama el **Teorema de Menelao.**

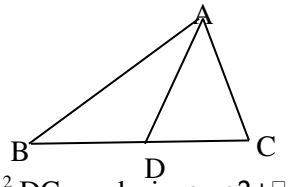
Teorema 2.29

(A) Si AD = m_a, BE = m_b, CF = m_c son las medianas de los lados a, b, c del triángulo ABC, entonces b22+c22− a24=, m_b^2 = □*22*+□*22*−□*4*, m_c^2 = □*22*+□*22*−□*24*

(B) Si AU = w_a, BW = w_b, CK = w_c son las bisectrices de los ángulos A, B, C del triángulo ABC, 2b+cbcs(s− a), w_b = 2a+cacs(s− b), w_c = 2b+cabs(s− c).

Demostración:

(A)

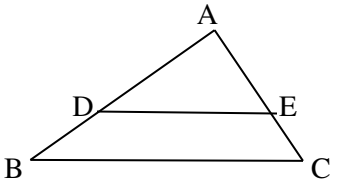


wa2+BD·DC = b^2·BD + a^2·DC, es decir, awa2+□*2*·□*2*=□*2*·□*2*+□*2*·□*2*. Al despejar w_a^2 se obtiene lo buscado.

acb+c.□□□+□ = □□□+□*2*−□*2*□□□+□*2* =

bcb+c2b+c2− a2 = bcb+c2b+c+ab+c− a = bcb+c22s·2(s− a) = *4□□□(□−□)(□+□)2*. Al sacar raíz cuadrada se obtiene lo deseado.

Problema 2.1. Sean D, E puntos interiores de Menelao de los lados AB, AC del triángulo ABC tal que ABC ~ ADE, AD = 5, AE = 6, BC = 12, AB = 15, C = 60°. Calcule AC, DE y ∠DEA.
Solución:



De la semejanza de triángulos se deducen

A = A, B = D, C = E (*)

ABAD=ACAE=BCDE (**)

La tercera igualdad de (*) dice que 60° = C = ∠DEA. Usando los datos numéricos dados en (**) se tiene *155*=AC*6*=12DE . Luego, AC = 18 y de = 4.

Problema 2.2. Sean ABC, DEF, PQS tres triángulos. Probar

(A) ABC ~ ABC

(B) Si ABC ~ DEF, entonces DEF ~ ABC.

(C) Si ABC ~ DEF y DEF ~ PQS, entonces ABC ~ PQS.

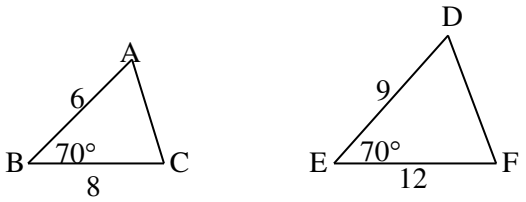
Solución:

ABAB=ACAC=BCBC. Luego, ABC ~ ABC.

ABDE=AC□□=BCEF=k. Luego, D = A, E = B, F = C, □□AB=□□AC=□□BC=*1*□. Por tanto, DEF ~ ABC.

ABDE=ACDF=BC□□, D = P, E = Q, F = S, DEPQ=□□PS=□□QS. De las igualdades de los ángulos se tiene que A = P, B = Q, C = S. Multiplicando miembro a miembro las anteriores ABPQ=ACPS=BC□□. Por consiguiente, ABC ~ PQS.

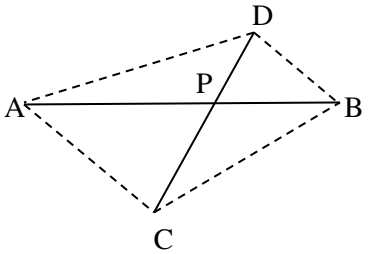
Problema 2.3. En los triángulos ABC, DEF se tiene que AB = 6, BC = 8, B = 70°, DE = 9, EF = 12, E = ACDF.
Solución:



Se tiene que B = E = 70°. Los lados que forman el ángulo B miden 6 y 9, y los lados que forman el 6*9=812=23* esos lados son proporcionales. Del primer criterio de semejanza se ve que ABC ~ DEF. ACDF=ABDE=*23*.

Problema 2.4. Sean C, D puntos que no están en la recta AB tal que los segmentos AB, CD se cortan en un punto P situados en sus interiores. Si AP = 3PB y CP = 3PD, pruebe que ∠PAC = ∠PBD, ∠ACP = ∠BDP y AC = 3BD.

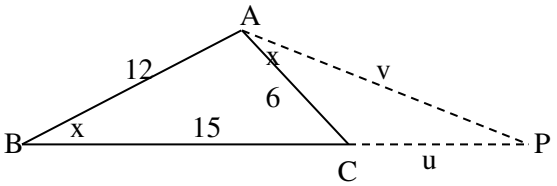
Solución:



AP□□=□□PD=*3* Del primer criterio de semejanza se ve que APC ~ BPD. Luego, A = B, P = P, C = D, APBP=ACBD=□□□□=*3.* La igualdad A = B significa ∠PAC = ∠PBD, y la igualdad C = D significa AC□□=3 y así AC = 3BD.

Problema 2.5. En el triángulo ABC se tiene que AB = 12, AC = 6, BC = 15. Se prolonga el lado BC hasta un punto P tal que ∠CAP = B = x. Halle CP = u y AP = v.

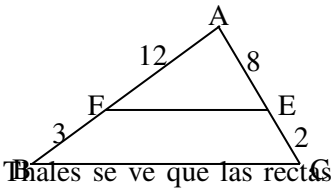
Solución:



En los triángulos ABP, CAP se tiene que x = ∠ABP = ∠CAP y ∠APB = ∠APC. Del segundo criterio de ABCA=APCP=□□□□, o sea, 126=□□=*15*+□□. Por tanto, v = 2u y 15 + u = 2v. Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene CP = U = 5 Y AP = V = 10.

Problema 2.6. Sean E, F puntos interiores de los lados AC, AB del triángulo ABC tales que AF = 12, □□BC.

Solución:



AFFB=AEEC=4. Del teorema de Thales se ve que las rectas FE, BC son paralelas. Luego, ∠AFE = ∠ABC por ser ángulos correspondientes entre las paralelas FE, BC cortadas por la transversal AB. Por el FEBC=AFAB=*1212+3=45.*

Problema 2.7.

(A) Luisa le dice a Nicolás: "Los ángulos de un triángulo miden 46°, 57°, 78°" Nicolás le dice: "Tienes razón". ¿Qué piensa usted de esto?

(B) Halle los ángulos de un triángulo si son proporcionales a los números 2, 4, 9.

180°m*, 180°□,180°□* donde m, n, p son enteros positivos.

Solución

(A) Ambos mienten ya que 46° + 57° + 78° = 181° lo que contradice al teorema 2.4(C).

A*2*=□*4*=□*9*=t. Luego, A = 2t, B = 4t, C = 9t. Por tanto, se tiene que 180° = A + B + C = 2t + 4t + 9t = 15t, y así t = 12. Se tiene que A = 24°, B = 48°, C = 108°.

180°m+ *180°□+180°□=180°* y al simplificar por 180° se ve que

1m+ *1□+1□=1* (*)

Si uno de esos enteros es uno, entonces de (*) se ve que la suma de dos números positivos es cero lo cual es absurdo lo que indica que todos esos enteros son mayores que uno.

Caso 1. Supóngase que p = 2

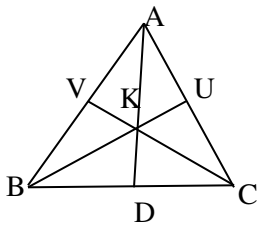
1m+ *1□=1−12=12* y así 2m + 2n = mn, es decir, mn – 2m = 2n, y se ve que m(n – 2) = 2(n – 2) + 4. Por tanto, (m – 2)(n – 2) = 4. Esto indica que m – 2 y n – 2 son enteros positivos factores de 4. Las soluciones (m, n) son (6, 3), (4, 4) y (3, 6) produciendo los ángulos (60°, 30°, 90°), (45°, 45°, 90°) y (30°, 60°, 90°).

Caso 2. Supóngase que p > 2.

Sacando cuentas como se hizo en el caso anterior se obtiene la desigualdad (m – 2)(n – 2) < 4. Las soluciones (m, n) son (3, 3), (3, 4), (4, 3), (5, 3), (3, 5) pero la única de ellas que hacen que p sea entero en (*) es (3, 3) produciendo (60°, 60°, 60°).

Problema 2.8. En un triángulo isósceles ABC de base BC se toma un punto K en la bisectriz del ángulo A. Las rectas BK, CK cortan AC, AB en los puntos U, V. Pruebe que BV = CU.

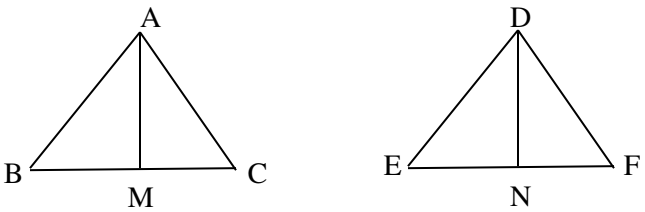
Solución:



Del teorema 2.1(C) se ve que AK corta a BC en su punto medio D y ∠KDC= 90°. Como KD es mediana y altura el triángulo BDK es isósceles de base BC. Del teorema 2,1(B) se tiene que B = C y ∠KBC = ∠KCB. En el triángulo BCU se tienen los ángulos ∠KBC y C, y en el triángulo CBV se tienen los BCCB=BVCU y así BV = CU.

Problema 2.9. Si dos triángulos isósceles tienen iguales sus ángulos verticales y las medianas de sus bases, entonces ambos triángulos son congruentes.

Solución:



Sean ABC, DEF dos triángulos isósceles de bases BC, EF tales que A = D y AM = DN donde M, n son los puntos medios de BC, EF. Del teorema 2.1(C) se ve que AM, DN son las bisectrices de los ángulos A, D, y alturas de los lados BC, EF. Luego, ∠ABM = ½ A = ½ D = ∠EDN y ∠BMA = ∠END. Del segundo AMDN=ABDE. Por ende, AB = DE. Del segundo criterio de semejanza se deduce que ABC ~ DEF. Por BBDE lo que indica que AB = DE. Por consiguiente, ABC ≅ DEF.

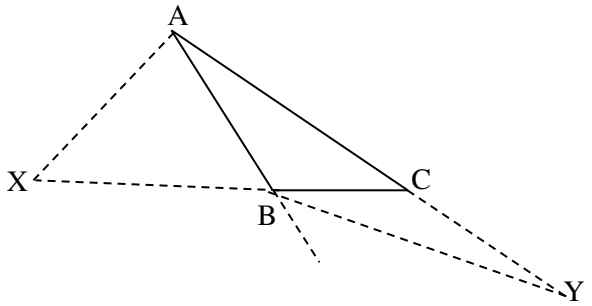
Problema 2.10. Si M, N son los puntos medios de los lados AC, DF de los triángulos ABC, DEF, AB = DE, AC = DF y BM = EN, entonces ABC ≅ DEF.

Solución:

Se tiene que MC = ½ AC = ½ DF = NF. Del tercer criterio de semejanza se tiene que BMC ~ ENF. BMEN=BCEF y así BC = EFD. Usando este resultado con las dos primeras hipótesis se ve que ABC ~ ABDE y se concluye que ABC ≅ DEF.

Problema 2.11. El ángulo B en el triángulo ABC es obtuso y AB > BC. Las bisectrices exteriores de los ángulos A y B son iguales al lado AB. ¿Cuánto vale el ángulo A?

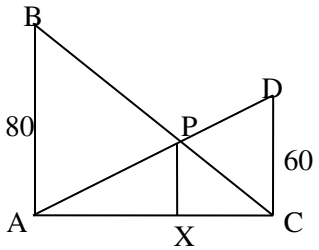
Solución:



Si AX, BY son las bisectrices exteriores de los ángulos A, B se tiene que ∠XAB = 90° – ½ A y ∠ZBY = ½ ∠ZBC donde Z es un punto en la prolongación del lado AB. Vea la figura que sigue. Ya que AX = BY = AB se tiene que ∠AXB = ∠XBA y A = Y. Así, ∠ZBY = A + Y = 2A y ∠ZBC 2(2A) = 4A. En el triángulo AXB se ve que A + X + B = 180° y así (90° – ½ A) + 2(4ª) = 180°. Al despejar A se obtiene que A = 12°.

Problema 2.12. Dos edificios de 80 y 60 metros de altura están situados uno en frente del otro. Se toman dos cables y cada uno une el techo de un edificio con el pie del otro edificio. Ambos cables se cortan en un punto P. ¿A que altura del piso está el punto P?

Solución:



En la figura se han representado los edificios AB = 80 y CD = 60.Sea P el corte de BC, AD y sea X la proyección ortogonal de P sobre el piso AC. Se tiene que AXP ~ ACD y CXP ~ CAB por tener sus lados paralelos. Luego, $\frac{AX}{AC} = \frac{XP}{60}$ y $\frac{CX}{CA} = \frac{XP}{80}$. Dividiendo ambas proporciones se ve que $\frac{AX}{CX} = \frac{80}{60} = \frac{20 \bullet 4}{20 \bullet 3} = \frac{4}{3}$. De aquí se ve que AX = 4t y CX = 3t para cierto número real t. Colocando estos valores en la primera proporción se obtiene $\frac{4t}{4t+3t} = \frac{XP}{60}$ y al simplificar se ve que XP = $\frac{240}{7}$.

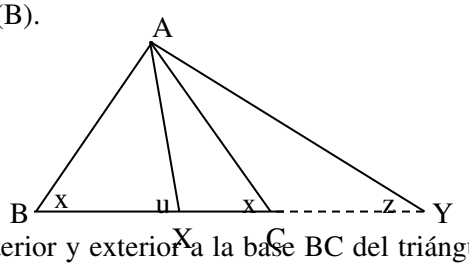
Problema 2.13. Halle el ángulo mayor del triángulo ABC si A = 20° y B = 30°.

Solución:
Del teorema 2.4(C) se sigue que 20° + 30° + C = 180° y así C = 130°. Como C es el ángulo mayor su lado opuesto AB = c es su lado mayor de acuerdo al teorema 2.13(B).

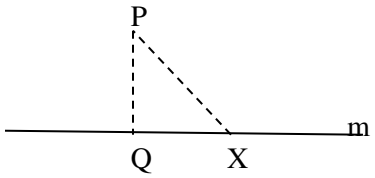
Problema 2.14.

(A) En un triángulo rectángulo la hipotenusa es el lado mayor.
(B) Toda ceviana interior a un triángulo isósceles es menor que cualquiera de los lados iguales, y toda ceviana exterior es mayor.
(C) El punto de una recta que está más cercano a un punto dado es su proyección ortogonal sobre la recta.

Solución:
(A) La hipotenusa se opone al ángulo recto que es el mayor de los tres ángulos del triángulo. Aplíquese el teorema 2.13(B).
(B)



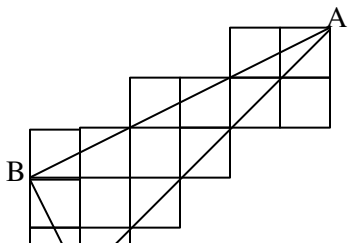
Sean AX, BY cevianas interior y exterior a la base BC del triángulo isósceles ABC. Nótese que B = C = x. En el triángulo AXC el ángulo AXB = u es exterior y así u > x. En el triángulo ABX se tiene que AB > AX. Por otro lado, ∠ACB = x > z = AYB por ser ángulo exterior al triángulo ACY. Así, x > Z y en el triángulo ABY se obtiene que AY > AX.
(C)



Sea m una recta y sea P un punto. Si P está en m, entonces la distancia de P a m es cero y es la menor de todas las distancias. Sea P un punto que no está en m y sea Q la proyección ortogonal de P sobre m. Si X es un punto de m, entonces PX ≥ PQ. Luego, PQ es la menor de todas las distancias que hay entre P y cualquier punto de m.

Problema 2.15.

(A) ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo si sus catetos miden 1 cada uno?
(B) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 y un cateto mide 5. ¿Cuánto mide el otro cateto?
(C) Halle los tamaños de los lados de un triángulo rectángulo si esos tamaños son números enteros y un cateto mide 10.
2 ≥ a + b.
32 veces la hipotenusa.
(F) Todo triángulo de lados 3, 4, 5 es rectángulo.
2.
(H) Halle el ángulo formados por los lados menores de un triángulo de lados 12, 13 y 5.
(I) La figura anexa está formada por 15 cuadraditos de longitud 1.



Muestre que el triángulo ABC es rectángulo.

(J) En un triángulo ABC, rectángulo en C, h es la altura de la hipotenusa. Pruebe que h, c + h, a + b son lados de un triángulo rectángulo.

(K) Un triángulo ABC, rectángulo en C, es isósceles. Si P es un punto cualquiera de la hipotenusa, pruebe la igualdad $AP^2 + BP^2 = 2CP^2$.

Solución:

(A) Si los catetos a = b = 1 en el triángulo ABC, rectángulo en C, entonces $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. por el *2.*

(B) Se tiene que c = 15 y a = 5. Por el teorema de Pitágoras se ve que $15^2 = 5^2 + b^2$ y así se obtiene 200 = 10*2.*

(C) Si b = 10 es un cateto, entonces del teorema de Pitágoras se tiene que $a^2 + 10^2 = c^2$ y así $c^2 - a^2 = 10^2$. Luego, (c – a) (c + a) = 100. Como los lados a y c deben ser enteros positivos se sigue que los números c – a y c + a deben ser enteros positivos y factores del número 100. Ya que 100 = 1x100 = 2x50 = 4x25 = 5x20 = 10x10 los únicos factores que hacen que los números c – a y c + a sean enteros positivos son c – a = 2 y c + a = 50. Al sumar estas dos últimas igualdades vemos que c = 26 y a = 24. Por tanto, los catetos son 10 y 24, y la hipotenusa es 26.

(D) El cuadrado de cualquier número real es no negativo. Así, $(a - b)^2 \geq 0$, i.e., $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ y se ve que $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Al sumar $a^2 + b^2$ en ambos lados de la desigualdad se tiene que $2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$. Usando el teorema de Pitágoras se tiene que $2c^2 \geq (a + b)^2$ y al extraer raíces cuadradas se obtiene la desigualdad deseada.

(E) Sea ABC un triángulo rectángulo en C. Si B = 60º, entonces A = 30º y del ejemplo 3.29 se sigue que si el cateto BC mide a, entonces la hipotenusa mide 2a. Por el teorema de Pitágoras se ve que $AC^2 = AB^2 - BC^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2$. Luego, AC = $a\sqrt{3}$. Por tanto, $\frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(F) Se tiene que $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$. Del teorema de Pitágoras se sigue que el triángulo es rectángulo. Los catetos miden 3 y 4, y la hipotenusa mide 5.

(G) Se tiene que $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 + 2^2$. Del teorema de Pitágoras se deduce que existe un triángulo rectángulo de catetos 2 y 2, y de hipotenusa $2\sqrt{2}$. Ya que los dos catetos son iguales el triángulo es isósceles. Por consiguiente, los ángulos del triángulo son 45°, 45°, 90°.

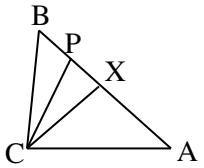
(H) Ya que $13^2 = 12^2 + 5^2$ se sigue del teorema de Pitágoras que el triángulo es rectángulo y su hipotenusa será el lado mayor. Por tanto, los lados menores son los catetos y formarán un ángulo recto.

(I) Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que AB = $3\sqrt{2^2+1^2} = 3\sqrt{5}$, BC = $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ y AC = $5\sqrt{1^2+1^2} = 5\sqrt{2}$. Ya que $AC^2 = AB^2 + BC^2$ se sigue del teorema de Pitágoras que el triángulo ABC es rectángulo en B.

(J) Se ve que $(a + b)^2 + h^2 = a^2 + b^2 + 2ab + h^2$. Usando el teorema de Pitágoras y el teorema 2.7(D) se ve que $(a + b)^2 + h^2 = c^2 + 2ch + h^2 = (c + h)^2$. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene el resultado.

Problema 2.16. Un triángulo ABC, rectángulo en C, es isósceles. Si P es un punto cualquiera de la hipotenusa, entonces $AP^2 + BP^2 = 2CP^2$.

Solución:



Sea CX la altura de la hipotenusa. Del teorema 2.1(C) se sigue que X es el punto medio de AB y se ve c2 . Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo CPX, rectángulo en X, se ve que $PC^2 = PX^2 + XC^2 =$ c2− BP2+c22= c22 – c·BP + BP^2 = BP+PA22− BP·PA + BP^2 = BP2+PA22 . Al multiplicar por 2 se obtiene el resultado indicado.

Problema 2.17.

(A) Halle los posibles valores del lado BC del triángulo ABC si AB = 4 y AC = 7.

(B) Las longitudes de dos lados de un triángulo isósceles son 4 y 9. Es posible determinar sin ambigüedad la longitud del tercer lado?

(C) Si b = 3,8 y c = 0,6 en el triángulo ABC, y si la longitud del lado a es un entero, ¿cuánto mide a?

(D) Sea AB el lado mayor del triángulo ABC. Si P es un punto interior a ese triángulo, entonces PA + PB > PC.

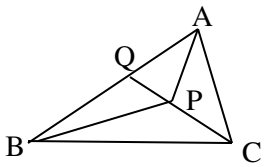
Solución:

(A) De la desigualdad triangular se deduce que: BC < 4 + 7, 7 < 4 + BC, 4 < 7 + BC. De la primera desigualdad se tiene que BC < 11; de la segunda desigualdad se ve que BC > 3, y la última desigualdad no produce ninguna información adicional ya que BC > 0. Por tanto, los posibles valores de BC son todos los números reales que hay entre 3 y 11.

(B) Como el triángulo es isósceles debe tener dos lados iguales. Por tanto, el tercer lado debe medir 4 ó 9. Pero, no puede medir 4 ya que la desigualdad 4 + 4 > 9 es falsa. Por consiguiente, el tercer lado mide 9.

(C) De la desigualdad triangular se ve que 0,6 < 3,8 + a, 3,8 < 0,6 + a, a < 3,8 + 0,6. La primera desigualdad es verdadera para todo entero a. de las otras desigualdades se ve que 3,2 n< a < 4,4. El único entero que hay entre 3,2 y 4,4 es 4. Luego, la respuesta es 4.

(D)



Al aplicar la desigualdad triangular al triángulo ABP se obtiene

$$PA + PB > AB \qquad (1)$$

Sea Q el corte de la recta CP con el lado BC. En Q se forman dos ángulos adyacentes donde uno de ellos no es agudo, y sea ∠AQC dicho ángulo. Aplicando el teorema 2.13(A) al triángulo AQC se tiene que AC ≥ CQ = CP + PQ > CP, es decir,

$$AC > CP \qquad (2)$$

Como AB es el lado mayor del triángulo se tendrá la desigualdad

$$AB \geq AC \qquad (3)$$

Luego, de (1), (2), (3) se tiene que PA + PB > AC > CP y por la transitividad de las desigualdades se obtiene que PA + PB > CP.

Problema 2.18.

(A) Halle en cada caso el tercer lado del triángulo ABC

(i) a = 5, b = 8, C = 60° (ii) a = b = 2, C = 150°

(B) Halle el ángulo mayor en un triángulo de lados 5, 7 y 9.

(C) Sean ABC y DEF dos triángulos tales que AB = DE, AC = DF y A + D = 180°. Pruebe que $BC^2 + EF^2 = 2(AB^2 + AC^2)$

Solución:

(A) Bastará aplicar en cada caso el teorema del coseno.

(i) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 60° = 49$. Al sacar raíces cuadradas se tiene que c = 7.

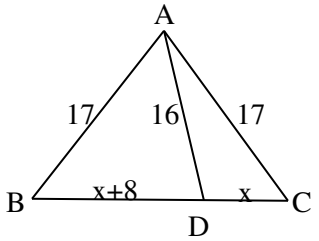
3 =4(2 – 3)Al extraer raíces cuadradas se obtiene que c = 2− 3.

(B) Bastará a la luz del teorema 2.13(A) ver que el ángulo mayor x es el opuesto al lado mayor 9. Del 81− 25− 4970 que es aproximadamente igual a 0,1. Buscando el arco coseno se obtiene que el ángulo x es aproximadamente 84° 15' 39"

(C) Como A y D son suplementarios se tendrá que cos A = –cos D. Aplicando el teorema del coseno en ambos triángulos se ve que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB{\cdot}AC{\cdot}\cos A$ y $EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE{\cdot}DF{\cdot}\cos D$. Al sumar ambas igualdades y usar la hipótesis se obtiene el resultado deseado.

Problema 2.19. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 17 y una ceviana interior mide 16. La diferencia entre los segmentos determinados en la base por el pie de la ceviana es 8. Halle la longitud de cada uno de estos segmentos.

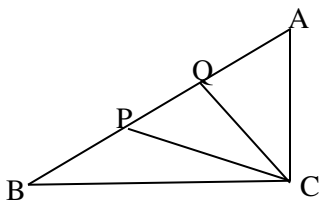
Solución:



En la figura AB = AC + 17, AD = 16,. Si DC = x, entonces BD = x + 8. Aplicando el teorema de Stewart al triángulo ABC se tiene que $17^2(x + 8) + 17^2x = (2x + 8)[16^2 + (x + 8)x]$. Efectuando las operaciones se tiene que $289x + 2312 + 289x = 512x + 2x^3 + 16x^2 + 2048 + 8x^2 + 64x$, y al simplificar se tiene la ecuación cúbica $2x^3 + 24x^2 - 2x - 264 = 0$ y al dividir por 2 resulta $x^3 + 12x^2 - x - 132 = 0$. Una raíz hallada por tanteo es x + 3. Luego, la solución es BD = 11 y DC = 3.

Problema 2.20. La suma de los cuadrados de las distancias del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo a los puntos de trisección de la hipotenusa es igual a los cinco novenos del cuadrado de la hipotenusa.

Solución:



Sean P, Q los puntos de trisección de la hipotenusa AB del triángulo rectángulo ABC. Entonces AQ = QP + PB = m. Aplicando el teorema de Stewart en el triángulo ACP se tiene que $CP^2 \cdot m + b^2 \cdot m = 2m(CQ^2 + m^2)$. Al efectuar las operaciones y simplificar se obtiene la igualdad

$$CP^2 + b^2 = 2CQ^2 + 2m^2 \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Stewart en el triángulo QCB se tiene que $QC^2 \cdot m + a^2 \cdot m = 2m(CP^2 + m^2)$. Al efectuar las operaciones y simplificar se obtiene la igualdad

$$CQ^2 + a^2 = 2CP^2 + 2m^2 \ (2)$$

Al sumar (1) y (2_) y simplificar se ve que $a^2 + b^2 = CP^2 + CQ^2 + 4m^2$. Usando el teorema de Pitágoras se ve que el primer miembro es $a^2 + b^2 = c^2 = (3m)^2 = 9m^2$. La igualdad anterior se convierte en $CP^2 + CQ^2 =$ c32= 59c2.

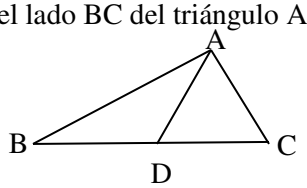
Problema 2.21.

(A) Si D es el punto medio del lado BC del triángulo ABC y ∠ADC es agudo, entonces AB > AC.

(B) Si D es el punto medio del lado BC del triángulo ABC y AB > AC, entonces ∠ADB es obtuso.

Solución:

(A)

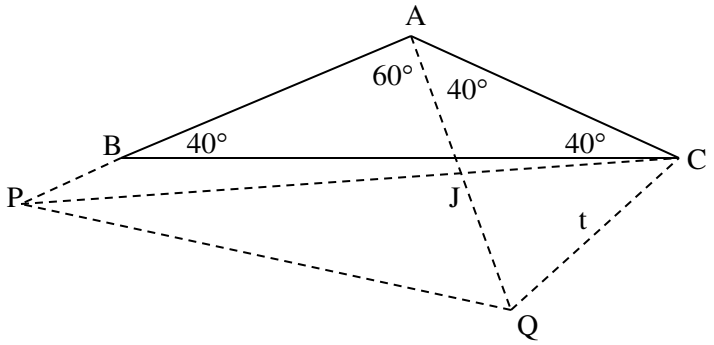


Como ∠ADC es agudo se tendrá que ∠ADB es obtuso y así ∠ADB > ∠ADC. Por otro lado, BD = DC y AD = AD. Del teorema de la charnela se deduce que AB > AC.

(B) Ya que BD = DC, AD = AD y AB > AC se sigue del teorema de la charnela que ∠ADB > ∠ADC. Al sumar ∠ADB en ambos miembros se obtiene que 2∠ADB > 180° y al dividir por 2 se ve que ∠ADB > 90°.

Problema 2.22. El ángulo vertical A de un triángulo isósceles ABC mide 100°. Se prolonga el lado ab hasta el punto P tal que AP = BC. Halle ∠BCP.

Solución:



Trace por el vértice C una recta que forme con AC un ángulo igual a 100° se toma un punto Q tal que CQ = AB. Esto indica que el punto C está en la mediatriz del segmento AQ. Además, por el primer criterio de ABCQ=BCAQ y se tiene que AQ = BC. Luego, ABC ≅ CQA. Se deduce de aquí que ∠CAQ = ∠CQA = 40°, ∠BCQ = 50° y ∠PAQ = 60°. Por esto último y AP = BC = AQ se deduce que el triángulo APQ es equilátero lo que indica que P equidista de A y Q. Por tanto, PC es la mediatriz del segmento AQ. Esto indica que ∠AJC = 90° y en el triángulo ACJ se tiene que ∠ACJ = 90° – 40° = 50°. Por tanto, ∠BCP = ∠ACJ – ∠ACB = 50° – 40° = 10°.

Problema 2.23.

2, ¿cuánto mide el tercer lado?

2. Pruebe que dicho triángulo es rectángulo.

Solución:

(A) Si A = 30° y B = 105°, entonces C = 180° - 105° - 30° = 45°. Luego, el lado menor es el opuesto *32□□□ 30°=□□□□ 45°*. Por tanto, c = 6.

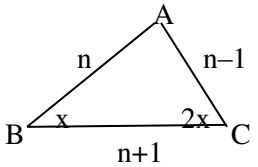
2sen 2B=2sen B, o sea, *22□□□ □*.cos□=*2□□□ □*. Al simplificar se obtiene que cos B = 12=*22*. Por tanto, B = 45° y se tiene que A = 2 x 45 = 90° lo que indica que el triángulo es rectángulo.

Problema 2.24. ¿Cuántos triángulos existen tales que las longitudes de sus lados sean tres enteros consecutivos y un ángulo sea el doble del otro?

Solución:

Sean n – 1, n, n + 1, con n entero mayor que 1, las longitudes de los lados de los triángulos buscados. Si uno de los ángulos es x, entonces otro ángulo es 2x. Ya que hay 3 números distintos hay 6 posibilidades de formar triángulos. No obstante, el lado opuesto a 2x debe ser mayor que el lado opuesto a x por el teorema 2.13(B). Esto indica que el lado n – 1 no puede estar opuesto al ángulo 2x. Si n es opuesto a x, entonces el lado n + 1 no puede estar opuesto al ángulo x. Estudiemos las tres posibilidades que quedan.

Caso 1. Los lados n – 1 y n son opuestos a los ángulos x y 2x.



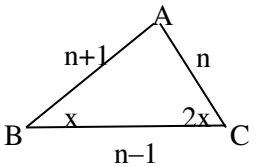
Aplicando el teorema del coseno al triángulo ABC se obtiene

$(n-1)^2 = n^2 + (n+1)^2 - 2n(n+1)\cos x$ (*)

Aplicando el teorema del seno al triángulo ABC se obtiene

n− 1sen x=n2sen x.cosx y así cos x = n2(n− 1). Colocando este valor en la igualdad (*) y simplificando se obtiene que n = 2. Los lados son 1, 2, 3 que no forman triángulo por no cumplir la desigualdad triangular.

Caso 2. Los lados n y n + 1 son opuestos a los ángulos x y 2x.



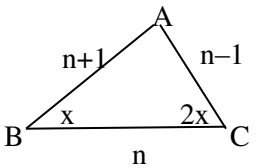
Aplicando el teorema del coseno al triángulo ABC se obtiene

$n^2 = (n-1)^2 + (n+1)^2 - 2(n\ \ 1)(n+1)\cos x$ (**)

Aplicando el teorema del seno al triángulo ABC se obtiene

nsen x =n+12sen x.cosx y así cos x = n+12n. Colocando este valor en la igualdad (**) y simplificando se obtiene la ecuación cuadrática $n^2 - 3n - 1 = 0$ que no tiene solución entera. Por tanto, no hay triángulo.

Caso 3. Los lados n – 1 y n + 1 son opuestos a los ángulos x y 2x.



Aplicando el teorema del coseno al triángulo ABC se obtiene

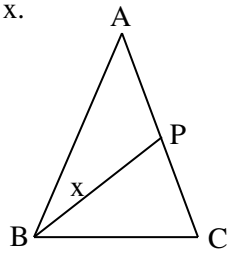
$(n-1)^2 = n^2 + (n+1)^2 - 2n(n+1)\cos x$ (***)

Aplicando el teorema del seno al triángulo ABC se obtiene

n− 1sen x=n+12sen x.cosx y así cos x = n+12(n− 1). Colocando este valor en la Igualdad (***) y simplificando se ve que n(n – 5) = 0 cuya única solución entera positiva es n = 5. Por ende, el único triángulo que cumple esas condiciones es el triángulo de lados 4, 5, 6.

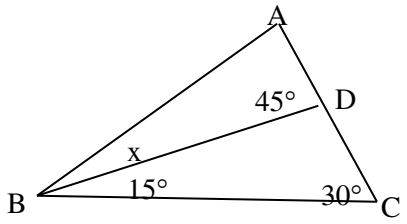
Problema 2.25. Sea ABC un triángulo isósceles de ángulo vertical A = 20° y sea P un punto en el lado AC tal que AP = BC. Halle ∠ABP = x.

Solución:

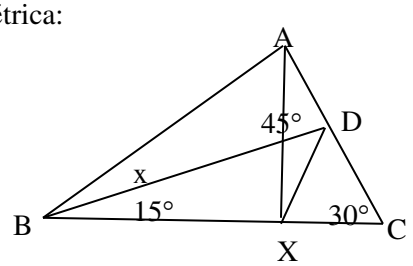


Los ángulos de la base del triángulo isósceles son B = C = 80° y ∠BPC = x + 20 por ser ángulo exterior al triángulo ABP. Aplicando el teorema del seno a los triángulos ABP y BPC se obtiene las igualdades APsen x=BPsen 20° y BCsen(x+20)=BPsen 80° . Ya que AP = BC al dividir miembro a miembro se tiene que
□□□(□+20)□□□ □=□□□ 80□□□ 20=cos10□□□ 20=cos102□□□ 10.cos10=12□□□ 10=12□□□ 10=□□□ 30□□□ 10=□□□(10+30)□□□ 10. Al comparar el primer miembro con el último resulta que x = 10°.

Problema 2.26. Sea D el punto medio del lado AC tal que ∠ADB = 45° y C = 30°. Halle ∠ABD = x.
Solución:



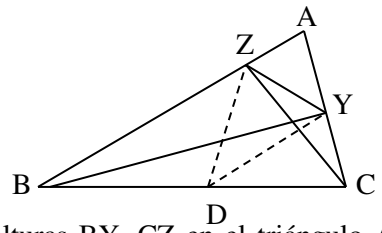
Del teorema 2.4(D) se tiene que 45° = ∠ADB = ∠DBC + 30°. Luego, ∠DBC = 15°. En el triángulo ADB se ve que A = 135° – x. Aplicando el teorema del seno en los triángulos ADB y CDB se obtiene que BDsen(135°− x)=ADsen x y BDsen 30°=DCsen 15°. Al dividir miembro a miembro ambas igualdades se obtiene
sen(135°− x)sen 30°=sen xsen 15° , es decir, sen(135°− x)sen x=sen 30°sen 15°=2□□□ 15°cos15°□□□ 15°= 2cos 15° = □□□ 15°12=□□□ 15°□□□ 30° =
□□□ 75°□□□ 30°=□□□(180°−75°)□□□ 30°=□□□ 105°□□□ 30°=□□□(135°−30°)□□□ 30°. Luego, sen(135°− x)sen x= □□□(135°−30°)□□□ 30°, y al comparar ambos miembros se tiene que x = 30°.
Una solución no trigonométrica:



Trace la altura AX y una X con D. En el triángulo rectángulo AXC con ángulo C = 30° el punto D es el punto medio de la hipotenusa. Del teorema 2.12(A) se ve que DA = DX = DC, y del teorema 2.12(B) se sigue que AX = XD = DA y el triángulo ADX es equilátero por lo que ∠ADX = 60°. Por tanto, ∠BDX = 60° – 45° = 15° y el triángulo BXD es isósceles porque ∠DBX = ∠BDX = 15°. Así, BX = XD = XA. Entonces el triángulo rectángulo BXA es isósceles y B = 45°. Por ende, x = 45° – 15° = 30°.

Problema 2.27.
Los pies de dos alturas de un triángulo junto con el tercer vértice forman un triángulo semejante al dado.

Solución:



Sean Y, Z los pies de las alturas BY, CZ en el triángulo ABC. Si D es el punto medio del lado BC, entonces en los triángulos rectángulos BCY y BCZ se tiene que DB = DC = DZ = DY por lo que los triángulos BDZ, ZDY, YDC son isósceles. Luego, $\angle BZD = B$, $\angle DYC = C$ y así $\angle BDZ = 180° - 2B$ y $\angle YDC = 180° - 2C$. Se tendrá entonces que $\angle ZDY = 180° - 2A$ y como el triángulo ZDY es isósceles se tendrá que $\angle DZY = \angle DYZ = A$. Por otro lado, en el punto Z se ve que $\angle AZY = 180° - \angle BZD - \angle DZY = 180° - B - A = C$. Del segundo criterio de semejanza se tiene que ABC ~ AYZ.

Definición 2.11. Se llama **triángulo órtico** de un triángulo dado al triángulo formado por los pies de las alturas del triángulo dado.

Problema 2.28.

(A) El ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico.

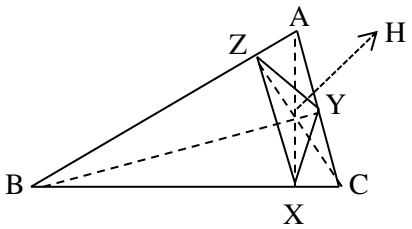
(B) Los vértices de un triángulo son los excentros de su triángulo órtico.

(C) El producto de los segmentos en los que un lado de un triángulo es dividido por el correspondiente vértice del triángulo órtico es igual al producto de los lados del triángulo órtico que pasan por el vértice considerado.

(D) El producto de los seis segmentos en los que los lados de un triángulo están divididos por los pies de las alturas es igual al cuadrado del producto de los tres lados del triángulo órtico.

Solución:

(A)



Del problema 2.27 se sigue que $\angle BXZ = \angle YXC = A$. Luego, $\angle ZXA = 90° - A = \angle YXA$ y se ha mostrado que la altura AX es la bisectriz del ángulo ZXY. De manera análoga se muestra que BY y CZ son las bisectrices de los ángulos ZYX y XZY. Por tanto, H es incentro del triángulo órtico XYZ.

(B) Basta ver que el lado BC es perpendicular a la bisectriz AX del ángulo $\angle ZXY$ y, por tanto, BC es la bisectriz exterior del vértice X en el triángulo XYZ. Los excentros son los cortes de esta bisectrices exteriores.

AYXY=YZYC , es decir, $AY \cdot YC = XY \cdot ZY$. De manera análoga de las otras semejanzas se obtienen las igualdades $AZ \cdot ZB = YZ \cdot XZ$ y $BX \cdot XC = XZ \cdot XY$.

(D) Multiplicando las tres igualdades de (B) se obtiene $BX \cdot XC \cdot CY \cdot YA \cdot AZ \cdot ZB = (XY \cdot YZ \cdot ZX)^2$.

Problema 2.29.

(A) La razón de un lado de un triángulo al correspondiente lado de su triángulo órtico es igual a la razón entre el circunradio y la distancia del lado considerado al circuncentro.

(B) El perímetro del triángulo órtico de un triángulo acutángulo es igual al doble del área del triángulo dado dividido por el circunradio del triángulo dado.

Solución:

(A) Del teorema se sigue que un lado de un triángulo es igual al circundiámetro del triángulo multiplicado por el seno del ángulo opuesto a ese lado. En el triángulo ABC se tiene que BC = 2R·sen A. En los triángulos rectángulos AHY, AHZ de la figura en la solución del problema 2.28(B) se ve que AH es la hipotenusa y su punto medio equidista de los vértices A, Y, Z, H lo BCYZ=2R·sen AAH·sen A=2RAH=□□□ donde la última igualdad viene del teorema 2.24(A).
□□·□□□+□□·□□□+□□·□□□=*2*□□□□

Problema 2.30.

(A) Cuatro veces la suma de los cuadrados de las medianas de un triángulo es igual a tres veces la suma de los cuadrados de sus lados.

(B) A mayor lado se tiene menor mediana.

(C) La suma de los cuadrados de las distancias del baricentro de un triángulo a sus vértices es igual a un tercio de la suma de los cuadrados de sus lados.

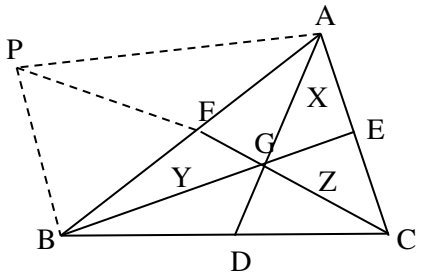
Solución:

(A) Multiplicando cada igualdad del teorema 2.29(A) por 4 y se suma se tiene que $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = (2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2a^2 + 2c^2 - b^2) + (2a^2 + 2b^2 - c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.
a22+b22− c24 – a22+c2− b24 = *34*$(b^2 - c^2) > 0$. Luego, $m_c^2 > m_b^2$ y como esos números son positivos se concluye que $m_b < m_c$.
23ma2 + 23mb2 + 23mc2 = *49*□□*2*+□□*2*+□□*2* = *13* $(a^2 + b^2 + c^2)$ donde la última igualdad proviene de (A).

Problema 2.31.

(A) Si P es un punto cualquiera y G es el baricentro del triángulo ABC, entonces se cumple la igualdad $PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2$.
$19(a^2 + b^2 + c^2)$

Solución:



(A) Sean AD, BE, CF las medianas del triángulo ABC que se cortan en el baricentro G y sean X, Y, Z los puntos medios de AG, BG, CG. Aplicando el teorema 2.29(A) a los triángulos PBC, PAG, PDX se ve que

$$2PB^2 + 2PC^2 = 4PD^2 + BC^2 \qquad \text{(a)}$$

$2PA^2 + 2PG^2 = 4PX^2 + AG^2$ (b)
$2PD^2 + 2PX^2 = 4PG^2 + DX^2$ (c)

Al sumar (a) y (b) junto al doble de (c) se tiene que
$2PB^2 + 2PC^2 + 2PA^2 + 2PG^2 + 4PD^2 + 4PX^2 = 4PD^2 + BC^2 + 4PX^2 + AG^2 + 8PG^2 + 2DX^2$
Al simplificar y sabiendo que DX = AG se obtiene que $2(PA^2 + PB^2 + PC^2) = BC^2 + 3AG^2 + 6PG^2$ y al dividir entre 2 resulta

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + \frac{3}{2}AG^2 + 3PG^2 \qquad \text{(d)}$$

Aplicando el teorema 2.29(A) a los triángulos PAC, PBG, PEY se tiene que
$2PA^2 + 2PC^2 = 4PE^2 + AC^2$ (e)
$2PB^2 + 2PG^2 = 4PY^2 + BG^2$ (f)
$2PE^2 + 2PY^2 = 4PG^2 + EY^2$ (g)

Al sumar (e) y (f) junto con el doble de (g) se obtiene que
$2PA^2 + 2PC^2 + 2PB^2 + 2PG^2 + 4PE^2 + 4PY^2 = 4PE^2 + AC^2 + 4PY^2 + BG^2 + 8PG^2 + 2EY^2$
Al simplificar y sabiendo que EY = BG se tiene que $2(PA^2 + PB^2 + PC^2) = AC^2 + 3BG^2 + 6PG^2$, y al dividir entre 2 resulta

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{3}{2}BG^2 + 3PG^2 \qquad \text{(h)}$$

Aplicando el teorema 2.29(A) a los triángulos PAB, PCG, PZF se tiene que
$2PA^2 + 2PB^2 = 4PF^2 + AB^2$ (i)
$2PC^2 + 2PG^2 = 4PZ^2 + CG^2$ (j)
$2PZ^2 + 2PF^2 = 4PG^2 + ZF^2$ (k)

Al sumar (i) y (j) junto con el doble de (k) se obtiene que
$2PA^2 + 2PB^2 + 2PC^2 + 2PG^2 + 4PZ^2 + 4PF^2 = 4PF^2 + AB^2 + 4PZ^2 + CG^2 + 8PG^2 + 2ZF^2$
Al simplificar y sabiendo que ZF = CG se tiene que $2(PA^2 + PB^2 + PC^2) = AB^2 + 3CG^2 + 6PG^2$.
Al dividir entre 2 resulta

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{3}{2}CG^2 + 3PG^2 \qquad \text{(l)}$$

Sumando (d), (h) y (l) se obtiene

$$3(PA^2 + PB^2 + PC^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 + BC^2) + \frac{3}{2}(AG^2 + BG^2 + CG^2) + 9PG^2$$

Al usar el problema 2.30(A) se ve que

$$3(PA^2 + PB^2 + PC^2) = \frac{3}{2}(AG^2 + BG^2 + CG^2) + \frac{3}{2}(AG^2 + BG^2 + CG^2) + 9PG^2$$

es decir, $3(PA^2 + PB^2 + PC^2) = 3(AG^2 + BG^2 + CG^2) + 9PG^2$ y al dividir entre 3 se obtiene el resultado deseado:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + `GC^2 + 3PG^2.$$

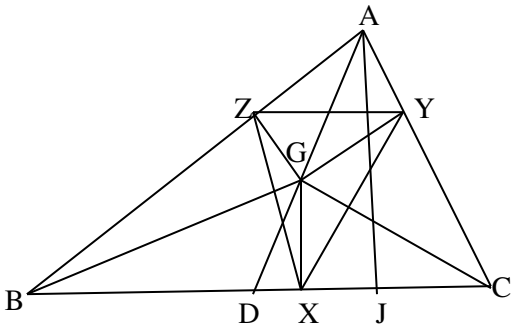
(B) Haciendo P = O se ve que PA = PB = PC = R y usando el problema 2.30(C) se obtiene el resultado deseado.

Definición 2.12. El triángulo formado por los pies de las perpendiculares desde un punto dado a los lados de un triángulo dado se llama el **triángulo pedal** del punto dado respecto del triángulo dado.

El triángulo órtico de un triángulo ABC es el triángulo pedal del ortocentro de ABC respecto del triángulo ABC.

Problema 2.32. El área del triángulo pedal del baricentro G respecto del triángulo ABC está dada *4□3□2+□2+□29□2□2□2.*

Solución:



En la figura se ha representado el triángulo ABC, su mediana AD, su altura AJ y el triángulo pedal XYZ de su baricentro G. Como GX, GY son perpendiculares a BC, AC se tiene en los triángulos rectángulos BGZ y BGX que sus ángulos son complementarios. Por ende, los ángulos B y ZGX son suplementarios y, □□/□=□□□□=*13*/ Por tanto, GX = $\frac{1}{3}h_a$. De manera similar con las otras alturas se tiene que GY = $\frac{1}{3}h_b$ y

12GX·GZ·sen ∠XGZ +

12GX·GY·sen ∠XGY + 12GY·GZ·sen ∠ZGY = 12·13ha·13hc·sen B+12·13ha·13hb·sen C+ 12·13hb·13hc·sen A =

118ha·hc·sen B+ ha·hb·sen C+ hb·hc·sen A . Al multiplicar y dividir el segundo miembro por $a^2b^2c^2$ se obtiene

118a2b2c2a·hac·hcacb2sen B+a·hab·hbabc2sen C+b·hbc·hca2bcsenA

ha=b·hb=c·hc = a·c·sen B = a·b·sen C = b·c·sen A = 2[ABC]. Luego, S = 4S3a2+b2+c29a2b2c2

Problema 2.33.

3 y PC = 4.

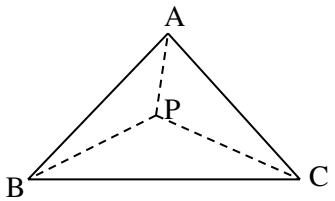
(A) Pruebe que los segmentos PA, PB, PC pueden ser los lados de un triángulo rectángulo.

(B) ¿Cuánto mide el ángulo APB?

(C) ¿Cuánto mide el lado del triángulo equilátero ABC?

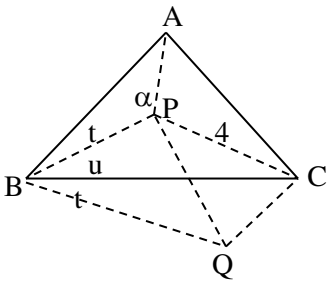
Solución:

(A)



Nótese que PA < PB < PC y $PA^2 + PB^2 = 4 + 12 = 16 = PC^2$. Del teorema de Pitágoras se ve que los lados forman un triángulo rectángulo.

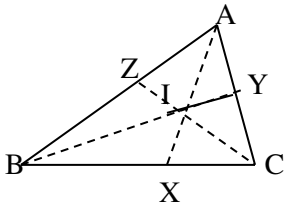
(B) Sean ∠APB = α y ∠PBC = t. Trace por B y fuera del triángulo ABC el



3. Entonces el
triángulo PBQ es isósceles. Si ∠PBC = u, entonces 60° = ∠ABC =
u + t = ∠PBQ lo que indica que el triángulo PBQ es equilátero y así
3, ∠PQB = ∠BPQ = ∠PBQ = 60°. Por otro lado, ABP ~ CBQ
por el primer criterio de semejanza. Además, ambos triángulos son
□□□□=*1*. Por tanto, α = ∠APB = ∠CQB y QC = AP = 2.
Por (A) el triángulo PQC es rectángulo en C. Por tanto, α = ∠CQB = ∠CQP + ∠PQB = 90° + 60° = 150°.

(C) En el triángulo rectángulo PQC el cateto CQ mide la mitad de su hipotenusa PC y del teorema #2.12(B) se deduce que ∠CPQ = 30°. Por tanto, ∠BPC = ∠BPQ + ∠CPQ = 30° + 60° = 90° y el triángulo BPC es rectángulo de hipotenusa el lado común a del triángulo ABC. Del teorema de *28 = 27*

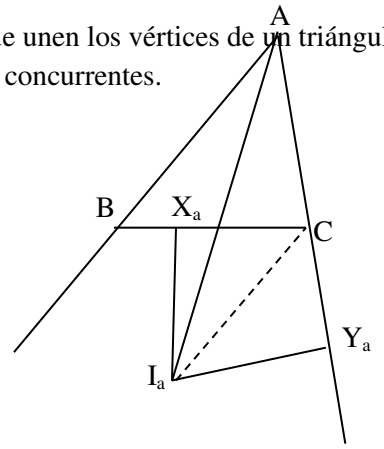
Problema 2.34. Las rectas que unen los vértices de un triángulo con los vértices del triángulo pedal de su incentro son concurrentes.
Solución:



□□□□□□□□□□□□□ = □−□□−□□−□□−□□−□□−□ = 1. Aplicando el teorema de Ceva se concluye que AX, BY, CZ son rectas concurrentes.

Definición 2.13. El punto hallado en el problema anterior se llama **punto de Gergonne** del triángulo.

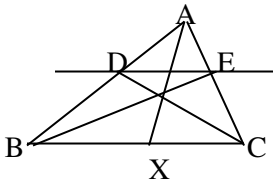
Problema 2.35. Las rectas que unen los vértices de un triángulo con las proyecciones ortogonales de los excentros sobre sus lados son concurrentes.
Solución:



Sean X_a, X_b, X_c las proyecciones ortogonales de los excentros I_a, I_b, I_c sobre los lados BC, AC, AB del □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□=□−□□−□□−□□−□□−□□−□= 1. Aplíquese el teorema de Ceva.

Definición 2.14. El punto hallado en el problema anterior se llama **punto de Nagel** del triángulo.

Problema 2.36. Una paralela al lado BC del triángulo ABC corta a AB, AC en los puntos D, E. Pruebe que las rectas BE y CD cortan a la mediana desde A.
Solución:



□□□□=□□□□ y como AX es mediana se ve que □□□□=*1* Por tanto, se tiene que BXXC□□□□□□□□□=*1*. Del teorema de Ceva se concluye que las rectas AX, BE, CF son concurrentes.

Problema 2.37.

(A) Las bisectrices exteriores de un triángulo cortan los lados opuestos en tres puntos colineales.

(B) Los lados del triángulo órtico cortan los lados del triángulo dado en tres puntos colineales.

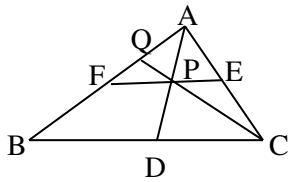
Solución:

(A) Si U*, V*, W* son los pies de las bisectrices exteriores de los ángulos A, B, C del triángulo ABC, □□*□*□=□□, □□*□*□=□□, □□*□*□=□□. Luego, al multiplicar esas relacione miembro a miembro da 1 y por el teorema de Menelao dichos puntos con colineales.

(B) Los lados del triángulo son las bisectrices exteriores del triángulo órtico. Aplíquese (A).

Problema 2.38. Sean AD, BE, CF las medianas del triángulo ABC. AD corta a EF en el punto P. La recta CP corta al lado AB en el punto Q. Pruebe que AB = 3AQ.

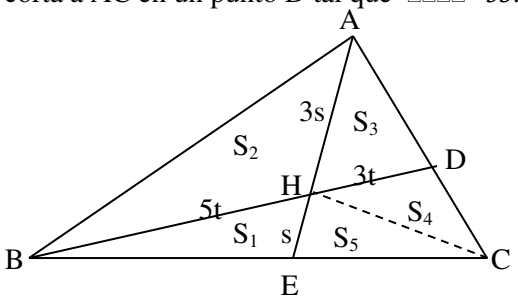
Solución:



Los puntos Q, P, C son colineales y están en los lados AF, FE, AE del triángulo AFE. Aplicando el □□□□□□□□□□□□□=*1*. Pero, FP = PE y □□□□=*12*. Por tanto, □□□□=*12* . Al sumar 1 se obtiene □□□□=*32*, o sea, *12*□□□□=*32* y al multiplicar por 2 se obtiene el resultado. AB = 3AQ.

□□□□=*3*. La recta BH corta a AC en un punto D tal que □□□□=*53*. Calcule la medida del ángulo C.

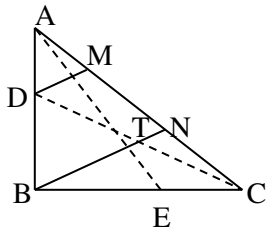
Solución:



Sean S_1 = [BHE], S_2 = [BHA], S_3 = [AHD], S_4 = [DHC] y S_5 = [HCE]. Del teorema 2.27(D) se ve que □*2*□*1* =3, S2S3=53, S3+S4S5= 3, S1+S5S4=53.. Luego, $S_2 = 3S_1$, $3S_5 = S_3 + S_4$, $5S_4 = 3S_1 + 3S_5$, $3S_2 = 95k$, $S_4 = 65k$, $S_5 = k$. Por tanto, $S_1 + S_2 = S_3 + S_4 + S_5 = 4k$ lo que indica que las áreas de los triángulos ABE y ACE son iguales y así AE es mediana. Como es bisectriz el triángulo ABC es isósceles de ángulo vertical 70°. Por consiguiente, el triángulo dado es isósceles y el ángulo C mide 55°.

Problema 2.40. Sea ABC un triángulo isósceles y rectángulo en B. Sean D, E puntos en AB, BC tales que AD = CE. Se trazan por D, B perpendiculares a la recta AE hasta cortar la hipotenusa AC en los puntos M y N. Pruebe que MN = NC.

Solución:



Como AB = BC y AS = EC al restar se tiene que DE = BE y por el primer criterio de semejanza se ve que ABE ~ CBD. Luego, ∠BCD = ∠BAE. Por otro lado, ∠NBC = ∠ BAE por tener sus lados perpendiculares. ∠ABN = ∠BDC por ser ángulos complementarios de ∠NBC = ∠DCB. Si T es el punto de corte de CD y BN, entonces los triángulos DBT y BTC son isósceles lo que dice que T es el punto medio del segmento CD. Las rectas DM y BN son paralelas al ser perpendiculares a AE y en el triángulo ADC se sigue que N es el punto medio del lado MC, es decir, MN = NC.

Problema 2.41.

2□□□□2−□2

(B) Los pies de las bisectrices de un triángulo determinan sobre los tres respectivos lados tres segmentos tales que el recíproco de uno es igual a la suma de los recíprocos de los otros.

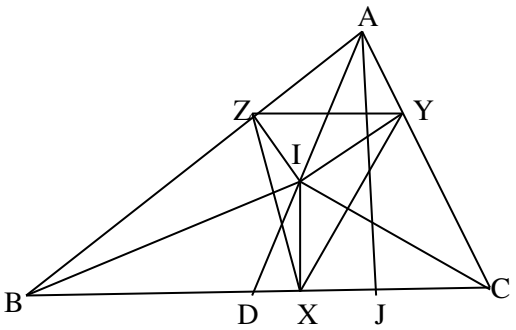
Solución:

2kdk2− 1=2·cb·acb2− 1=2abcc2− b2

(B) Sean W_1, W_2, W_3 los pies de las bisectrices de los ángulos A, B, C del triángulo ABC en los lados a, b, c, y sean U_1, U_2, U_3 son los respectivos pies de las bisectrices exteriores de esos mismo *2□□□□2−□2*, W_2U_2 = *2□□□□2−□2*, W_3U_3 = *2□□□□2−□2*. Luego, 1W1U1+1W3U3=c2− b2+(b2− a2)2abc=c2− a22abc=1W1U1

Problema 2.42. La razón de las áreas de un triángulo y el triángulo pedal de su incentro es igual a la razón entre el circundiámetro del triángulo y su inradio.

Solución:



Sean X, Y, Z las proyecciones ortogonales del incentro I del triángulo ABC sobre los lados a, b, c. XIZABC=r2·sen Bacsen B=r2ac=br2abc. De manera análoga se tiene que XIYABC=cr2abc y YIZABC=ar2abc. Al sumar esta igualdades se tiene que XYZABC=r2a+b+cabc. En el numerador se tiene r^2·2s = r·(rs) = r·[ABC] donde se usó el teorema 2.27(F) . En el teorema 2.27(G) se vió que □□□□□□=*2□□*.

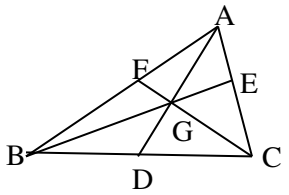
Problema 2.43.

(A) La suma de las medianas de un triángulo es menor que el perímetro y mayor que sus tres cuartos de perímetro.

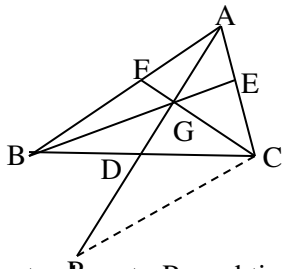
(B) Si P es el conjugado armónico del baricentro G de un triángulo ABC respecto de la mediana AD, entonces D es el punto medio del segmento AP.

Solución:

(A)



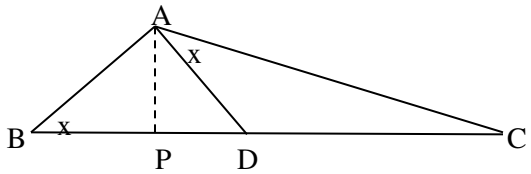
Sean AD, BE, CF las medianas del triángulo ABC que se cortan en el baricentro G. Aplicando la desigualdad triangular en los triángulos BCG, CAG, ABG se tiene que
23mb+23mc, b < 23ma+23mc, c < 23mb+23mc. Al sumar esta desigualdades se obtiene que *43*□□+□□+□□ y se concluye que $m_a + m_b + m_c > 34(a + b + c)$.



Al duplicar la mediana AD hasta el punto P se obtiene en el triángulo ACP es AC = b, CP = a y $AP = 2m_a$. Aplicando la desigualdad triangular en ese triángulo se ve que $2m_a < b + c$. Duplicando las otras dos medianas se ve que $2m_b < a + c$ y $2m_c < a + b$. Al sumar las tres desigualdades se concluye que $2(m_a + m_b + m_c) < 2(a + b + c)$ y al dividir por 2 se obtiene el resultado deseado.

Problema 2.44. Si AD es la mediana del triángulo ABC, ∠BDA = 45°, B = ∠DAC = x, pruebe que x = 30°

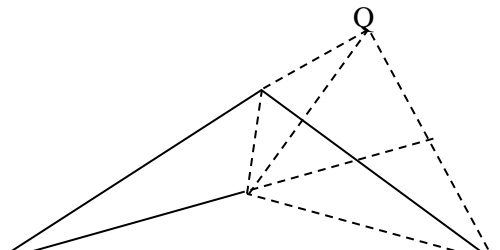
Solución:

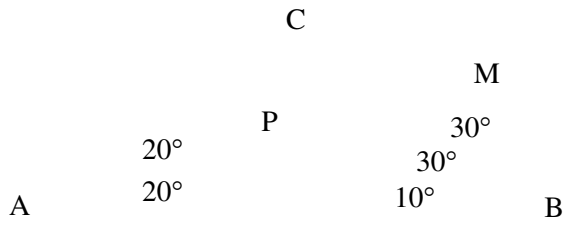


ABAD=ACCD=BCAC, es decir, se tiene que □AD=ba2=ab. Luego, AD = bca y $2b^2 = a^2$. Así, AD^2 = b2c2a2=b2c22b2=c22, o sea, $c^2 = 2AD^2$. Al trazar la altura AP se forma el triángulo rectángulo isósceles APD y AP = PD = u. Del teorema de Pitágoras en ese triángulo se tiene que $AD^2 = 2u^2$ y usando la última igualdad anterior se ve que $c^2 = 4u^2$ lo que indica que c = 2u, es decir, el cateto AP es la mitad de la hipotenusa en el triángulo ABP. Del teorema 2.12(B).

Problema 2.45. Sea P un punto interior al triángulo ABC tal que ∠CAP = ∠BAP = 20°, ∠ABP = 10° y ∠PBC = 30°. Halle ∠PCB = x.

Solución:

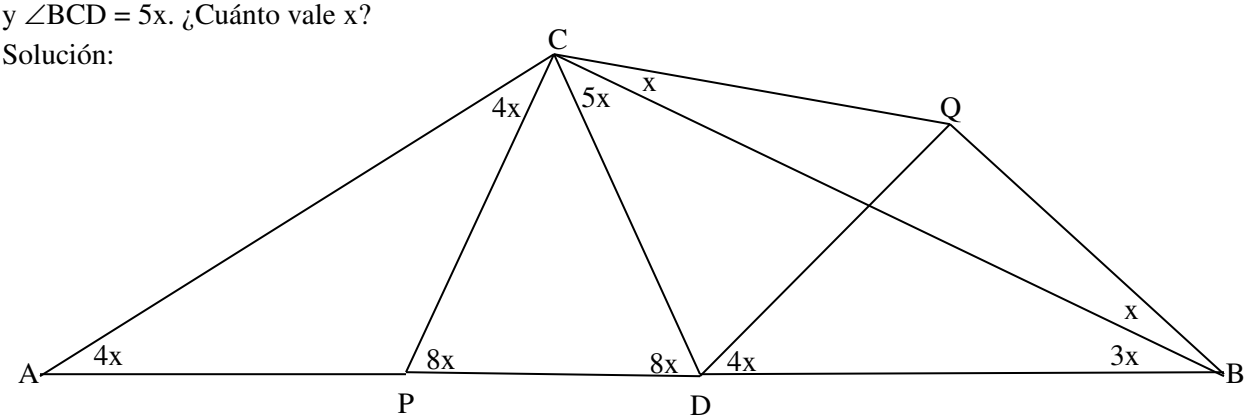




Sea el triángulo ABC como se indica en la figura con los datos dados. Entonces AP es la bisectriz del ángulo A. Además, C = 100°. Sea M la proyección ortogonal del vértice C sobre la bisectriz AP del ángulo A y sea Q el corte de BM con AC. Los triángulos ABQ y PBQ son isósceles al ser AM y PM bisectrices y alturas. Luego, ∠AQB = ∠ABQ = 70°. Así, ∠CBQ = 70° – 40° = 30°. El triángulo isósceles PBQ es equilátero por tener un ángulo de 60°. Luego, ∠CQP = 70° – 60° = 10°. Por otro lado al ser BC bisectriz en el triángulo equilátero PBQ es mediatriz de PQ y así CP = CQ. Por tanto, ∠CPQ = ∠CQP = 10°. El ángulo ACP exterior al triángulo PQC mide 10° + 10° = 20°. En consecuencia, x = ∠PCB = 100° – 20° = 80°.

Problema 2.46. En el triángulo ABC se tiene que D es un punto de AB tal que AC = DB, A = 4x, B = 3x y ∠BCD = 5x. ¿Cuánto vale x?

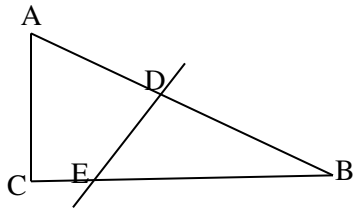
Solución:



El ángulo ADC es exterior al triángulo BCD y se tiene que ∠ADC = 5x + 3x = 8x. Sea P el punto de AB en la mediatriz de AC. Entonces el triángulo APC es isósceles y así ∠ACP = 4x y AP = CP. Como el ángulo CPD es exterior al triángulo APC y así ∠CPD = 8X. Por tanto, el triángulo CPD es isósceles y PC = CD. Sea Q el punto tal que ∠QDB = ∠QBD = 4x. Entonces el triángulo DBQ es isósceles y congruente con el triángulo PAC. Luego, QD = AP = QB. Nótese que ∠QBC = ∠QBA – ∠CBA = 4x – 3x = x. Por otro lado, el triángulo CDQ es isósceles porque CD = QD. En el punto D se ve que 12x + ∠CDQ = 180°. Además, ∠DCQ = ∠DQC y así 2∠DCQ + CDQ = 180°. Al comparar las dos últimas igualdades se obtiene que ∠QCD = 6x y ∠QCB = x. Por ende, el triángulo BQC es isósceles y se tiene que QB = QC. Por tanto, el triángulo CDQ es equilátero. En consecuencia, 60° = ∠DCQ = 6x y x = 10°.

Problema 2.47. Sea ABC un triángulo rectángulo en C tal que BC = 12 y AC = 6. Trace la mediatriz de la hipotenusa AB que corta a AB en D y a BC en E. Calcule CE.

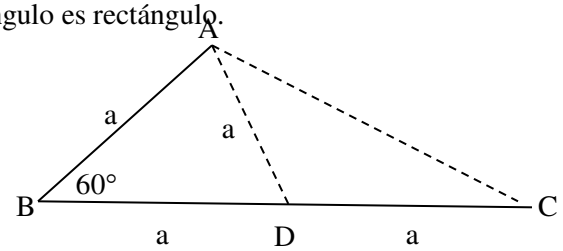
Solución:



□□□□=□□□□. Del teorema de Pitágoras se ve que $AB^2 = 12^2 + 6^2 = 180$ y se tiene que AB = 65. Luego, BD *12*AB = 35. De la proporción anterior se obtiene que 3512=12− CE65 y al despejar CE se ve que CE = 4,5.

Problema 2.48. Si en un triángulo un ángulo mide 60° y los lados que lo forman son uno el doble del otro, entonces dicho triángulo es rectángulo.

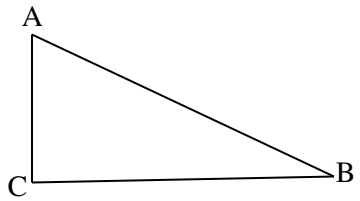
Solución:



Supóngase que B = 60°, BC = 2a y AB = a en el triángulo ABC. Si D es el punto medio del lado BC, entonces BD = DC = a. Luego, el triángulo isósceles ABD es equilátero porque tiene un ángulo de 60° y se ve que AD a. Esto indica que el punto medio D del lado BC equidista de los tres vértices lo que muestra que el triángulo ABC es rectángulo en A.

Problema 2.49. El área y la hipotenusa de un triángulo rectángulo miden 8 cada uno. ¿Cuál es su perímetro?

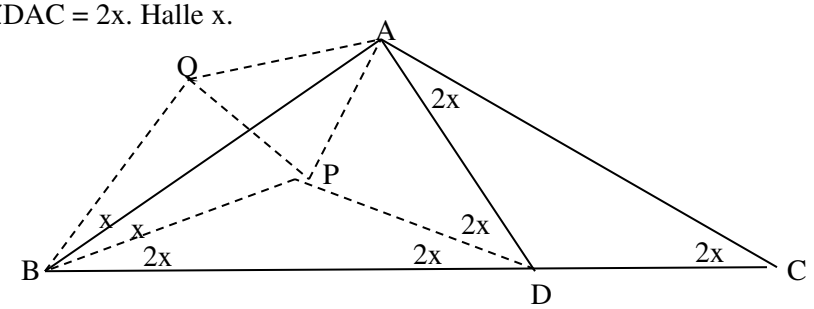
Solución:



En el triángulo ABC rectángulo en C se tiene que a·b = 16 y c = 8. Luego, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 96=46$. Por tanto, el perímetro es a + b + c = 46 + 8 .

Problema 2.50. En el triángulo ABC se tiene que B = 3x y sea D un punto del lado BC tal que BD = AC, AD = DC y ∠DAC = 2x. Halle x.

Solución:



Por hipótesis el triángulo ADC es isósceles de base AC y se ve que ∠DCA = ∠DAC = 2x. Al ser el ángulo ADB exterior al triángulo ADC se tiene que ∠ADB = 2x + 2x = 4x. Trace por B la recta que forme con el lado BA el ángulo x hasta cortar en P a la bisectriz del ángulo ADB. Así, los triángulos ADC y BPD son congruentes y se tiene que BP = PD = AD = DC. Sea Q el simétrico del punto P respecto del lado BA. Entonces ∠QBA = x, BQ = BP y BA es mediatriz de PQ. Luego, AQ = AP. Por otro lado los

triángulos QBP y PDA son congruentes y se ve que PQ = AP. Por tanto, el triángulo AQP es equilátero. Además, $\angle BPQ + \angle BPD + \angle DPA + \angle APQ = 360°$, o sea, $(90° - x) + (180° - 4x) + (90° - x) + 60° + 360°$. Por consiguiente, $6x = 60$ y se concluye que $x = 10°$.

Problemas del capítulo §2.

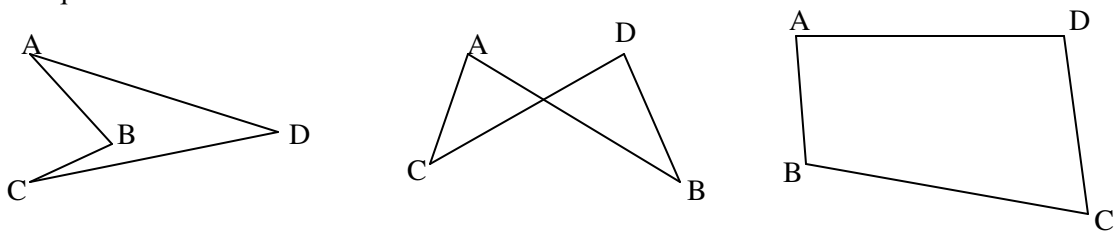
1. Sean E, F puntos de los lados AC, AB tales que AC = 3AE, EF = 5, AB = 3AF en un triángulo ABC. Halle BC.
2. El ángulo interno formado por dos bisectrices de un triángulo es obtuso.
3. El ángulo interno formado por dos bisectrices de un triángulo no puede ser rectángulo.
4. Un barco navega al Sur y recorre 6 Kms., luego va al Este y recorre 5 Kms. Y vuelve al Sur y recorre 4 Kms. ¿Qué distancia hay entre las posiciones inicial y final?
5. Un punto de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de sus catetos y divide la hipotenusa en segmentos que miden 15 y 20. ¿Cuánto miden los catetos?
6. Halle el ángulo que forman las medianas de un triángulo equilátero.
7. La bisectriz de un ángulo de un triángulo forma dos triángulos isósceles. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo?
8. ¿Cuál es la razón entre los perímetros de dos triángulos semejantes?
9. En un triángulo ABC se tiene que B = 70° y la ceviana BX está en la mediatriz del lado AC. Halle A.
10. Si ABC ~ CBA, entonces el triángulo ABC es isósceles.
11. Sean P, Q puntos en los lados BC, AB del triángulo ABC tales que BC = 5BP y BA = 5BQ. Pruebe que $\angle BQP + \angle BPQ = A + C$.
12. Las longitudes de dos lados de un triángulo escaleno son 5 y 7. ¿Es posible determinar la longitud del tercer lado?
13. Si las medianas BE, CF del triángulo ABC son perpendiculares, entonces $b^2 + c^2 = 5^{a2}$.
14. Halle la altura de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en función de sus lados.
15. Hallar los ángulos de un triángulo rectángulo si la bisectriz del ángulo recto es igual a un cateto.
16. Si CF es la altura del lado AB de un triángulo isósceles ABC de base BC, entonces $BC^2 = 2 \cdot AB \cdot BF$.
17. Si un ángulo de un triángulo es igual a la suma de los otros dos ángulos, entonces dicho triángulo es rectángulo.
18. Sean D, E, F los puntos de trisección de los lados BC, CA, AB del triángulo equilátero ABC más cercanos a los vértices B, C, A. Entonces el triángulo DEF es equilátero y sus Lados son perpendiculares a los lados del triángulo ABC.
19. ¿Por qué no se puede construir un triángulo de lados 2, 3, 5?
20. Pruebe que la bisectriz de un ángulo de un triángulo es dividida armónicamente por las proyecciones ortogonales de los otros dos vértices del triángulo.

21. La diferencia de los ángulos que una bisectriz de un ángulo de un triángulo forma con el lado opuesto es igual a la diferencia de los ángulos adyacentes a ese lado.
22. Una paralela a un lado de un triángulo que pasa por el baricentro divide al área del triángulo en dos partes en la razón 4 a 5.
23. Si dos puntos equidistan del baricentro de un triángulo, pruebe que las sumas de los cuadrados de sus distancias a los vértices son iguales, y recíprocamente.
24. Pruebe que las proyecciones ortogonales de dos vértices de un triángulo sobre la bisectriz del tercer ángulo, y el punto medio del lado que une los dos primeros vértices, forman un triángulo isósceles cuyos lados iguales son paralelos a los lados del triángulo que incluye a la bisectriz mencionada.
25. Si la recta que pasa por los pies de dos bisectrices de un triángulo es paralela al tercer lado, pruebe que el triángulo es isósceles.
26. Pruebe que la suma de los recíprocos de las bisectrices de un triángulo es mayor que la suma de los recíprocos de los lados del triángulo.
27. En un triángulo ABC se cumple la relación $OI^2 = R(R - 2r)$ llamada **relación de Euler**
28. En un triángulo ABC se cumple la relación $[ABC]^2 = rr_ar_br_c$.
    1r=1ra+1rb+1rc.
30. En un triángulo ABC se cumplen las relaciones
    (A) $OI_a^2 = R(R + 2r_a)$, $OI_b^2 = R(R + 2r_b)$, $OI_c^2 = R(R + 2r_c)$
    (B) $II_a^2 = 4R(r_a - r)$, $II_b^2 = 4R(r_b - r)$, $II_c^2 = 4R(r_c - r)$
    (C) $I_aI_b^2 = 4R(r_a + r_b)$, $I_aI_c^2 = 4R(r_a + r_c)$, $I_bI_c^2 = 4R(r_b + r_c)$
    (D) $OI^2 + OI_a^2 + OI_b^2 + OI_c^2 = 12R^2$
    (E) $II_a^2 + II_b^2 + II_c^2 = 8R(2R - r)$
    (F) $I_aI_b^2 + I_bI_c^2 + I_aI_c^2 = 8R(4R + r)$
31. Si el inradio de un triángulo es igual a la mitad de su circunradio, entonces dicho triángulo es equilátero.
32. En un triángulo una mediana menor corresponde al mayor de dos lados.
33. Si dos medianas de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es isósceles.
34. Si dos medianas de un triángulo son proporcionales a los lados que ellas llegan, entonces el triángulo es isósceles.
35. Las distancias de un punto sobre una mediana de un triángulo a los lados que la incluyen son inversamente proporcionales a esos lados.
36. Se traza una recta m que pasa por el baricentro de un triángulo. La suma de las distancias de esa recta a dos vértices que están del mismo lado de m es igual a la distancia de m al tercer vértice.
37. Un triángulo y su triángulo medial tienen el mismo baricentro.
38. El pie de la proyección ortogonal de un vértice de un triángulo sobre la bisectriz que parte de otro vértice está en un lado del triángulo medial.
39. La suma de los recíprocos de los exradios de un triángulo es igual a la suma de los recíprocos de sus alturas.
40. Sean P, Q dos puntos de los lados AC, AB del triángulo ABC. Sean M, N los puntos medios de BP, CQ. Entonces 4[AMN] = [BCPQ]
41. Si M, N son los puntos de los lados AC, AB del triángulo ABC y las rectas BM, CN se cortan sobre l altura AD, entonces AD es la bisectriz del ángulo MDN.

42. Dos rectas paralelas AE, BD trazadas por los vértices A, b del triángulo ABC cortan una recta que pasA por el vértice C en los puntos E, D. Si la paralela por E a BC corta AB en F, demuestre que DF es paralela a AC.
43. En un triángulo ABC se tiene que A = 20° y C = 80°. Si D es un punto del lado AC tal que AD = BC, ¿cuánto mide el ángulo DBA = x?
44. Sea B = 90° en el triángulo ABC y sea D un punto de BC tal que AD = 1. Si CD = DE = 1 donde E es el pie de la altura AE, ¿cuánto mide BE?
45. En un triángulo ABC el ángulo C es agudo si $c^2 < a^2 + b^2$ y es obtuso si $c^2 > a^2 + b^2$.
46. Tres rectas paralelas trazadas por los vértices del triángulo ABC cortan los respectivos lados opuestos en los puntos X, Y, Z. Entonces [XYZ] = 2[ABC].
47. Supóngase que A = 96° en el triángulo ABC y sea D un punto en la prolongación del lado BC. Las bisectrices de los ángulos ABC y ACD se cortan en A_1; las bisectrices de los ángulos A_1BC y A_1CD se cortan en A_2, y así sucesivamente. Las bisectrices de los ángulos A_4BC y A_4CD se cortan en A_5. Halle el tamaño del ángulo A_5.
48. Sean BP, CQ dos cevianas interiores del triángulo ABC que se cortan en el punto U. Entonces U no puede ser el punto medio de ambas cevianas.
49. En el triángulo ABC se tiene que AD es mediana, B = 3x, C = x y ∠ADB = 45°. ¿Cuánto mide x?
50. En el triángulo ABC se tiene que B = 2x, C = 3x, D es un punto entre B y C tal que DC = AB y ∠BAD = x. ¿Cuánto mide x?
51. En el triángulo ABC rectángulo en B se toma un punto D en BC tal que CD = 2BD y ∠BAD = C = x. Halle x.
52. En el triángulo ABC se tiene que C = 60° y la bisectriz CD es tal que CB = CA + AD, Halle B.
53. Sea ABC un triángulo rectángulo en B, sea BD la altura de la hipotenusa, sean E, F las proyecciones ortogonales de D sobre AB, AC y sean a, b, x los inradios de los triángulos ADE, ab

Capítulo 3. Los cuadriláteros.

Se han estudiado las rectas, los ángulos y sus medidas. También se han estudiado las figuras llamadas **triángulos** formadas por tres puntos no colineales. Vamos a estudiar figuras que tengan más de tres vértices aunque no todas ellas.



En las tres figuras anteriores se han colocado 4 puntos y se han unido mediante segmentos que se pretende llamar lados aunque no estaremos interesados en figuras como las dos primeras. En la primera de esas figuras la recta que contiene al lado AB cortará a otro lado en un punto interior. En la segunda figura los lados AB y CD se cortan en puntos interiores a esos lados. Solamente nos interesarán cuadriláteros como el indicado en la tercera figura.

Definición 3.1.

(A) La figura formada por los cuatro puntos A, B, C, D se llama **cuadrilátero** ABCD si esos puntos están en posición general y las rectas AB, BC, CD, DA no contienen puntos interiores de los segmentos restantes. Los puntos A, B, C, D se llaman **vértices** y los segmentos AB, BC, CD, DA se llaman **lados** del cuadrilátero.

(B) Dos vértices de un cuadrilátero se dicen **consecutivos** son extremos del mismo lado. Dos lados se dicen **consecutivos** si tienen un vértice en común. Dos lados se dicen **opuestos** si no son consecutivos.

(C) Un **ángulo** de un cuadrilátero es el ángulo formado por dos lados consecutivos. Dos ángulos se dicen consecutivos si tienen un lado en común. Dos ángulos se dicen **opuestos** si no son consecutivos. Un ángulo se dice **exterior** a un cuadrilátero si es adyacente a uno de sus ángulos.

(D) El segmento que une dos vértices de un cuadrilátero se llama **diagonal**.

(E) La suma de las longitudes de los lados de un cuadrilátero se llama su **perímetro**, y la mitad de ese número se llama **semiperímetro**.

(F) Un cuadrilátero se llama **paralelogramo** si cada dos lados opuestos son paralelos.

(G) Un cuadrilátero se dice **equiangular** si tiene sus cuatro ángulos iguales.

(H) Un cuadrilátero se dice **equilátero** si tiene sus cuatro lados iguales.

(I) Un cuadrilátero se llama **rectángulo** si es equiangular.

(J) Un cuadrilátero se llama **rombo** si es equilátero.

(K) Un cuadrilátero se llama **cuadrado** si es equiangular y equilátero.

(L) Un cuadrilátero se llama **trapecio** si tiene exactamente dos lados opuestos paralelos. Los lados paralelos se llaman las **bases** del trapecio, y la distancia entre ellos se llama su **altura**. .El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se llama **base media**.

(M) Un trapecio se dice **isósceles** si los lados no paralelos son iguales.

(N) Un cuadrilátero se dice **ortodiagonal** si sus diagonales son perpendiculares.

Teorema 3.1.

(A) La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°.

(B) Un cuadrilátero es un rectángulo si y sólo si cada uno de sus ángulos es recto.

Demostración:

(A) Al trazar una diagonal se forman dos triángulos. Entonces la suma de los ángulos del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos de ambos triángulos, es decir, 180° + 180° = 360°.

(B) Por las definiciones 3.1.7 y 3.1.9, y de (A) se deduce que cada ángulo del triángulo mide $\frac{360°}{4}$ = 90°.

Problema 3.1.

(A) Tres ángulos de un cuadrilátero miden 87°, 130° y 100°. ¿Cuánto mide el cuarto ángulo?

(B) Halle los ángulos del triángulo que miden x, x + 1, x + 2 y x + 3.

(C) Pruebe que la suma de dos ángulos exteriores a un cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos no adyacentes del cuadrilátero.

(D) Considérese el cuadrilátero ABCD si AB = CD = AD, D = 90°, ∠BAC = x y ∠BCA = 45° – x. ¿Cuánto mide x?

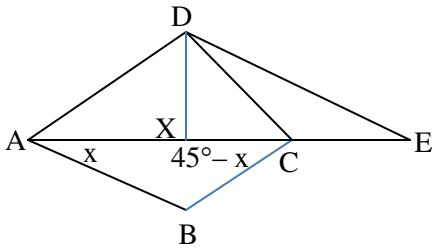
Solución:

(A) Se ve que si x es el cuarto ángulo, entonces x + 87° + 130° + 100° = 360° debido a la información dada y el teorema 3.1.1. Luego, x = 360° – 87° – 130° – 100° = 43°.

(B) Del teorema 3.1.1 se ve que x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 360°. Luego, 4x = 354° y x = 88,5°.

(C) Si x, y son ángulos exteriores del cuadrilátero ABCD, entonces x = 180° – A, y = 180° – B. Por tanto, x + y = (180° – A) + (180° – B) = 360° – (A + B) = (A + B + C + D) – (A + B) = C + D.

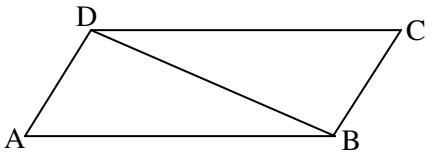
(D)



El triángulo ACD es rectángulo en D e isósceles de base AC. Al trazar la altura DX se ve que X es el punto medio de AC. Además, ∠DAC = ∠DCA = 45°. Por otro lado, en el triángulo ABC se tiene que x + (45° – x) + ∠ABC = 180°. Luego, ∠ABC = 135°. Prolónguese AC hasta el punto E tal que CE = BC. Del primer criterio de semejanza e ve que ABC ~ DCE y se tiene que ∠CAB = x = ∠CDE, ∠ACB = 45° – x y $\frac{AB}{DC} = \frac{AC}{DE}$. Por tanto, AC = DE. El triángulo DXE es rectángulo en X y el cateto DX, opuesto al ángulo E, es la mitad de la hipotenusa AC = DE. Por consiguiente, 45° – x = 30° y se obtiene que x = 15°.

Teorema 3.2. Una diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.

Demostración:



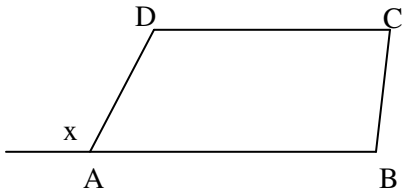
Sea BD una diagonal del paralelogramo ABCD. Entonces ∠CDB = ∠DBA por ser ángulos alternos internos entre las paralelas AB y CD cortadas por la transversal BD. Por otro lado, ∠CBD = ∠BDA por ser ángulos alternos internos entre las paralelas AD y BC cortadas por la transversal BD. Del segundo criterio de semejanza se deduce que ABD ~ CDB. Por tanto, $\frac{AB}{CD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BD}{BD} = 1$. Esto muestra que ambos triángulos son congruentes.

Teorema 3.3. Un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si:

(A) Cada dos ángulos opuestos son iguales.
(B) Cada dos ángulos consecutivos son suplementarios.
(C) Cada dos lados opuestos son iguales.
(D) Las diagonales se bisecan.
(E) Dos lados son iguales y paralelos.

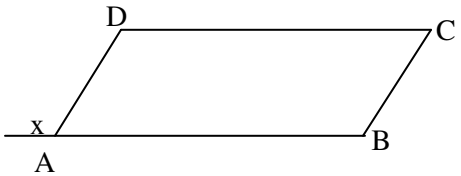
Demostración:

(A) Sea ABCD un paralelogramo. Del teorema 3.2, al trazar la diagonal BD, se ve que ABD ≅ CDB y se deduce que A = C. Del mismo teorema 3.2 al trazar la diagonal AC se ve que ABC ≅ CDA y se deduce que B = D. Recíprocamente, sea ABCD un cuadrilátero tal que A = C y B = D.



Del teorema 3.1 se ve que A + B + C + D = 360°. Como A = C y B = D se tiene que 2C + 2D = 360°, y al dividir por 2 se ve que C + D = 180°. Si x es ángulo exterior al cuadrilátero en A se ve que x + A = 180°. Ya que A = C se ve que x + C = 180°. Al comparar con la igualdad anterior se obtiene que x = D. Por tanto, las rectas AB y CD son paralelas al tener los ángulos iguales x y D alternos internos. Al ser B = D se ve que x = B. Por tanto, AD y BC son paralelas por ser x y B ángulos iguales correspondientes. Por consiguiente, ABCD es un paralelogramo.\

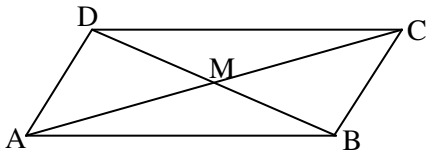
(B) Sea ABCD un paralelogramo.



D = x por ser ángulos alternos internos entre las paralelas AB y CD cortadas por la transversal AD. A + x = 180° por ser x ángulo exterior en A. Luego, A + D = 180°. Recíprocamente, sea ABCD un cuadrilátero tal que A + B = B + C = C + D = D + A = 180°. Si x es un ángulo exterior en A, entonces x + A = 180° y usando la hipótesis A + B = 180° se obtiene que x = B. Por tanto, AD y BC son paralelas por tener ángulos correspondientes iguales. Usando x + A = 180° y la hipótesis A + D = 180° se ve que x = D. Luego, las rectas AB y CD son paralelas con los ángulos alternos iguales x y D. Por tanto, ABCD es un paralelogramo.

(C) Sea ABCD un paralelogramo. Del teorema 3.2, al trazar la diagonal BD, se ve que ABD ≅ CDB y se deduce que AB = CD. Del mismo teorema 3.2 al trazar la diagonal AC se ve que ABC ≅ CDA y se deduce que BC = DA y se ve que los lados opuestos son iguales. Recíprocamente, sea ABCD un cuadrilátero tal que AB = CD y AD = BC. Del teorema 3.2, al trazar la diagonal BD, se ve que ABD ≅ CDB y se deduce que A = C. Del mismo teorema 3.2 al trazar la diagonal AC se ve que ABC ≅ CDA y se deduce que B = D. Del teorema 3.3.(A) se ve que ABCD es un paralelogramo.

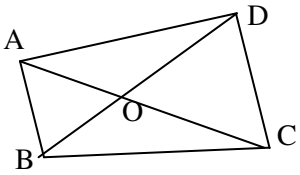
(D)



Sea ABCD un paralelogramo con las diagonales AC y DB que es cortan en el punto M. Los ángulos CDM y DBA son iguales por ser ángulos alternos internos entre las paralelas AB y CD cortadas por la transversal BD. Los ángulos DMC y AMB son iguales por ser opuestos por el vértice. Del segundo criterio de semejanza se tiene que DMC ~ BMA y como AB = DC se sigue que DMC ≅ BMA. Por ende, DM = MB y M es el punto medio de BD. De manera análoga se ve que M es el punto medio de la diagonal AC. Recíprocamente, supóngase que ABCD es un cuadrilátero tal que el corte M de las diagonales AC y BD es el punto medio de cada una de ellas. Ya que DM = MB, AM = MC y ∠AMB = ∠CMD por ser ángulos opuestos por el vértice se sigue del primer criterio de semejanza que AMB ~ CMD, y como DM = MB se sigue que AMB ≅ CMD. Luego, AB = CD. De manera análoga se muestra que AD = BC y aplíquese el teorema 3.3.1.

(E) Si ABCD es un paralelogramo, entonces los lados opuestos son iguales por el teorema 3.3(A) y son paralelos por la definición de paralelogramo. Recíprocamente, supóngase que ABCD es un cuadrilátero tal que AB y CD son iguales y paralelos. Se trazan AC y BD que se cortan en M. ∠CDB = ∠DBA por ser ángulos alternos internos entre las paralelas AB y CD cortadas por la transversal BD, y ∠DMC = ∠BMA por ser ángulos opuestos por el vértice. Luego, AMB ≅ CMD lo que indica que AM = MC y MB = MD. Aplíquese el teorema 3.3(D).

Problema #3.2



En un cuadrilátero

(a) Cada diagonal es menor que el semiperímetro del cuadrilátero.

(b) La suma de las diagonales es mayor que la suma de dos lados opuestos.

(c) La suma de las diagonales está entre el semiperímetro y el perímetro.

Solución:

Sea O la intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero ABCD según se indica en la figura.

(a) Aplicando la desigualdad triangular a los triángulos ABC y CAD se tiene que AC < AB + BC y AC < AD + CD. Al sumar estas desigualdades se ve que 2AC < 2s y al dividir por 2 se ve que AC < s. Si se aplica la desigualdad triangular en los triángulos ABD y BCD se obtiene que BD < AB + DA y DB < BC + CD. Al sumar estas desigualdades se ve que 2BD < 2s y al dividir por 2 se obtiene que BD < s.

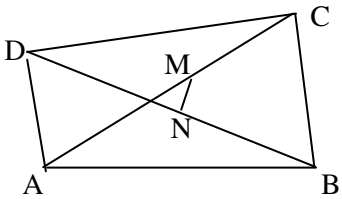
(b) Aplicando la desigualdad triangular a los triángulos AOD y BOC se ve que AD < OA + OD y BC < OB + OC. Al sumar ambas desigualdades se ve que AD + BC < OA + OD + OB + OC = (OA + OC) + (OB + OD) = AC + BD. Aplicando la desigualdad triangular a los triángulos AOB

y COD se ve que AB < OA + OB y CD < OC + OD. Al sumar ambas desigualdades se ve que AB + CD < OA + OB + OC + OD = (OA + OC) + (OB + OD) = AC + BD.

(c) De (a) se tiene que AC < s y BD < s y al sumar se ve que AC + BD < 2s . De (b) se ve que AD + BC < AC + BD y AB + CD < AC + BD. Al sumar se tiene que 2s < 2(AC + BD), o sea, s < AC + BD. Se ha demostrado que s < AC + BD < 2s.

Problema #3.3. La suma de los cuadrados de los lados de un cuadrilátero es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más cuatro veces el cuadrado del segmento que une los puntos medios de sus diagonales.

Solución:



Sean M y N los puntos medios de las diagonales AC y BD de un cuadrilátero ABCD. Ya que AN y CN son medianas en los triángulos ABD y BCD se sigue del teorema 2.29(A) que

$$AN^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \quad (1)$$

$$CN^2 = \frac{BC^2 + CD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \quad (2)$$

El segmento MN es mediana del triángulo AMC y del mismo teorema 2.29(A) se obtiene que

$MN^2 = \dfrac{AN^2 + CN^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4}$ y al multiplicar por 2 se ve que

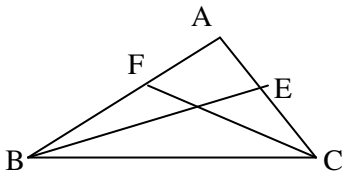
$$2MN^2 = AN^2 + CN^2 - \frac{AC^2}{2} \quad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) resulta $2MN^2 = \dfrac{AB^2 + AD^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4} + \dfrac{BC^2 + CD^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4} - \dfrac{AC^2}{2}$. Al multiplicar por 2 se obtiene $4MN^2 = AB^2 + AD^2 - BD^2 + BC^2 + CD^2 - AC^2$, es decir.

$$AC^2 + BD^2 + 4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

Problema #3.4.. Si E y F son puntos interiores de los lados AC y AB de un triángulo ABC, entonces los segmentos BE y CF no se bisecan.

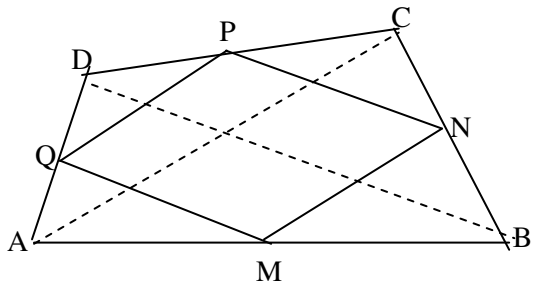
Solución:



Si BE y CF se bisecan, entonces por el teorema 3.3(D) se ve que BCEF es un paralelogramo lo cual es absurdo porque los lados opuestos BF y CE se cortan en A.

Problema #3.5. Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

Solución:



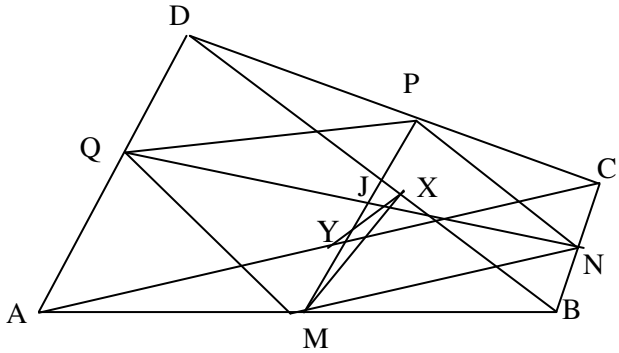
Sean M, N, P y Q los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA DA del cuadrilátero ABCD. Del teorema 2.9(E) se deduce que las rectas MQ y NP son paralelas a BD, y las rectas MN y PQ son paralelas a AC. Por la transitividad del paralelismo se ve que los pares de lados MQ, NP y PQ, MN son paralelos. Por la definición 3.1.6 el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Definición 3.2. El paralelogramo formado por los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se llama **paralelogramo de Varignon** de ese cuadrilátero.

El problema anterior fue conocido por el matemático francés **Pierre Varignon** (1654−1722) y publicado en 1731.

Problema #3.6. El perímetro del paralelogramo de Varignon de un cuadrilátero es igual a la suma de las diagonales de ese cuadrilátero.
Solución:
Sea MNPQ el cuadrilátero de Varignon del cuadrilátero ABCD. Del teorema 2.4(A) se deduce que MN = PQ = $\frac{1}{2}BD$ y MQ = NP = $\frac{1}{2}AC$. Por tanto, MN + NP + PQ + QM = $\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}AC=$ AC + BD.

Problema #3.7 Los segmentos que unen los puntos medios de los pares de lados opuestos de un cuadrilátero y el segmento que une los puntos medios de las diagonales son concurrentes y se bisecan.
Solución:



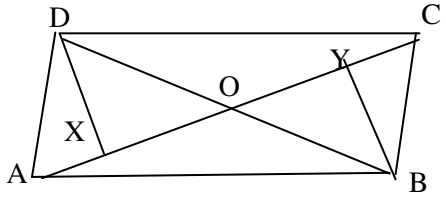
Sean M, N, P, Q los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA de un cuadrilátero ABCD. Sean X,Y los puntos medios de las diagonales AC y BD. Los segmentos MP y NQ son las diagonales del paralelogramo de Varignon del cuadrilátero ABCD y por el teorema3.3(D) dichas diagonales se bisecan en J. Por otro lado, de los teorema 6.5.3 y 8.8 se tiene que los segmentos MX y PY son paralelos a AD y valen su mitad. Por tanto, MX y PY son iguales y paralelos. Por el teorema 3.3(E) el cuadrilátero MXPY

es un paralelogramo. Luego, sus diagonales XY y PM se bisecan en J. Se ha demostrado que MP, NQ y XY pasan por J y se bisecan allí.

Definición 6.3. El punto J dado en el teorema anterior se llama el **baricentro** del cuadrilátero.

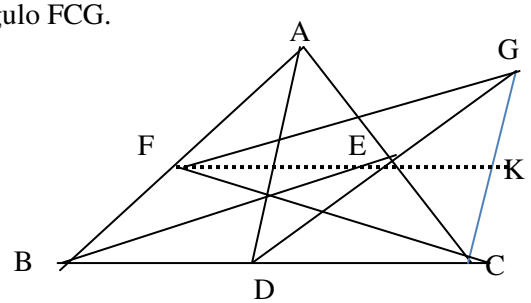
Problema #3.8. Las diagonales AC y BD de un paralelogramo ABCD se cortan en el punto O. Supóngase que AO = x + 20, BD = 12 – 2x y OC = 2 – x. Halle AC, OB, OD, AO y OC.
Solución:
Como OA = OC se sigue que x + 20 = 2 – x y así x = –9. Luego, OA = 11, BD = 30 y OC = 11. Luego, AC = 2OA = 2 x 11 = 22, OB = OD = $\frac{1}{2}$BD = 15.

Problema #3.9. Dos vértices opuestos de un paralelogramo equidistan de la diagonal que pasa por los otros dos vértices.
Solución:



Sean X e Y las proyecciones ortogonales de los vértices B y D sobre la diagonal AC del paralelogramo ABCD. Por el teorema 3.3(D) las diagonales AC y BD se bisecan en O y así OA = OC. Además, ∠DOX = ∠YOB por ser ángulos opuestos por el vértice. Del segundo criterio de semejanza se tiene que DOX ~ BOY y se ve que $1 = \frac{OD}{OB} = \frac{DX}{BY}$. Por ende, DX = BY.

Problema #3.10. Sean AD, BE, CF las medianas de los lados BC, AC, AB en un triángulo ABC. Trace el segmento FG paralelo e igual a la mediana BE. Entonces los lados del triángulo FCG son iguales a las medianas del triángulo ABC. Si K es la intersección de las rectas FE y CG, entonces FK = $\frac{3}{4}$BC y FK es mediana del triángulo FCG.
Solución:



Ya que D y E son los puntos medios de los lados BC y AC se sigue que la recta DE que contiene a G es paralela al lado AC. Como las rectas FG y BE son paralelas por hipótesis se tiene que FBEG es un paralelogramo. Por tanto, FB y EG son iguales y paralelos. Ya que DE es también paralela e igual a BF se concluye que D, E, G son colineales y E es el punto medio de DG. Además, AB = 2FB = 2DE = DG y, AB y, DG son paralelas. Como GD y AC se bisecan en E, resulta que ADCG es un paralelogramo por el

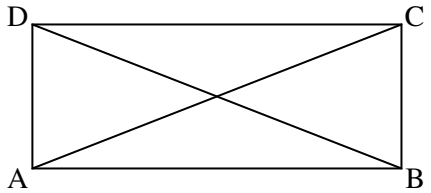
teorema 3.3(D). Así, AD = CG. Al ser FE paralela a BC se sigue que EK es paralela a DC. En el triángulo GDC vemos que EK = $\frac{1}{2}DC$. Luego, FK = FE + EK = $\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}DC=$ $DC+\frac{1}{2}DC=$ $\frac{3}{2}DC=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}BC\right)=\frac{3}{4}BC$. Por último, K es el punto medio de CG y FK es mediana del triángulo FCG.

Teorema 3.4.

(A) Todo rectángulo es un paralelogramo.
(B) Todo rombo es un paralelogramo.
(C) Todo cuadrado es un paralelogramo.
(D) Las diagonales de un rectángulo son iguales.
(E) En un rombo las diagonales son perpendiculares y son bisectrices de sus ángulos.
(F) En un cuadrado las diagonales son perpendiculares entre sí, iguales y bisectrices de sus ángulos.
(G) La paralela a las bases de un trapecio trazada por el punto medio de un lado no paralelo corta al lado opuesto en su punto medio.
(H) La base media de un trapecio es paralela a las bases e igual a la semisuma de las mismas.

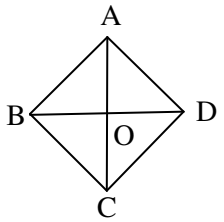
Demostración:

(A) Si ABCD es un rectángulo, entonces sus ángulos miden A = C = 90 y B = D = 90. Del teorema 3.3(A) resulta que ABCD es un paralelogramo.
(B) Si ABCD es un rombo, entonces AB = BC = CD = DA y debido al teorema 3.3(C) se tiene que es un paralelogramo.
(C) Basta ver que un cuadrado es un rectángulo.
(D)



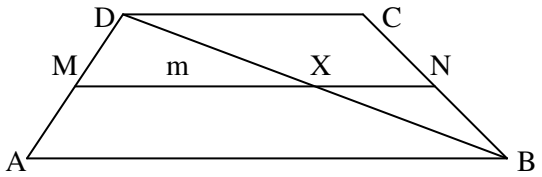
Sea ABCD un rectángulo. Entonces AB = CD y B = D = 90º. Por el primer criterio de semejanza tiene que ABC ~ DCB y así $\frac{AC}{BD}=\frac{BC}{BC}=1$. Por tanto, AC = BD.

(E)



Si ABCD es un rombo, entonces es un paralelogramo por el Teorema 3.4(B). Del teorema 3.3(D) se sigue que las diagonales AC y BD se bisecan en O. Como B y D equidistan de A y C resulta que la recta BD es mediatriz de AC. Luego, AC y BD son perpendiculares. Al ser OD y OB alturas en los triángulos isósceles ABC y ACD son también bisectrices.

(F) Todo cuadrado es un rombo y del teorema anterior se ve que sus diagonales son perpendiculares entre sí y son bisectrices de sus ángulos. Ya que el cuadrado es un rectángulo se sigue del teorema 3.4(D) que sus diagonales son iguales.



(G) Sea ABCD un trapecio de bases AB y CD. Sea m la recta paralela a las bases que pasa por el punto medio M del lado AD. Aplicando e1 teorema 2.11(B) en el triángulo ABD se ve que m corta la diagonal BD en su punto medio X. Usando el mismo teorema en el triángulo BCD se ve que m corta al lado BC en su punto medio N.

(H) Sea MN la base media de trapecio ABCD que corta la diagonal BD en su punto medio. Del teorema 2.9(E) se ve que MX y XN son paralelas a AB. Además, MX = $\frac{AB}{2}$ y NX = $\frac{CD}{2}$. Por tanto, MN y B son paralelas y MN = $\frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(AB + BP) = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Problema 3.11. En un cuadrilátero ortodiagonal ABCD las diagonales se cortan en O. Entonces

(A) $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$

(B) Su paralelogramo de Varignon es un rectángulo.

(C) Los segmentos que unen los puntos medios de dos lados opuestos son iguales.

Solución:

(A) Por el teorema de Pitágoras se tiene que $AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = BC^2 + DA^2$

(B) Los lados del paralelogramo de Varignon son paralelas a las diagonales las cuales son perpendiculares.

(C) Las diagonales en un rectángulo son iguales.

Problema #3.12 Dado un rectángulo ABCD con AB = 3 y AD = 4, halle AC.

Solución:

Como BAD es un triángulo rectángulo en A al aplicar el teorema de Pitágoras se ve que $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Por tanto, BD = 5 y del teorema anterior se tiene que AC = BD = 5.

Problema #3.13. . Un rectángulo tiene diagonal 15. El ancho del rectángulo es la mitad de su largo. Halle el perímetro del triángulo.

Solución:

Si x es el ancho del rectángulo, entonces por las condiciones del problemas se ve que su largo es 2x. Así, el perímetro es p = 2x + 2(2x) = 6x. El teorema de Pitágoras aplicado a uno de los triángulos rectángulos se tiene que $x^2 + (2x)^2 = 15^2$. O sea, $5x^2 = 225$ y se tendrá que $x^2 = 45$. Por tanto, $x = 3\sqrt{5}$. En consecuencia el perímetro es $p = 18\sqrt{5}$.

Problema #3.14. Si el perímetro de un rectángulo es p y su diagonal es d, halle la diferencia entre el largo y el ancho del rectángulo.

Solución:

Sean d = BD, x = AB, y = AD en la figura anterior. El perímetro es 2x + 2y = p y al dividir por 2

$$x + y = \frac{p}{2} \text{ ..... (a)}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABD se tiene que

$$x^2 + y^2 = d^2 \text{ ..... (b)}$$

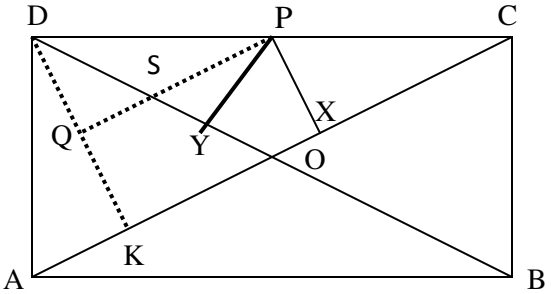
Al elevar la igualdad (a) al cuadrado se obtiene que $x^2 + y^2 + 2xy = \frac{p^2}{4}$ y usando (b) se tiene que

$d^2 + 2xy = \frac{p^2}{4}$ y vemos que $2xy = \frac{p^2}{4} - d^2$. Por tanto, $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy =$

$d^2 - \left[\frac{p^2}{4} - d^2\right] = 2d^2 - \frac{p^2}{4}$ y al extraer raíces cuadradas se tiene que $x - y = \frac{1}{2}\sqrt{8d^2 - p^2}$.

Problema #3.15. La suma de las distancias, de un punto cualquiera de un lado de un rectángulo, a las diagonales es constante.

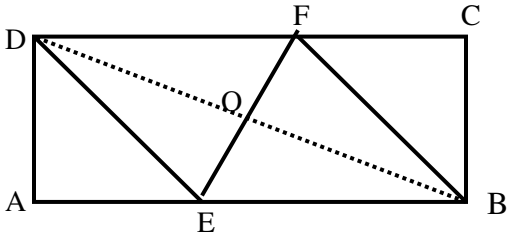
Solución:



Sea P un punto del lado CD de un rectángulo ABCD y sean X e Y las proyecciones de P sobre las diagonales AC y BD. Sea K la proyección de D sobre AC y sea Q la proyección de P sobre BD. En el cuadrilátero PQKX tres de los ángulos son rectos. Luego, dicho cuadrilátero es un rectángulo. Por ende, PX = QK y PQ es paralelo a AC. Los ángulos DPQ y DCA son iguales por ser ángulos correspondientes entre las paralelas PQ y AC cortadas por CD. Además, se tiene que OD = OC. Por tanto, $\angle CDO = \angle DCO = \angle DPQ$. Así, DS = PS donde S es el corte de PQ y BD. Por otro lado, $\angle DSQ = \angle PSY$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Por el segundo criterio de semejanza se tiene que DQS ~ PYS son congruentes. Luego, $1 = \frac{DS}{PS} = \frac{DQ}{PY}$ y se tiene que PY = DQ. Así, PY + PX = DQ + QK = DK y esta cantidad es constante por ser la distancia del vértice A a la diagonal AC.

Problema #3.16. Sean E y F puntos de los lados AB, CD de un rectángulo ABCD tales que DEBF es un rombo. Halle EF si AB = a y BC = b.

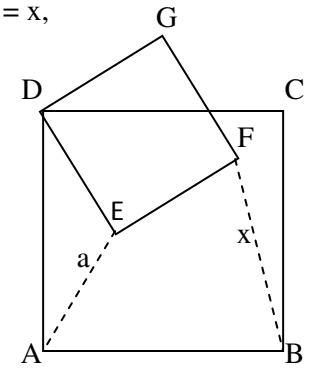
Solución:



Sean DF = FB = BE = ED = x. Luego, FC = CD – DF = AB – DF = a – x. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo BCF, rectángulo en C, se tiene que $BF^2 = FC^2 + BC^2$. Esto quiere decir que $(x - a)^2 + b^2 = x^2$, o sea, $2ax = a^2 + b^2$ y se tiene que $x = \frac{a^2 + b^2}{2a}$. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo BCD se ve

que BD = $\sqrt{a^2+b^2}$. Por el teorema 6.14 las diagonales BD y EF del rombo DEBF son perpendiculares y se bisecan en O. De lo anterior se tiene que OB = $\frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo OEB se obtiene que $OB^2 = OE^2 + EB^2$, o sea, $\frac{a^2+b^2}{4} = OE^2 + x^2 = OE^2 + \frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2}$. Por ende, $OE^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2} - \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4}\left[\frac{a^2+b^2}{a^2}-1\right] = \frac{a^2+b^2}{4}\frac{b^2}{a^2}$. Al extraer raíces cuadradas se ve que OE = $\frac{b}{2a}\sqrt{a^2+b^2}$ y así EF = 2OE = $\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}$.

Problema #3.17. En la figura ABCD y DEFG son dos cuadrados. Si AE = a y BF = x, pruebe que x = $a\sqrt{2}$



Solución:

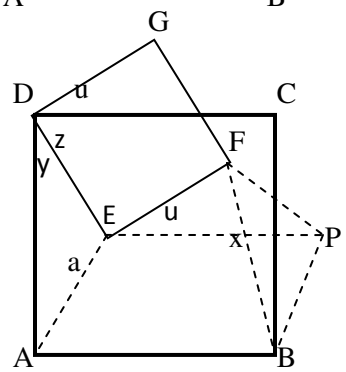
Sea P un punto tal que ABPE es un paralelogramo. Luego,

(1) EP = AB = AD y BP = EA = a.

∠GDC = ∠FEP = u por ser ángulos entre lados paralelos. Sea ∠ADE = y y ∠CDE = z. Pero, u + z = 90º = y + z y al simplificar se tiene que u = y.

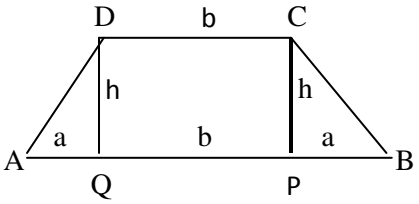
Usando (1) se tiene que FEP ~ EDA y así 1= $\frac{FE}{DE} = \frac{FP}{EA}$. O sea, FP = EA = a.

Además, ∠DAE = ∠EPF = u y se ve que 90º = u + ∠EAB = u + ∠EPB. Esto indica que el triángulo BPF es rectángulo en P. Aplicando el teorema de Pitágoras se ve que $x^2 = BF^2 = FP^2 + PB^2 = a^2 + a^2 = 2^{a2}$. Al extraer raíces cuadradas se obtiene que x = $a\sqrt{2}$.



Teorema 3.5. En un trapecio isósceles los ángulos de las bases son iguales y las diagonales son iguales.

Demostración:

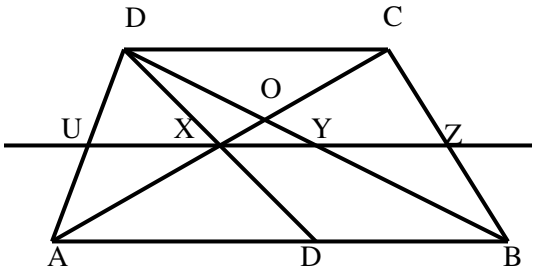


Sea ABCD un trapecio isósceles de bases AB y CD con AB > CD. Sean P y Q las proyecciones de C y D sobre AB. Entonces CP = DQ = h por ser la distancia entre las paralelas y AD = BC por ser un trapecio isósceles. Las anteriores igualdades dicen que los triángulos rectángulos ADQ y BCP tienen iguales la hipotenusa y un cateto. Por el teorema de Pitágoras se tendrá que AQ = BP. Del tercer criterio de semejanza se ve que AQD ~ BPC. Así, ∠DAQ = ∠CBP lo que indica que los ángulos de la base AB son

iguales. Así mismo se tiene que $\angle ADQ = \angle BCP$ y al sumarle 90º se ve que C = D. Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo APC se tiene que $AC^2 = AP^2 + PC^2 = QB^2 + AQ^2 + BD^2$. Luego, AC = BD.

Problema #3.18. Si la base mayor de un trapecio isósceles es igual a una diagonal y la base menor es igual a la altura, halle la razón entre las bases menor y mayor.
Solución:
Vea la figura del ejemplo anterior. De la hipótesis se tiene que AQ = BP = a y CD = PQ = b = PC = DQ. Luego, AB = AQ + QB = 2a + b. Del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo BDQ se tiene que $BD^2 = QD^2 + BQ^2$, es decir, $(2a + b)^2 = b^2 + (a + b)^2$. Efectuando las operaciones y simplificaciones se obtiene que $b^2 - 2ab - 3a^2 = 0$. Resolviendo la ecuación cuadrática en la incógnita b se obtiene que $b = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 12a^2}}{2} = 3a$ donde sólo hay una solución positiva. Por ende, la razón buscada es $\frac{CD}{AB} = \frac{b}{2a+b} = \frac{3a}{2a+3b} = \frac{3}{5}$.

Problema #3.19. Las diagonales AC, BD de un trapecio ABCD se cortan en un punto O. Sea M el punto medio de la base AB y sea X la intersección de AC, DM. Trace por X la paralela a AB hasta cortar AD, DB y BC en U, Y y Z. Entonces UX = XY = YZ.
Solución:



En los triángulos semejantes DUX y DAM se tiene que

$$\frac{UX}{AM} = \frac{DX}{DM} \text{ ..... (a)}$$

En los triángulos semejantes DXY y DMB se tiene que

$$\frac{DX}{DM} = \frac{XY}{MB} \text{ ..... (b)}$$

De (a) y (b) se sigue que $\frac{UX}{AM} = \frac{XY}{MB}$. Como AM = MB se obtiene que UX = XY. En los triángulos semejantes CXZ y CAB se tiene que

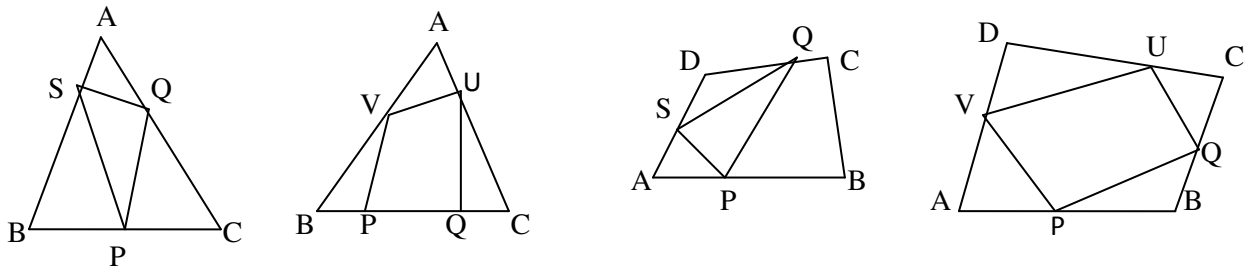
$$\frac{XZ}{AB} = \frac{CZ}{CB} \text{ ..... (c)}$$

Por el teorema de Thales se tiene que

$$\frac{CZ}{CB} = \frac{DX}{DM} \text{ ..... (d)}$$

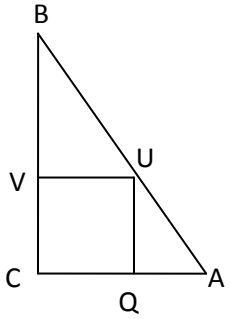
De (c), (d), (b) se obtiene que $\frac{XZ}{AB} = \frac{XY}{MB}$. Ya que AB = 2MB se tendrá que XZ = 2XY y, en consecuencia, XY = YZ.

Definición 3.5. Sean K y L triángulos o cuadriláteros o una mezcla de ellos. Diremos que la figura K **está inscrita** en la figura L si los vértices de K están en los lados de L. También se dice que la figura L **está circunscrita** a la figura K.



En la primera de las figuras anteriores el triángulo PQS está inscrito en el triángulo ABC. En la segunda figura el cuadrilátero PQUV está inscrito en el triángulo ABC. En la tercera figura el triángulo PQS está inscrito en el cuadrilátero ABCD. En la última figura el cuadrilátero PQUV está inscrito en el cuadrilátero ABCD.

Problema #3.20. En la figura anexa el cuadrilátero CQUV está inscrito en el triángulo ABC que es rectángulo en C. Si AC = 6 y BC = 12 Halle el valor del lado x del cuadrado.



Solución:

Se ve que AQU ~ ACB por tener sus lados paralelos. Luego, $\frac{AQ}{AC} = \frac{QU}{BC}$,

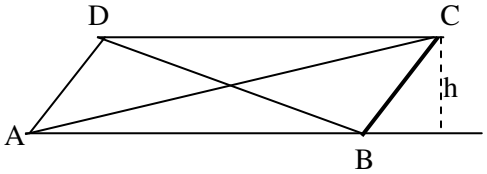
es decir, $\frac{6-x}{6} = \frac{x}{12}$. Al despejar x se obtiene que x = 4.

El área de un cuadrilátero cualquiera, es decir, la e**xtensión** de dicho cuadrilátero se puede obtener sumando las áreas de los triángulos determinados en él por cualquier diagonal. No conocemos una fórmula simple para determinar el área de un cuadrilátero arbitrario.

Teorema 3.6.

(A) El área de un cuadrilátero es igual a un lado por su altura, es decir, la distancia entre ese lado y el lado opuesto.

(B) El área de un cuadrado de lado a es a^2.



Demostración:

(A) Sea BCD un paralelogramo. Sea h la distancia de C a la recta AB. Entonces [ABCD] = [ABD] + [BCD] =

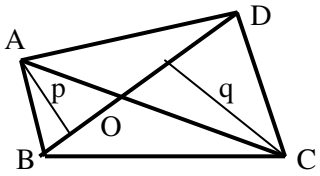
$\frac{1}{2} \bullet AB \bullet h + \frac{1}{2} \bullet CD \bullet h$. Como AB = CD se obtendrá que [ABCD] = AB•h.

(C) El lado a es igual a su altura a. De (A) se sigue que el área es •a = a^2.

Nótese que si un lado de un triángulo coincide con un lado de un paralelogramo, entonces el área del triángulos es la mitad del área del paralelogramo. En la figura anterior 2[ABD] = 2[BCD] = [ABCD].

Problema #3.21. Si se construye un cuadrado en un lado de un rombo, entonces su área no es menor que la del rombo.
Solución:
Sea ABCD un cuadrado construido sobre un lado AB = a del rombo ABPQ. El área del cuadrado es [ABCD] = a^2 y el área del rombo es la suma de las áreas de los triángulos ABQ y BPQ, es decir, [ABPQ] = a^2• sen A. Ya que sen A ≤ 1 se sigue que [ABPQ] ≤ [ABCD].

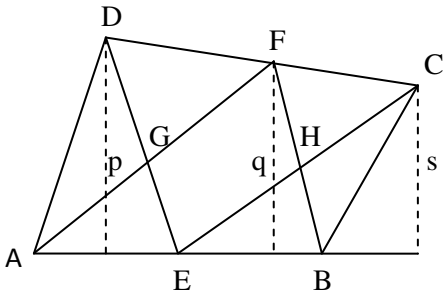
Problema #3.22. Las diagonales AC y BD del cuadrilátero ABCD se cortan en el punto O. Entonces se tiene que [ABO]• [CDO] = [ADO]•[BCO]
Solución:
Sean p y q las distancias de los vértices A y C a la diagonal BD.



Entonces [ABO]•[CDO] = $\frac{1}{2} \bullet BO \bullet p \bullet \frac{1}{2} \bullet OD \bullet q$ =

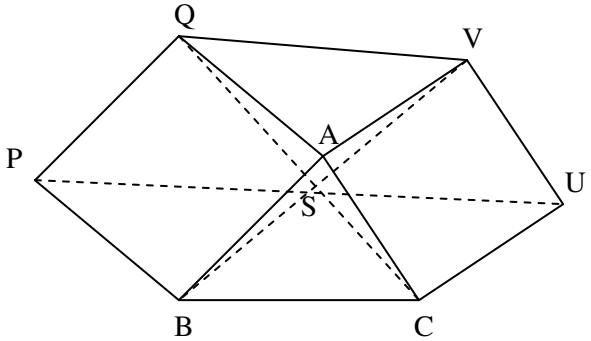
$\frac{1}{2} \bullet DO \bullet p \bullet \frac{1}{2} \bullet OB \bullet q$ = [ADO]•[BCO].

Problema 3.23. Sean E y F los puntos medios de los lados AB y Cd de un cuadrilátero ABCD. Pruebe que si AF y DE se cortan en G, y CE y BF se cortan en H, entonces [FGEH] = [AGD] + [BHC].
Solución:



Trace las distancias p, q y s de los puntos D, F y C a la recta AB. Se forma un trapecio de bases p y s, y de base media q. Del teorema 3.4(H) se tiene que 2q = p + s. Al multiplicar esta igualdad por AB = 2AE = 2BE se tiene que 2q•AB = p•2AE = s•2BE y simplificar por 2 se tiene que q•AB = p•AE = s•BE. Luego, [ABF] = [AED] + [EBC]. O sea, [AGE] + [FGEH] + [EBH] = [AGE] + [AGD] + [EBH] + [BHC]. Al simplificar de nuevo se obtiene el resultado deseado.

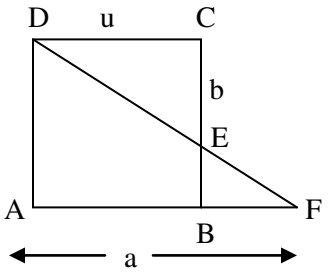
Problema #3.24.



Se trazan los cuadrados ACUV y ABPQ sobre los lados AC y AB del triángulo ABC. Pruebe que [AVQ] = [ABC], QC = BV y las rectas BV y QC son perpendiculares.
Solución:
La suma de los ángulos alrededor de el vértice A es 360º. Ya que ∠QAB = 90º = ∠VAC se tiene que ∠QAV + ∠BAC = 180º. Así sen ∠QAV = sen ∠BAC. Del teorema 7.1 se ve que [AVQ] = $\frac{1}{2} \bullet QA \bullet AV \bullet \text{sen } A = \frac{1}{2} \bullet AB \bullet AC \bullet \text{sen } A$ = [ABC]. Nótese que AQ = AB, AC = AV y ∠QAC = 90º + A = ∠BAV. Del primer criterio de semejanza se tiene que BAV ~ QAC. Así, ∠AQC = ∠ABV = x, ∠ACQ = ∠AVB = z y $1 = \frac{BA}{QA} = \frac{BV}{QC}$. De esta proporción se tiene que BV = QC. En el triángulo QAC se tiene que x + z + 90º + A = 180º y se obtiene que x + z + A = 90º. Por último del ejemplo 6.27 se ve que ∠BSC = x + y + A = 90º.

Problema #3.25. Sean ABCD un cuadrado, E un punto del lado BC, F el corte de BE con la prolongación del lado AB, CE = b, AF = a y DE = x. Pruebe que (1) $x^2 = ab + b^2$ y (2) $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2}$.

Solución:



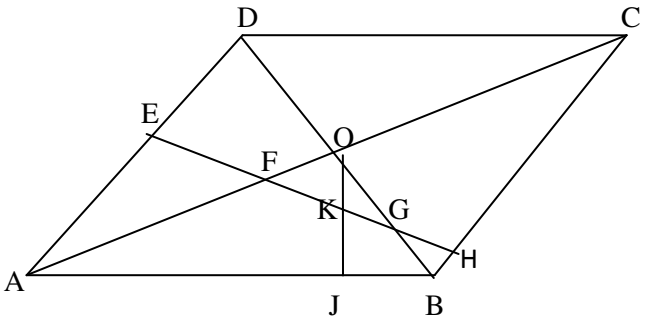
Sea u el lado del cuadrado. Se tiene que AFD ~ BFE por tener sus lados paralelos. Así, $\frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BE}$, es decir, $\frac{a}{a-u} = \frac{u}{u-b}$. Al simplificar se obtiene $u^2 = ab$. Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo DCE se tiene que $x^2 = u^2 + b^2$ y usando la igualdad anterior se ve que $x^2 = ab + b^2$. Del teorema de Pitágoras en el triángulo DAF se sabe que $DF^2 = u^2 + a^2$.

Luego, $\frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{u^2 + a^2} = \frac{1}{ab + b^2} + \frac{1}{ab + a^2} =$

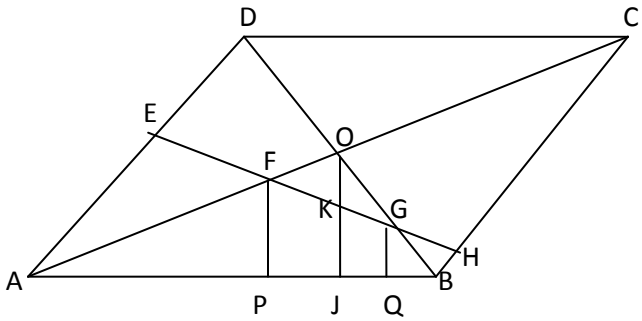
$$= \frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{a(a+b)} = \frac{a}{ab(a+b)} + \frac{b}{ab(a+b)} = \frac{a+b}{ab(a+b)} = \frac{1}{ab} = \frac{1}{u^2} = \frac{1}{CD^2}.$$

Problema #3.26. Desde un punto cualquiera E del lado AD del rombo ABCD se traza la perpendicular a BC hasta cortar a AC, BD y BC en los puntos F, G y H. Sea O el corte de la diagonales AC y BD y sea J la proyección de O sobre AB hasta cortar a EH en el punto K. Si KJ = a, GH = b y EF = c, pruebe que

$$a = \frac{b+c}{2}$$



Solución:
Trace las proyecciones P y Q de F y G sobre AB. Como EH es perpendicular a BC y BC es paralela a AD se tiene que EH es perpendicular a AD. Ya que F está en la bisectriz AC del ángulo A del rombo se tiene que



AP = FE = c (A)

Como G está en la bisectriz BD del ángulo B del rombo se tiene que

GQ = GH =b (B)

∠KOG = ∠JOB es igual al ángulo QGB por ser ángulos correspondientes entre las paralelas OJ y GQ cortadas por la transversal BD. Además, ÓGK = ∠HGB por ser ángulos opuestos por el vértice. Pero, ∠HGB = ∠QGB y así ∠OGK = ∠QGB. El triángulo OKG es isósceles y se tiene que

OK = KG (C)

De manera análoga se muestra que

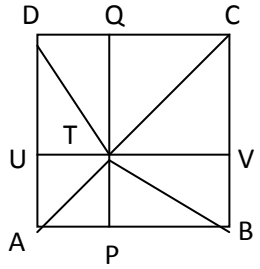
OK = KF (D)

El triángulo FOG es rectángulo y K equidista de sus vértices. Luego, K es el punto medio de FG. Por ende, J que es la proyección de K será el punto medio de PQ cuyos extremos son las proyecciones de F y G. Entonces FPQG es un trapecio y KJ es su base media. Por tanto, a = $\frac{b+c}{2}$.

Problema #3.27. Sea T un punto interior a un cuadrado ABCD tal que S = [ABCD],

Pruebe que [ATD] + [BTC] = [CTD] + [ATB] = $\frac{S}{2}$

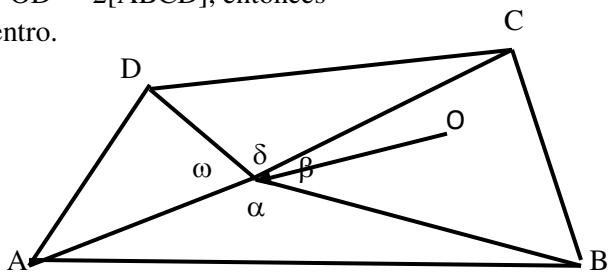
Solución:



Trace por T las paralelas a los lados AB y AD hasta cortar en U, V y P, Q. Así,2 [ATD] + 2 [BTC] = [APQD]+ [PBCQ] = [ABCD] = S. Bastará dividir por 2. Análogamente, 2[CTD] + 2[ÀTB] = [UVCD] + [ABVU]. Bastará dividir por 2.

Problema #3.28. Si O es un punto en el interior de un cuadrilátero ABCD tal que $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2[ABCD]$, entonces ABCD es un cuadrado y O es su centro.

Solución:



Se ve que $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2[ABCD] = 2[AOB] + 2[BOC] + 2[COD] + 2[AOD] =$ OA•OB•.sen α + OB•.OC•sen β + OC•OD•sen δ + OA•OD•sen ω. Ya que $0 \leq \text{sen } x \leq 1$, para todo x, se tiene que

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \leq OA\bullet OB + OB\bullet OC + OC\bullet OD + OA\bullet OD$$

Al multiplicar por 2 en la desigualdad anterior resulta que

$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \leq 2\bullet OA\bullet OB + 2\bullet OB\bullet OC + 2\bullet OC\bullet OD + 2\bullet OA\bullet .OD$. Luego,

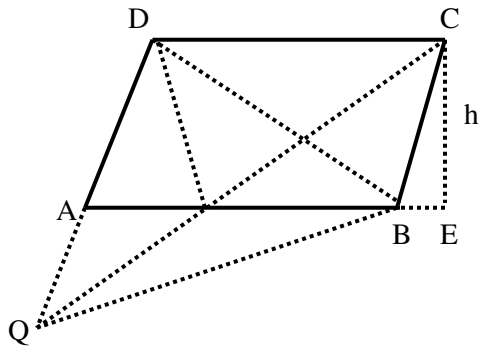
$(OA^2 - 2\bullet OA\bullet OB + OB^2) + (OA^2 - 2\bullet .OA\bullet OD + OD^2) + (OB^2 - 2\bullet OB\bullet OC + OC^2) +$

$(OC^2 - 2\bullet OC\bullet OD + OD^2) \leq 0$

es decir, $(OA - OB)^2 + (OA - OD)^2 + (OB - OC)^2 + (OC - OD)^2 \leq 0$. Como el primer miembro es un número no negativo se tendrá que $(OA - OB)^2 + (OA - OD)^2 + (OB - OC)^2 + (OC - OD)^2 = 0$. Por ende, cada uno de los sumandos es cero y vemos que $OA = OB = OC = OD$. Al sustituir en la primera de las igualdades de arriba se ve que $4\bullet OA^2 = OA^2$ (sen α + sen β + sen δ + sen ω) y así vemos que sen α + sen β + sen δ + sen $\omega = 4$. Ya que el máximo valor de cada sumando es uno se tendrá que sen α = sen β = sen δ = sen $\omega = 1$ y vemos que $\alpha = \beta = \delta = \omega = 90º$. Los triángulos AOB, BOC, COD, AOD son rectángulos e isósceles. Por ende, los ángulos del cuadrilátero en A, B, C, D son rectos y ABCD es un cuadrado, y O es el corte de las diagonales.

Problema #3.29. Sea P un punto cualquiera en el lado AB de un paralelogramo ABCD. La recta CP cortará la prolongación del lado DA en el punto Q. Muestre que los triángulos APD y QBP son equivalentes.

Solución:



Por un lado se tiene que $2[APD] + 2[PBC] = AP\bullet h + PB\bullet h = (AP + PB)\bullet h = AB\bullet h = [ABCD]$. Por otro lado se ve que $2[QPB] + 2[PBC] = 2[QBC] = 2[CBD] = [ABCD]$. De ambos resultados se concluye que $2[APD] + 2[PBC] = 2[QPB] + 2[PBC]$ y sl simplificar en ambos miembros se tiene que $[APD] = [QPB]$.

Ejercicios #3.

1. Halle el perímetro del triángulo que se forma al prolongar los lados no paralelos de un trapecio conociendo sus cuatro lados.
2. Por el vértice C del paralelogramo ABCD se traza una recta que divide la diagonal BD en dos partes de modo que una de ellas sea cuatro veces la otra. Entonces esa recta divide al lado AD en dos partes donde una de ellas es el triple de la otra.
3. En un cuadrilátero ABCD una paralela a la diagonal BD corta a AB en E y a AD en F; otra paralela a BD corta a BC en G y a CD en H. Entonces las rectas EG, FH, AC son concurrentes.
4. En todo cuadrilátero la recta que pasa por los puntos medios de las diagonales determinan sobre dos lados opuestos segmentos proporcionales.
5. Sea F un punto de la prolongación del lado AD del paralelogramo ABCD. La recta FC corta a AB en el punto E. Entonces $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=1$.
6. En todo triángulo la paralela trazada por el incentro a uno de sus lados determina sobre los otros dos lados un segmento que es igual a la suma de los segmentos comprendidos entre las paralelas.
7. En un paralelogramo dos lados consecutivos son inversamente proporcionales a sus respectivas alturas.
8. Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
9. Las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son perpendiculares.
10. La suma de las diagonales de un trapecio es menor que su perímetro y mayor que su semiperímetro.
11. Si una diagonal de un paralelogramo es bisectriz de un ángulo, entonces dicho el paralelogramo es un rombo.
12. La base media de un trapecio pasa por los puntos medios de las diagonales, y el segmento por ellas determinado es igual a la semidiferencia de as bases.
13. Los puntos medios de los lados de un cuadrado son los vértices de un cuadrado.
14. Los puntos medios de los lados de un trapecio isósceles son los vértices de un rombo.
15. Dos rectas trazadas por el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo cortan sus lados en puntos que son vértices de otro paralelogramo.
16. Si de los vértices de un paralelogramo se trazan perpendiculares a una recta cualquiera, fuera de él, la suma de los segmentos trazados desde dos vértices opuestos es igual a la suma de los segmentos trazados desde los otros dos vértices.
17. Las rectas que pasan por un vértice de un paralelogramo y los puntos medios de los lados opuestos trisecan una de las diagonales.
18. Sea M la intersección de las diagonales de un cuadrado construido sobre la hipotenusa BC de un triángulo rectángulo dado ABC. La perpendicular a AM por M corta a AB y AC en L y N. Entonces BL = AC y CN = AB.
19. Si ABCD es un cuadrilátero con AB = CD y C > B, entonces DB > AC y A > D.
20. Sean A, B, C tres puntos colineales en ese orden. Sean ABDE y ACFG dos cuadrados de lados AB y AC construidos del mismo lado. La recta que pasa por A y es perpendicular a GB biseca al segmento EC.
21. La suma de las distancias de los vértices de un triángulo a cualquier recta es igual a la suma de las distancias de los puntos medios de los lados del triángulo a la recta.
22. Si un triángulo y un cuadrilátero se trazan sobre la misma base y el cuadrilátero está completamente dentro del triángulo, entonces el perímetro del triángulo es mayor que el perímetro del cuadrilátero.
23. Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Sobre AB y BC se construyen dos cuadrados ABDE y BCGH fuera del triángulo. Sean L y K las proyecciones ortogonales de E y G sobre la recta AC, entonces AC = EL+GK.

24. (a) Las bisectrices de los ángulos de cualquier cuadrilátero determinan otro cuadrilátero en el que los ángulos opuestos son suplementarios.
    (b) Si el primer cuadrilátero es un paralelogramo, el segundo es un rectángulo donde sus diagonales son paralelas a los lados del paralelogramo e iguales a la diferencia de sus lados adyacentes.
    (c) Si el primer cuadrilátero es un rectángulo, el segundo es un cuadrado.
25. Un punto C está en un segmento AB de modo que AC = 2BC: Tres paralelas se trazan por A, B, C y cortan una recta dada m en los puntos L, M, N de modo que estos puntos están todos del mismo lado de m. Entonces AL + 2BM = 3CN.
26. La distancia del baricentro de un triángulo a una recta dada es igual a la media aritmética de las distancias de sus vértices a la recta.
27. (a) En el paralelogramo MALO con las diagonales ML y AO se tiene que MO = 2x + 10, OL = x^2 + 6 y ED = 30 – 3x. ¿Cuánto mide el cuarto lado?
    (b) Si en el (a) se tiene que A = 3x y L = x + 40 halle todos sus ángulos.
28. Sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC se construyen los cuadrados ABDE y BCJK fuera del triángulo. Entonces CD y AK son perpendiculares.
29. Si los pares de lados opuestos de un cuadrilátero se prolongan hasta cortarse en dos puntos, entonces las bisectrices de los ángulos en esos puntos forman un ángulo que es igual a la semisuma de dos ángulos opuestos en el cuadrilátero.
30. Si M es la intersección de las rectas que unen los puntos medios de los pares de lados opuestos AB, CD y BC, AD de un cuadrilátero ABCD, entonces la suma de las distancias de A, B, C, D a una recta m es igual a cuatro veces la distancia de M a m.
31. Se construye un paralelogramo BCA`D` en un lado BC de un paralelogramo ABCD de modo que AB y BD` sean lados contiguos. Se construye un tercer paralelogramo ABD`C`. Entonces AA`, BB`, CC` son concurrentes.
32. La intersección de las diagonales del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de sus catetos.
33. Sea ABCD un paralelogramo con AB = 2BC. El lado BC se prolonga en ambos lados hasta E y F de modo que BE = BC = CF. Entonces AF es perpendicular a DE.
34. Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, entonces dicho cuadrilátero es un rombo.
35. (a) Un triángulo equilátero tiene tres ejes de simetría
    (b) ¿Cuántos tiene un cuadrado? ¿y un rectángulo?
36. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Del pie H de la altura AH se trazan perpendiculares HE y HD sobre AB y AC. Entonces
    (a) DE = AH
    (b) Si M es el punto medio de BC, entonces AM es perpendicular a DE.
    (c) Si N es el punto medio de AB y BX es paralela a DE, entonces MN y BX se cortan sobre AH.
    (d) AM y HD se cortan sobre BX.
37. Si dos ángulos opuestos de un cuadrilátero son rectos, entonces las bisectrices de los otros dos ángulos son paralelas.
38. En un cuadrilátero ABCD se tiene que AB = AD, BC = CD y al prolongar los lados opuestos se cortan en M y N. Entonces MN es paralela a BD.
39. En un cuadrilátero la suma de las diagonales es mayor que la suma de dos lados opuestos.

40. En un paralelogramo ABCD se prolonga AB hasta E con BE = BC, y se prolonga AD hasta F con DF = DC. Entonces ∠DEF = ∠BCE y los puntos F, C, E son colineales.
41. En un paralelogramo la recta que pasa por los puntos medios de dos lados opuestos se divide en dos partes iguales por el punto de intersección de las diagonales.
42. Sobre los lados de un ángulo de vértice O se toman los segmentos OA y OB de modo que OA + OB es constante, y se construye un paralelogramo OBAC. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto C?
43. Halle el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos rectas dadas que se corten es constante.
44. Halle el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos rectas dadas que se corten es constante.
45. Se tiene un paralelogramo ABCD con CD = 2AD. Se unen A y B con el punto medio M del lado CD. Entonces el ángulo AMB es recto.
46. Se prolongan los lados AB, BC, CD, DA de un cuadrado ABCD hasta los puntos M, N, P, Q de modo que AB = BM, BC = CP, CD = DN, DA = AQ. Entonces MN = PQ.
47. Si M es un punto del lado AD de un cuadrado ABCD y N es un punto del lado CD de modo que AM = DN, entonces AN y MN son perpendiculares.
48. Sobre los catetos BA y AC de un triángulo rectángulo ABC se construyen los cuadrados ABDE y ACFG. Se trazan DK y FL perpendiculares a BC. Entonces DK + FL = BC, los puntos D, A, F son colineales y las rectas DE, FG, AH son concurrentes.
49. Sobre los lados AB, BC, CD, DA de un cuadrado ABCD se toman los puntos P, Q, S, T de modo que AP, BQ, CS, DT son un cuarto del lado del cuadrado. Entonces PQST es un cuadrado y en ambos cuadrados las diagonales se cortan en el mismo punto.
50. Sobre los lados de un cuadrado ABCD se construyen exteriormente cuatro triángulos equiláte-ros AEB, BFC, CGD y DHA. Entonces EFGH es un cuadrado.
51. Si dos paralelas son cortadas por una secante, entonces las bisectrices de los ángulos interiores forman un rectángulo.
52. En un rombo ABCD se trazan BM perpendicular a AD y DN perpendicular a BC. Entonces BMDN es un rectángulo.
53. De los vértices B y D de un rombo ABCD se trazan perpendiculares BM, BN, DP, DQ a los lados opuestos, y se cortan en E y F. Entonces BFDE es un rombo y ambos rombos tienen iguales sus ángulos.
54. Los puntos medios de los lados de un trapecio isósceles son los vértices de un rombo.
55. Por el punto medio M del lado AB de un triángulo ABC se traza una recta cualquiera que corta a AC en N. Se prolonga NM en su misma longitud hata P. Entonces PB es paralela a AC.
56. Se trazan las medianas AM y BN en el triángulo AQBC. Por N se traza la paralela a BC hasta cortar en P a la paralela a BN que pasa por C. Si D es el punto medio de PN, entonces CD es paralela a MN.
57. Sea AF la bisectriz de A en el triángulo ABC. Trace por F la paralela FE a AB y por E la paralela ED a BC. Entonces AE = BD.
58 En el trapecio isósceles ABCD se trazan las diagonales AC y BD. Las bisectrices de los ángulos DAB y DBA se cortan en F, y las de los ángulos CBA y CAB en G. Entonces FG es paralela a AB.

59. Si ABCD es un trapecio donde la base menor CD es igual a la suma de los lados no paralelos AD y BC, entonces las bisectrices de A y B se cortan en CD.
60. Se prolongan los lados no paralelos de un trapecio ABCD hasta cortarse en E. Se unen los puntos medios M y N de AE y BE, y los puntos medios P y Q de las diagonales AC y BD. Entonces MNPQ es un trapecio.
61. Sean M y N los puntos medios de las bases AB y CD de un trapecio ABCD, y sean P y Q los puntos medios de las diagonales AC y BD. Entonces los ángulos M y N del cuadrilátero MNPQ son iguales al ángulo formado por los lados no paralelos de trapecio al cortarse.
62. Por los extremos A y B de la base mayor de un trapecio ABCD se trazan paralelas a BC y AD hasta cortar a CD en M y N. Entonces los ángulos en M y N son iguales a los ángulos B y A del trapecio dado.
63. Sean BE y CF dos medianas del triángulo ABC que miden 3 y 6, y son perpendiculares. Sea AD la otra mediana. Se prolonga FE hasta P en su misma longitud. Calcule AP y DP. ¿Qué tipo de triángulo es APD?
64. En un triángulo ABC las medianas AA`, BB`, CC` se cortan en G. Si D es el punto medio de AG y E es el punto medio de BG, entonces BEA`B` es un paralelogramo.
65. Sean AD, BE, CF las medianas del triángulo ABC. Por el punto D se traza un segmento paralelo e igual a BE. Entonces AD = CF.
66. Sea AB un segmento de la recta m y sea O un punto fuera de m. Trace A` y B` simétricos de A y B, respecto de O. Entonces A`B` es paralelo a AB y A`B es paralelo a AB`.
67. En un rectángulo ABCD se tiene que el ángulo O de sus diagonales es 130, BE es perpendicular a AC y BF es la bisectriz del ángulo OBE. Halle $\angle$BFC.
68. Establecer – si existen – el centro y el eje de simetrías en cada una de las siguientes figuras:
    (a) Un rectángulo. (b) Un rombo
    (c) Un cuadrado. (d) Un triángulo cualquiera.
69. En un paralelogramo el corte de las diagonales es su centro de simetría.
70. La figura simétrica de una recta, respecto de un punto, es una recta paralela a ella.
71. La figura simétrica de una recta, respecto de un eje, es una recta.
72. Sea P un punto interior de la base BC de un triángulo isósceles ABC. Las paralelas por P a los lados iguales forman un paralelogramo cuyo perímetro es igual a la suma de los lados iguales del triángulo.
73. Los segmentos que unen los puntos medios de los pares de lados opuestos de un cuadrilátero se bisecan.
74. Sea ABCD un paralelogramo con AD > AB. La bisectriz de A corta a BC en G y la bisectriz de B corta a AD en H. Entonces ABGH es un rombo.
75. Un cuadrilátero se llama un **cometa** si exactamente una diagonal es la mediatriz de la otra diagonal. Entonces un cometa tiene dos pares de lados congruentes, pero sus lados opuestos no son congruentes.
76. Si cada diagonal de un cuadrilátero biseca dos de sus ángulos, entonces el cuadrilátero es un rombo.
77. En un trapecio la bisectriz del ángulo que forman las prolongaciones de los lados no paralelos divide a las bases en segmentos proporcionales a los lados no paralelos que les son adyacentes.
78. Una recta que pasa por los puntos medios de las diagonales de cualquier cuadrilátero corta dos lados opuestos en segmentos proporcionales.

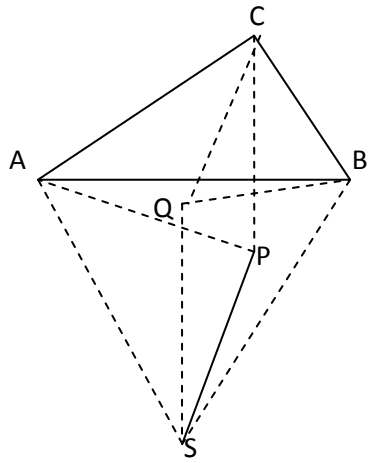
79. Sea ABCD un paralelogramo. Por el vértice C se traza una recta exterior al paralelogramo, y corta las prolongaciones de AB y AD en E y F. Entonces $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=1$.
80. En un trapecio ABCD la suma de las bases AB+CD es igual a la suma BC+DA de los lados no paralelos. Por el punto de intersección de las diagonales se traza una paralela a las bases y corta los lados AD y BC en M y N. Entonces AM+BN = AB y DM+CN = DC.
81. En un paralelogramo ABCD las distancias de un punto cualquiera de la diagonal AC a los lados AB y AD son inversamente proporcionales a esos lados.
82. Por el vértice A de un paralelogramo ABCD se traza una recta que corta las rectas BC y BD en E y F. Entonces BE.DF = AB.AD.
83. La suma de los cuadrados de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.
84. La suma de los cuadrados de las distancias de un punto M a los vèrtices opuestos A y C de un rectángulo ABCD es igual a la suma de los cuadrados de las distancias de M a los otros dos vértices B y D.
85. Las distancias de un punto cualquiera de la diagonal AC de un paralelogramo ABCD a los lados AB y AD son inversamente proporcionales a esos lados.
86. En un rectángulo ABCD se tiene que AB = $AD\sqrt{2}$. Entonces las proyecciones ortogonales de A y C sobre la diagonal BD la divide en tres partes iguales.
87. Por el vértice A de un paralelogramo ABCD se traza una transversal que corta la diagonal BD en el punto E y a los lados CB, CD en F y G. Entonces EA es la media geométrica de EF y EG.
88. Considérese un paralelogramo ABCD. Entonces la mediana CM del triángulo ABC y la mediana AN del triángulo ACD son paralelas. Halle además una condición necesaria y suiciente para que CM sea bisectriz del ángulo ACB.
89. En un cuadrilátero ABCD el ángulo que forman las bisectrices de dos ángulos consecutivos es igual a la semisuma de los otros dos ángulos. Uno de los ángulos que forman las bisectrices de dos ángulos opuestos es igual a la semidiferencia de los otros dos ángulos.
90. ¿Cómo debe ser un cuadrilátero ABCD para que su paralelogramo de Varignon sea un rectángulo? ¿y para que sea un rombo? ¿y para que sea un cuadrado?
91. Supóngase que en un triángulo ABC la mediana AM es tal que $\angle CAM = 2\angle BAM$. Prolongue AM hasta D de modo que el ángulo DBA es recto. Pruebe que D = 2AC.
92. En un cuadrado ABCD, M es el punto medio de AB. Una perpendicular a MC por M corta a AD en K. Entonces $\angle BCM = \angle KCM$.
93. En un cuadrado ABCD, CF es bisectriz del ángulo ACD y la perpendicular por B a CF corta la diagonal AC en P y al lado CD en Q. Entonces DQ = 2PE.
94. En un cuadrado ABCD se tiene que $\angle EDC = \angle ECD = 15$. Entonces el triángulo ABE es equilátero.
95. La suma de las distancias de un punto de un lado de un rectángulo a las diagonales es constante.
96. En un paralelogramo ABCD, M es el punto medio de BC y T es la proyección ortogonal de D sobre AM. Entonces CT = CD.
97. Sea m una recta cualquiera que pasa por el vértice C de un triángulo ABC y corta al lado opuesto en un punto interior. Si P y Q son las proyecciones ortogonales de A y B sobre m, entonces M equidista de P y Q.
98. En los lados AB y AD de un paralelogramo ABCD se trazan los triángulos equiláteros ABF y ADE. Entonces FCE es un triángulo equilátero.
99. Si un cuadrado se traza externamente en cada lado de un paralelogramo, entonces
    (a) los centros de esos cuadrados forman un cuadrado.
    (b) las diagonales de este último cuadrado son concurrentes con las diagonales del paralelogramo original.

100. La base mayor de un trapecio mide 97. El segmento que mide los puntos medios de sus diagonales mide 3. Halle la medida del lado menor del trapecio.
101. En el paralelogramo BACD se eligen puntos E y F en la diagonal AC de modo que AE = FC. Si BE corta a AD en H y BF corta a DC en G, entonces GH es paralela a AC.
102. Las diagonales AC y DB de un trapecio ABCD se cortan en P. Si M es el punto medio de CD, entonces supóngase que AM corta a BD en E. Trace por E la paralela a AB hasta cortar a AD, AC y BC en los puntos H, F y G. Entonces HE = EF = FG.
103. Sea E el corte de las diagonales AC y BD de un trapecio ABCD. Trace por E la paralela a AB hasta cortar a AD y BC en F y G. Entonces FG es la media armónica entre AB y CD.
104. E es un punto del lado BC de un paralelogramo ABCD. AE corta la diagonal BD en G y a CD en F. Si AG = 6 y GE = 4, halle EF.
105. Sobre los lados AB y CD de un rectángulo ABCD se eligen puntos F y E de modo que AFCE sea un rombo. Halle EF si AB = 16 y BC = 12.
106. En un cuadrilátero ABCD se tiene que AB = 9, BC = 12, CD = 13, AD = 14 y AC = 15. Halle la distancia entre las proyecciones ortogonales de B y D sobre AC.
107. Halle la base menor de un trapecio si su base mayor mide 97 y el segmento que une los puntos medios de sus diagonales mide 3.
108. Los cuatro ángulos de un cuadrilátero son de la forma x, x + 1, x + 2 y x + 3. Halle cada ángulo.
109. En un cuadrilátero no todos los ángulos pueden ser agudos.
110. En un cuadrilátero no todos los ángulos pueden ser obtusos.
111. Si en un cuadrilátero hay un ángulo obtuso, entonces debe haber otro agudo y viceversa.
112. Los ángulos de un cuadrilátero son enteros y están en progresión aritmética. ¿Cuáles son esos ángulos?
113. Los ángulos de un cuadrilátero son x + 17, 3x + 8, 2x – 5 y 3x + 12. ¿Cuáles son esos ángulos?
114. Si los ángulos de un cuadrilátero son 2x – 10, x + 40, $\frac{x}{2}+65$ y 3x – 60, entonces dicho cuadrilátero es un rectángulo.
115. ¿Es un trapecio un paralelogramo?¿Por qué?
116. ¿Pueden existir paralelogramos cuyos ángulos estén en progresión geométrica?
117. ¿Qué será el paralelogramo de Varignon si el cuadrilátero dado es un paralelogramo?¿Y si es un rectángulo?¿Y si es un cuadrado?
118. Las bisectrices de dos ángulos de un triángulo no se bisecan.
119. Dado un triángulo rectángulo y un cuadrado inscrito con un lado en la hipotenusa, el lado del cuadrado es media proporcional entre los dos segmentos restantes de la hipotenusa.
120. Sean AB = a y BC = b los lados consecutivos del paralelogramo ABCD. ¿Qué relación hay entre a y b si las proyecciones de los vértices A< B, C sobre la diagonal BD la divide en tres partes iguales.
131. Por los extremos A y C de un segmento y por su punto medio B se trazan tres paralelas en cualquier dirección quedando limitadas por otra recta DEF. Pruebe que BE es igual a la semisuma algebraica de las otras dos paralelas.
122. Conociendo los lados de un trapecio calcule las longitudes de los lados del triángulo formado prolongando los lados no paralelos.
123. Si la diagonal AC del paralelogramo ABCD es bisecada por M y se traza una recta cualquiera por M hasta cortar a AB y CD en P y Q. Trace por M la paralela a AB hasta cortar a AQ en S. Pruebe que los triángulos ASP y CSP son equivalentes.
124. Se describen cuadrados en los lados de un cuadrilátero y los vértices adyacentes de los cuadra-dos se unen para formar cuatro triángulos. pruebe que la suma de las áreas de dos de estos triángulos es igual a la suma de las áreas de los otros dos triángulos.

125. El lado AB de un paralelogramo ABCD es el doble del lado BC. Se prolonga BC hasta E en su misma dimensión y se prolonga CB hasta F en su misma dimensión. Pruebe que AF y De son perpendiculares.

126. Sea ABCD un cuadrilátero con sus diagonales AC y BD perpendiculares y que se cortan en E. Los pies de las perpendiculares a los lados AB, BC, CD y DA son M, H, G y F. Pruebe que las rectas FG y H se cortan en la recta AC.

127.. En la figura se han construido los triángulos equiláteros APC, BCP y ASB sobre los lados AC, BC y AB del triángulo ABC. Pruebe que PCQS es un paralelogramo.



Capítulo 4. La circunferencia

Definición 4.1.

(A) El conjunto formado por los puntos del plano que están a una distancia dada de un punto dado se llama **circunferencia**. El punto dado se llama **centro** y la distancia dada se llama **radio**.
(B) Varios puntos se dicen **concíclicos** si están en una misma circunferencia.
(C) El segmento que une dos puntos de una circunferencia se llama **cuerda** y la distancia de la cuerda al centro de la circunferencia se llama **apotema**. Una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia se llama **diámetro**.
(D) Dos puntos se dicen **antipodales** o **diametralmente opuestos** si son extremos de un diámetro.
(E) Un punto P dícese **interior** a la circunferencia si su distancia al centro es menor que el radio. El conjunto formado por los puntos interiores de una circunferencia se llama el **círculo.**
(F) Un punto se dice **exterior** a una circunferencia si su distancia al centro es menor que el radio. El conjunto de los puntos exteriores de una circunferencia se llama su **exterior.**
(G) Dos circunferencias se dicen **concéntricas** si tiene el mismo centro.
(H) Dos circunferencias se dicen **iguales** si tiene el mismo radio.

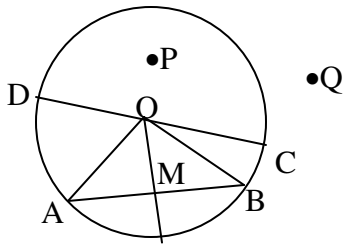
La palabra radio ha sido usada para indicar la distancia de un punto cualquiera de la circunferencia a su centro. También se usará esa palabra para referirse al segmento que une al centro con un punto de ella. Este último punto se llama **extremo exterior** de ese radio.

La palabra diámetro ha sido usada para indicar el segmento que une dos puntos antipodales. También se usará esas palabra para referirse a su tamaño.

La palabra apotema ha sido usada para designar la distancia del centro de una circunferencia a una cuerda. También se usará esa palabra para referirse al segmento que une el centro de una circunferencia con el punto medio de la cuerda.

La expresión "la circunferencia O" se refiere a la circunferencia cuyo centro es el punto O y la expresión "la circunferencia $A_1A_2\ldots A_k$" se refiere a la circunferencia que pasa por los puntos A_1, A_2 ,… y A_k con $k \geq 3$.

Problema#4.1.



En la figura se ha representado la circunferencia O de radio $k > 0$. El radio k es la distancia del centro O a cualquier punto de la circunferencia, es decir, $OA = OB = OC = OD = k$. El segmento CD es un diámetro ya que es una cuerda que contiene al centro O. El segmento AB es una cuerda porque une los puntos A y B de la circunferencia. El punto P es interior a la circunferencia porque $OP < k$ y el punto Q es exterior a la circunferencia pues $OQ > k$.

Lo importante en esto es que cualquier cuerda CD de la circunferencia O, que no es diámetro, forma un triángulo isósceles COD donde el ángulo vertical es $\angle COD$ y su base es CD. La apotema de la cuerda CD es su distancia al centro y coincide con la altura de la base CD en el triángulo COD, es decir, la apotema es OM donde M es el punto medio de CD.

De las propiedades de los triángulos isósceles se deducen los siguientes teoremas

Teorema 4.1.

(A) Todo diámetro perpendicular a una cuerda la biseca.
(B) La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia

Problema #4.2. ¿Dónde deben colocarse dos puntos en una circunferencia de manera que su distancia sea máxima?
Solución:
Evidentemente dichos puntos deben ser antipodales y se probará que, en efecto, es así. Sean A y B dos puntos distintos de una circunferencia O. De la desigualdad triangular se sigue que $AB \leq OA + OB$, es decir, $AB \leq 2k$. Por ende, la máxima distancia se encontrará cuando $AB = 2k$ y esos puntos son antipodales.

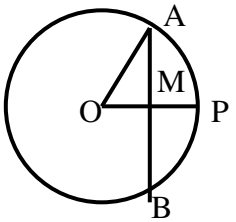
Este teorema indica que si AB es una cuerda en una circunferencia de radio k, entonces $AB \leq 2k$, y la igualdad se cumple si y sólo si AB es un diámetro.

Problema #4.3. Si $OA = 3x - 2$ y $OB = 2x + 10$ son radios de una circunferencia O, halle su diámetro.
Solución:
Como los radios son iguales se tiene que $3x - 2 = 2x + 10$. Al restar x se ve que $x - 2 = 10$ y al sumar 2 se obtiene que $x = 12$. Por tanto el diámetro es $2 \bullet OA = 2(3x - 2) = 6x - 4 = 72 - 4 = 68$.

Problema #4.4. Los extremos de dos diámetros distintos en una circunferencia O son los vértices de un paralelogramo.
Solución:

Los dos diámetros se bisecan en el centro. Use el teorema 3.3(D).

Problema #4.5. Halle la longitud de una cuerda de la circunferencia O de radio 12 si esa cuerda es mediatriz de un radio.
Solución:
Sea AB la cuerda que es la mediatriz del radio OP en la circunferencia O. Si M es el corte de AB y OP, entonces por hipótesis se tiene que M es el punto medio de OP, y del teorema 4.1(B) se ve que M es el punto medio de AB. Así, $OM = 6$ y $OA = 12$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo AOM se ve que $OA^2 = OM^2 + MA^2$, es decir, $12^2 = 6^2 + MA^2$. Luego, $MA^2 = 108$ y al extraer raíz cuadrada se obtiene que $MA = 6\sqrt{3}$. Por tanto, $AB = 2 \bullet MA = 12\sqrt{3}$.

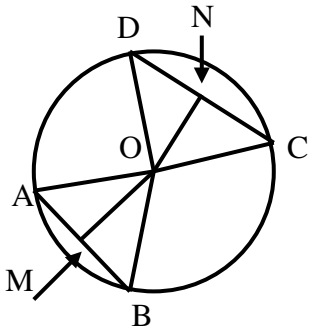


Problema #4..6. Una cuerda de 16 centímetros está a 15 centímetros del centro de la circunferencia. ¿Cuál es el radio de la circunferencia?
Solución:
En la figura anterior se toman AB = 16 y OM = 15. Luego, AM = 8. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo OMA se ve que $OA^2 = 15^2 + 8^2 = 289$. Así, OA = 17.

Teorema 4.2. En una circunferencia

(A) Dos cuerdas son iguales si y sólo su apotemas son iguales.

(B) De dos cuerdas una es mayor si y sólo si su apotema es menor.



Demostración:
Sean OM y ON los apotemas de las cuerdas AB y CD de una circunferencia O. Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos AMO y CNO se tiene que $OC^2 = CN^2 + ON^2$ y $OA^2 = AM^2 + ON^2$. Como OA = OC por ser radios de la misma circunferencia se tiene que $CN^2 + ON^2 = AM^2 + ON^2$ y así $OM^2 - ON^2 = CN^2 - AM^2$. Al factorizar ambos lados se obtiene la igualdad

$$(OM - ON)\bullet(OM + ON) = (CN - AM)\bullet(CN + AM) \qquad (*)$$

(A) De la igualdad (*) se deduce que OM = ON si y sólo si CN = AM si y sólo si 2•CN = 2•AM si y sólo si CD = AB.

(B) De la igualdad (*) se sigue que OM > ON si y sólo si CN > AM si y sólo si 2•CN > 2•AM si y sólo si CD > AB.

Problema #4.7. Halle la apotema de una cuerda AB = d en la circunferencia O de radio k.
Solución:
Si OM es la apotema de la cuerda AB se sigue del teorema de Pitágoras que $OA^2 = OM^2 + AM^2$ y así $OM^2 = OA^2 - AM^2 = OA^2 - r\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = OA^2 - \frac{AB^2}{4} = k^2 - \frac{d^2}{4}$. Luego, $OM = \sqrt{k^2 - \frac{d^2}{4}}$.

Problema #4.8. Halle el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de longitud d de la circunferencia O de radio k.
Solución:
Del ejemplo anterior se ve que la apotema es $OM = \sqrt{k^2 - \frac{d^2}{4}}$. Como la distancia del centro O a esos puntos medios es la misma el lugar geométrico está formado por los puntos de la circunferencia O de radio OM.

Teorema 4.3. Una recta corta a una circunferencia en, a lo más, dos puntos.
Demostración:
Sea m una recta que corta una circunferencia O en dos puntos distintos A y B. Si P es otro punto de m, entonces P es interior o exterior a la cuerda AB. Del ejemplo 6.32 resulta que OP < OA ú OP > OA, es decir, P es interior o exterior a la circunferencia O. Esto quiere decir que si m corta a la circunferencia O en A y B no la corta en otro punto.

Este teorema establece que toda recta tiene 0, 1 ó 2 puntos en común con cualquier circunferencia.

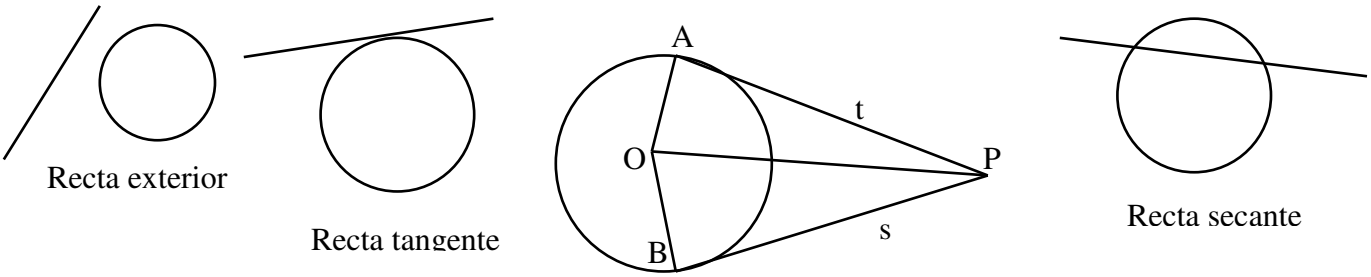
Definición 4.2.

(A) Se dice que una recta es **exterior** a una circunferencia si no tiene puntos en común.

(B) Una recta es **tangente** a una circunferencia si tiene un único punto en común. Ese punto se llama **punto de tangencia** o **de contacto.**

(C) El segmento que une el punto de tangencia y un punto cualquiera de una tangente se llama **segmento tangente** desde ese punto.

(D) Se dice que una recta es **secante** a una circunferencia si tiene dos puntos distintos en común

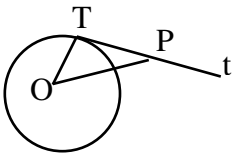


PA = s y PB = t son segmentos tangentes desde el punto P

La palabra tangente viene del vocablo latino **tangere** que significa **tocar** y fue introducida en 1583 por el matemático danés **Thomas Finke** (1561 – 1656).

Teorema 4.4. La perpendicular a un radio en su extremo exterior es tangente a la circunferencia.

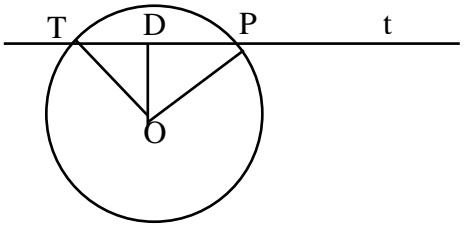
Demostración:



Sea OT un radio de una circunferencia O y sea t la perpendicular a OT que pasa por T. Si P es un punto de t, distinto de T, entonces OP es la hipotenusa del triángulo rectángulo OPT y se tiene que OP > OT. Esto dice que P es exterior a la circunferencia. Luego, t es tangente a esa circunferencia pues el único punto en común es T.

Teorema 4.5. Cualquier tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

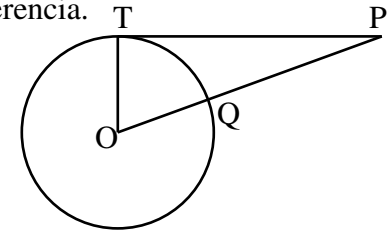
Demostración:



Sea t una tangente a la circunferencia O de radio k con punto de tangencia T. Se debe demostrar que OT es perpendicular a t. Si no es así sea D la proyección de O sobre t y sea P el simétrico de T respecto del punto D. Al ser OD altura y mediana se sigue del teorema 6.11 que OP = OT = k y , por tanto, P también está en la circunferencia O lo que contradice la hipótesis de que t es tangente a esa circunferencia. Así, OT es perpendicular a t.

Problema #4.9. Sea t una tangente a la circunferencia O de radio 5 en un punto T y sea P un punto de t tal que PT = 12. Halle OP y PQ donde Q es el corte de OP con la circunferencia.

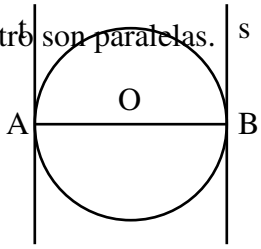
Solución:



Por el teorema anterior el triángulo OPT es rectángulo en T y del teorema de Pitágoras se ve que $OP^2 = OT^2 + TP^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$.

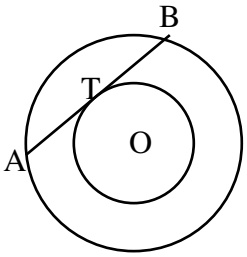
Luego, OP = 13. Además, PQ = OP – OQ = 13 – 5 = 8.

Problema # 4.10. Las tangentes a una circunferencia en los extremos de un diámetro son paralelas.



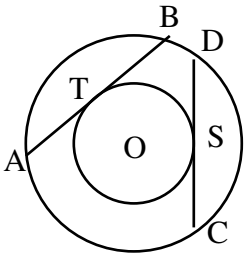
Solución:
Sean s y t las tangentes a la circunferencia O en los puntos A y B donde AB es un diámetro. Ya que AB es un diámetro se tiene que A, O y B son colineales. Por el teorema 7.6 los ángulos en A y B son rectos y, en consecuencia, las rectas s y t son paralelas.

Problema #4 .11. Dadas dos circunferencias concéntricas, toda cuerda de la circunferencia mayor que es tangente a la circunferencia menor es bisecada por su punto de tangencia.



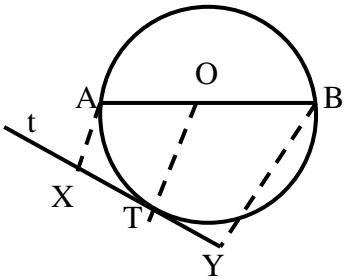
Solución:
Considérense dos circunferencias concéntricas O y sea AB una cuerda de la circunferencia mayor que es tangente en T a la circunferencia menor. Debido al teorema 7.6 el radio OT es altura de la base AB del triángulo isósceles AOB. Por tanto, OT es mediana de AB y se tendrá que T es el punto medio de AB.

Problema #4.12. Dadas dos circunferencias concéntricas, todas las cuerdas de la circunferencia mayor que son tangentes a la circunferencia menor son iguales.



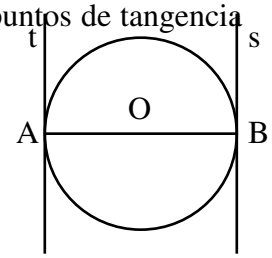
Solución:
Sean AB y CD dos cuerdas de la circunferencia mayor de dos circunferencias concéntricas de centro O, que son tangentes a la circunferencia menor en T y S. De OT = OS se deduce que las cuerdas AB y CD equidistan del centro O. Por el teorema 7.3.1 dichas cuerdas son iguales.

Problema 4.13. Sea AB un diámetro de una circunferencia O y sea t una tangente en T. Si X e Y son las proyecciones de A y B sobre t, entonces OX = OY.



Solución:
Como AX y BY son perpendiculares a t son paralelas entre sí, y se forma el trapecio AXYB. Ya que O es el punto medio de AB se sigue que OT es la base media de ese trapecio. Luego, T es el punto medio de XY y se ve que OT es mediatriz de XY. Se deduce que O equidista de X y Y.

Problema #4.14. Si dos tangentes a una circunferencia son paralelas, entonces sus puntos de tangencia son los extremos de un diámetro que es perpendicular a ambas tangentes.



Solución:
Sean s y t dos tangentes a una circunferencia O en A y B que son paralelas entre sí. Por el teorema 7.6 se sigue que OA y OB son respectivamente perpendiculares a s y t. Al ser s y t paralelas se sigue que OA y OB son perpendiculares a t. Como por O pasa una única perpendicular a t se ve que A, O y B son colineales.

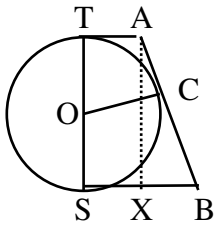
Teorema 4.6. Los segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior son iguales, y la recta que pasa por el punto exterior y el centro de la circunferencia es bisectriz del ángulo que forman las dos tangentes.
Demostración:
Vea la tercera figura de la definición 7.3. Sea t y s dos tangentes trazadas desde el mismo punto exterior P a una circunferencia O y sean A y B sus puntos de tangencia. Entonces OA y OB son perpendiculares a AP y BP formándose los triángulos AOP y BOP rectángulos en A y B, y de hipotenusa común OP. Del teorema de Pitágoras resulta que los catetos AP y BP son iguales y del tercer criterio de semejanza se tiene que ambos triángulos son semejantes. Luego, $\angle APO = \angle BPO$.

Problema #4.15. Halle las longitudes de los segmento tangentes desde un punto P a la circunferencia O de radio 5 si OP = d donde

(a) d = 13 (b) d = 5 (c) d = 2.

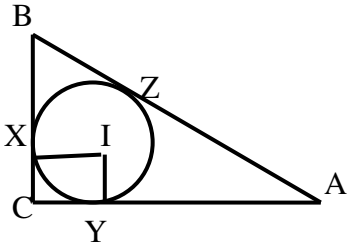
Solución:
Vea la tercera figura de la definición 7.3. Del teorema de Pitágoras se tiene que $OP^2 = OA^2 + PA^2$.

(a) $13^2 = 5^2 + PA^2$ y así $PA^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2$. Por ende, PA = 12.
(b) $5^2 = 5^2 + PA^2$ y así $PA^2 = 5^2 - 5^2 = 0$. Luego, PA = 0. Esto quiere decir que el punto P está en la circunferencia O.
(c) $2^2 = 5^2 + PA^2$ y así $PA^2 = 2^2 - 5^2 = -21$ lo cual es absurdo porque el cuadrado de un número real no puede ser negativo. Esto ocurre porque P es un punto interior a la circunferencia O de radio 5 y no pueden trazarse tangentes.

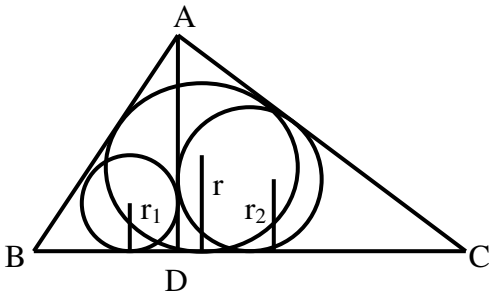


Problema #4.16. En la figura a la derecha AT = 4 y BS = 9 son tangentes a una circunferencia O en T y S que son paralelas entre sí. La recta AB es tangente a la circunferencia O en el punto C. Halle el radio de la circunferencia.
Solución:
Del ejemplo 7.11 se ve que TS es un diámetro perpendicular a AT y BS.
Del teorema 7.2 se tiene que AC = AT = 4 y BC = BS = 9. Luego, AB = AC + CB.= AT + BS = 4 + 9 = 13. Así, XB = BS − SX = SB − TA = 9–4 = 5. Si X es la proyección de A sobre SB, entonces del teorema de Pitágoras en el triángulo AXB se ve que $AB^2 = AX^2 + BX^2$, o sea, $13^2 = TS^2 + 5^2$. Luego, $TS^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2$ y se tendrá que el radio es OS = 6.

Teorema 4.7. El indiámetro de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los catetos menos la hipotenusa.
Solución:
Sean X, Y y Z los puntos de tangencia del incírculo I con los lados BC, AC y AB del triángulo ABC rectángulo en C. Se ve que XI = IY = YC = CX = r el inradio. Además, BX = BZ y AY = AZ por ser tangentes a la misma circunferencia desde el mismo punto. Por ende, BC + CA – AB = BX + XC + CY + YA – AZ – BZ = XC + CY + (BX – BZ) + (AY – AZ) = r + r + 0 + 0 = 2r.



Problema 4.17. Sea AD la altura de la hipotenusa BC del triángulo rectángulo ABC. Si r, r_1 y r_2 son los inradios de los triángulos ABC, ABD y ADC se tiene que $r + r_{1^o} + r_2 = h$.



Solución:
Aplicando el ejemplo anterior en los triángulos ABC, ABD y ADC se obtienen las igualdades:

$2r = AB + AC - BC$, $2r_1 = BD + DA - AB$ y $2r_2 = DA + DC - AC$.

Al sumar estas igualdades miembro a miembro se ve que

$2(r + r_1 + r_2) = AB + AC - BC + BD + DA - AB + DA + DC - AC$.

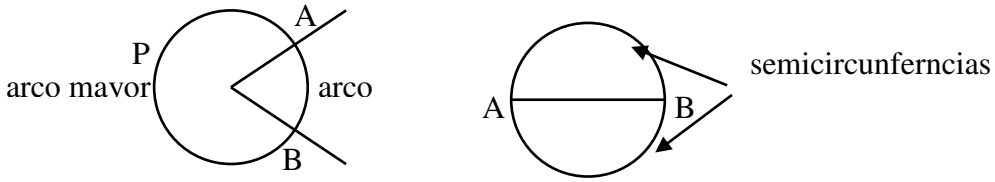
Al simplificar los términos semejantes se obtiene que $2(r + r_1 + r_2) = 2AD$, y al dividir por 2 se obtiene el resultado deseado.

Definición 4.3.

(A) Un ángulo de una circunferencia se díce **central** si su vértice es en el centro de la circunferencia.
(B) Sean A y B dos puntos de una circunferencia O. El conjunto formado por A y B, y los puntos de la circunferencia interiores al ángulo central AOB se llama **arco**. Los puntos A y B se llaman los **extremos** del arco.
(C) Se llama **medida** de un arco a la medida de su ángulo central.
(D) El conjunto formado por A y B y, los puntos de la circunferencia que no están en el arco se llama **arco mayor**. Los puntos A y B se llaman los extremos del arco mayor.
(E) Si A y B son dos puntos antipodales, entonces se forman dos arcos que se llaman **semicircunferencias.**
(F) Dos arcos se dicen **iguales** si tienen la misma medida y están en la misma circunferencia o en circunferencias iguales.
(G) Diremos que el punto M es el **punto medio** del arco AB si el punto está en el arco y divide al arco en dos arcos iguales.
(H) La distancia entre el punto medio de una cuerda y el punto medio de su arco se llama **sagita** o **flecha** de la cuerda o del arco.

Es necesario destacar el hecho en la definición 43(C) que la palabra **medida** en este contexto no se refiere a una longitud.

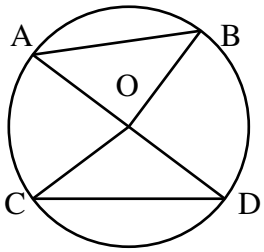
Se establece una correspondencia entre arcos, ángulos centrales y cuerdas. Esta correspondencia se expresará usando variantes de los verbos **subtender**. Cada ángulo central **subtiende** una cuerda y un arco. Cada cuerda **subtiende** un arco y un ángulo central. Cada arco **subtiende** una cuerda y un ángulo central.



Dos puntos A y B de una circunferencia O determinan el ángulo central AOB cuyos lados son los radios OA y OB. Usualmente los arcos se denotan por sus extremos. Para evitar ambiguedades en algunos arcos es conveniente añadir un punto en él. En la figura que sigue a la izquierda el arco APB se

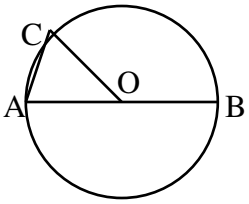
refiere al arco mayor de extremos A y B que contiene a P. Se usará la notación arc{AB} para denotar la medida del arco de extremos A y B. Así, arc {AB} = x si y sólo si ∠AOB = x. Si APB es un arco mayor, entonces arc {APB} = 360º – arc {AB}. Se acepta que un punto P está en un arco AB si y sólo si arc{APB} = arc{AP} + arc{PB}. El punto M es el punto medio del arco AB si y sólo si M está en el arco de extremos A y B y arc{AM} = arc{MB}.

Teorema 4.8. Dos cuerdas en una circunferencia son iguales si y sólo si sus ángulos centrales son iguales.
Solución:



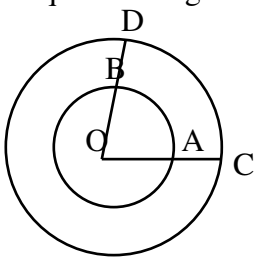
Si AB y CD son dos cuerdas de una circunferencia O, entonces OA = OB = OC = OD. Si AB = CD, entonces por el tercer criterio de semejanza se tiene queAOB ~ COD y así ∠AOB = ∠COD. Recíprocamente, si ∠AOB = ∠COD, entonces por el primer criterio de semejanza se ve que AOB ~ COD. Luego, $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OB} = 1$ y se deduce que AB = CD.

Problema #4.18. En la figura a la derecha AB es un diámetro y arc{AC} = 40°. ¿Cuánto vale arc{BC}?
Solución:



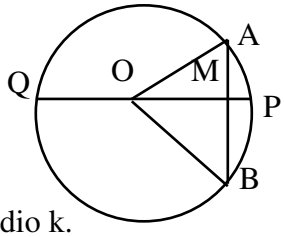
180° = arc{ACB} = arc{AC} + arc{BC} = 40° + arc{BC}. Luego, arc{BC} = 180°– 40° = 140°.

Problema #4.19.. En la misma figura anterior AB es un diámetro de una circunferencia O, AC = 5 y arc{BC} = 120°. Halle el radio.
Solución:
∠AOC = arc{AC} = arc{ACB} – arc{BC} = 180° – 120° = 60°. Del ejemplo 6.39 se ve que el triángulo AOC es equilátero. Luego, OB = OA = AC = 5.



Problema #4.20. En la figura a la derecha se tienen dos circunferencias concéntricas de centro común O. Entonces los ángulos AOB y COD son iguales y así arc{AB} = arc{CD}. Estos arcos tienen la misma medida, pero no son iguales por estar en circunferencias distintas.

Problema #4.21. La mediatriz de una cuerda de una circunferencia pasa por el punto medio del arco subtendido por la cuerda.
Solución:

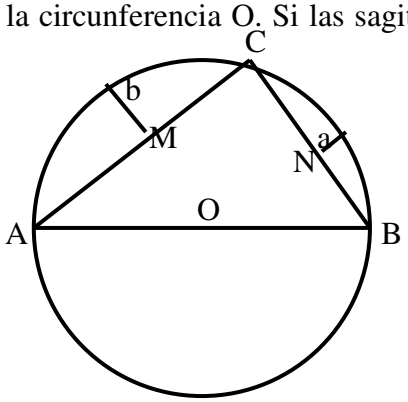


Sea AB una cuerda de una circunferencia O y sea M el corte de la circunferencia con la mediatriz de AB. Ya vimos que OM es bisectriz del ángulo AOB. Por tanto, ∠AOM = ∠BOM y M es el punto medio del arco AB.

Problema #4.22.. Halle la sagita de la cuerda AB = d de la circunferencia O de radio k.
Solución:

En la figura anterior la sagita o flecha de la cuerda AB es MP = OP – OM = $k - \sqrt{k^2 - \frac{d^2}{4}}$ donde se usó el ejemplo 7.7.

Problema #4.23. El triángulo ABC rectángulo en C está inscrito en la circunferencia O. Si las sagitas de los catetos AB y AC son a y b, pruebe que el inradio es $r = \sqrt{2ab}$



Solución:
Del ejemplo anterior se obtienen las sagitas

$$a = \frac{AB}{2} - \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \frac{BC^2}{4}} = \frac{AB}{2} - \frac{AC}{2} = \frac{AB - AC}{2} \text{ y}$$

$$b = \frac{AB}{2} - \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{AB}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AB - BC}{2}.$$

Por ende, $a \bullet b = \frac{AB - AC}{2} \bullet \frac{AB - BC}{2} = \frac{AB^2 - AB \bullet BC - AB \bullet AC + AC \bullet BC}{4}$. Por otro lado del ejemplo 7.17 se ve que $r^2 = \frac{(AC + BC - AB)^2}{4} =$

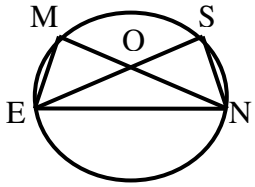
$$\frac{AC^2 + BC^2 + AB^2 + 2 \bullet AC \bullet BC - 2 \bullet AC \bullet AB - 2 \bullet BC \bullet AB}{4} =$$

$\frac{AB^2 - AB \bullet BC - AB \bullet AC + AC \bullet BC}{2}$. Al comparar ambas igualdades se ve que $r^2 = 2ab$ y al extraer raíces cuadradas se obtiene el resultado deseado.

Teorema 4.9. Dos cuerdas de una circunferencia son iguales si y sólo si subtienden dos arcos iguales.
Demostración:

Teorema 7.8.

Problema #4.24. En la figura que sigue se tiene que ME = SN.
Entonces MN = SE.



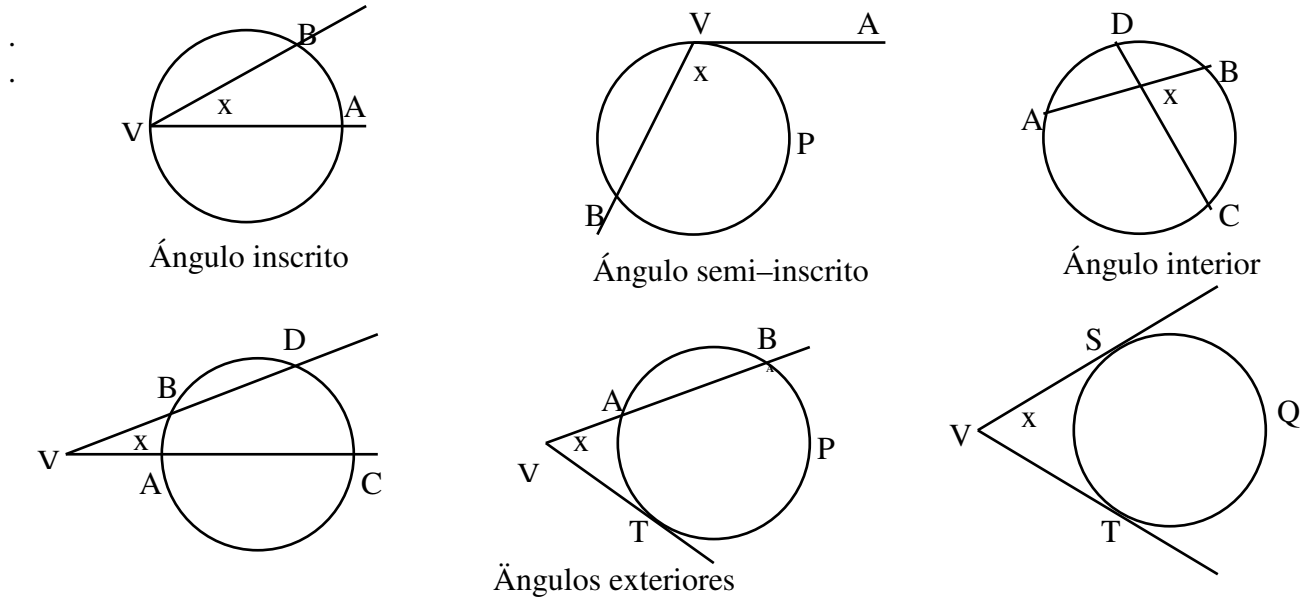
Solución:
Como ME = SN se sigue del teorema anterior que arc{ME} = arc{SN}. Al sumar arc{EN} en ambos miembros se ve que arc{ME} + arc{EN} = arc{SN} + arc{EN}. Por lo tanto arc{MEN} = arc{SNE}. Del mismo teorema anterior resulta que MN = SE.

Definición 4.4.

(A) Se llama **ángulo inscrito d**e una circunferencia a un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia y sus dos lados son secantes.
(B) Se llama **ángulo semi–inscrito** en una circunferencia a un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, un lado es secante y el otro lado es tangente.

(C) Se llama **ángulo interior** a una circunferencia a un ángulo cuyo vértice es un punto interior a esa circunferencia.

(D) Se llama **ángulo exterior** a una circunferencia a un ángulo cuyo vértice es un punto exterior a esa circunferencia y ninguno de los lados está en una recta exterior.

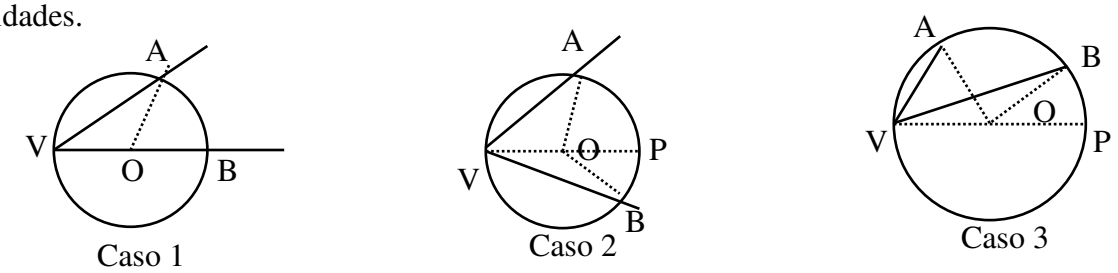


Cada ángulo inscrito o semi–inscrito en una circunferencia determina un arco en ella, mientras que cada ángulo interior o exterior determina dos arcos en la circunferencia. De las seis figuras anteriores en la primera de ellas el arco determinado por el ángulo x es AB; en la segunda figura el ángulo determinado por x es AVB; en la tercera figura los arcos determinados por el ángulo x son los arcos AD y BC; en la cuarta figura los arcos determinados por el ángulo x son AB y CD; en la quinta figura los arcos son AT y BPT, y en la última figura los arcos son ST y SQT.

Teorema 4.10. Un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida del arco determinado.

Demostración:

Considérese el ángulo AVB inscrito en la circunferencia O. Se hará la demostración considerando tres posibilidades.

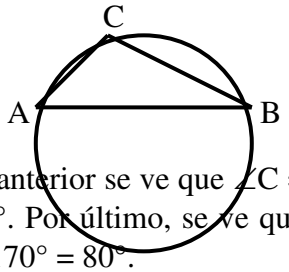


CASO 1. Uno de los lados del ángulo inscrito pasa por O.

Sea AVB un ángulo inscrito en una circunferencia O tal que VB es un diámetro. Entonces ∠AVO = ∠OAV porque el triángulo OAV es isósceles**.** Se ve entonces que ∠AOB = ∠AVO + ∠OAV por ser ∠AOB exterior al triángulo AOV. Así, ∠AOB = 2∠AVB, o sea, ∠AVB = ½ ∠AOB = $\frac{\text{arc}\{AB\}}{2}$

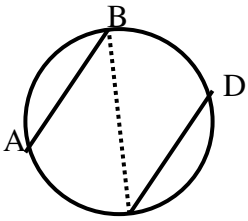
CASO 2. El centro de la circunferencia es interior al ángulo inscrito.
Sea AVB un ángulo inscrito en una circunferencia O de modo que O esté en su interior. Trace el diámetro VP. Por el caso 1 se ve que ∠BVP = ½ arc{BP} y ∠PVA = ½ arc{AP}. Así, ∠BVA = ∠BVP + ∠PVA = ½ [arc{BP} + arc{PA}] = ½ arc{AB}.

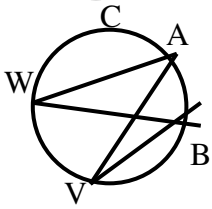
CASO 3. El centro es punto exterior al ángulo inscrito.
Sea AVB un ángulo inscrito en una circunferencia O de modo que O es exterior al ángulo, Trace el diámetro VP. Por el caso 1 se ve que ∠BVA + ∠AVP = ½ (∠BOA + ∠AOP) y ∠AVP = ½ ∠AOP. Por tanto, ∠BVA = ½ BOA + ½ AOP − ∠AVP = ½ AOB = ½ arc{AB}.



Problema #4.25. En la figura a la derecha arc{BC} = 110° y ∠C = 85°. Halle ∠A, arc{AB} y arc{AC}.
Solución:
Por el teorema anterior ∠A = ½ arc{BC} = ½ 110° = 55°. Del mismo teorema anterior se ve que ∠C = ½ arc{AB}. Luego, 85° = ½ arc{AB} y se tiene que arc{AB} = 2•85° = 170°. Por último, se ve que arc{AB} + arc{BC} + arc{AC} = 360° y, por tanto, arc{AC} = 360° − 110° − 170° = 80°.

Teorema 4.11. Si AB y CD son dos cuerdas paralelas de una circunferencia O, entonces arc{AC} = arc{BD}.
Solución:
Trace la cuerda BC. Entonces ∠ABC = ∠BCD por ser ángulos alternos internos entre las paralelas AB y CD cortadas por BC. Por el teorema anterior se ve que ½ arc{AC} = ½ arc {BD}. Al multiplicar por 2 se obtiene que arc{AC} = arc{CD}.



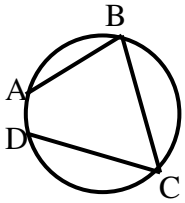


En la figura se ha representado un ángulo inscrito AVB. Si en el arco AB se toma un punto W, entonces diremos que el ángulo AWB está inscrito en el mismo arco.

Teorema 4.12. Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden el mismo arco son iguales.
Demostración:
En la figura anterior se tiene que ∠AVB = ½ arc {AB} = ∠AWB.

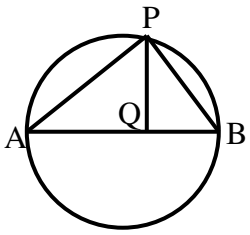
Problema #4.26. En la figura que sigue se tiene que AB = CD si y sólo si AC = BD.
Solución:

AB = CD si y sólo si arc{AB} = arc{CD}	Teorema 7.10.
si y sólo si arc{AB} + arc{BC} = arc{CD} + arc{BC}	Se suma la misma cantidad.
si y sólo si arc{ABC} = arc{BCD}	Suma de arcos



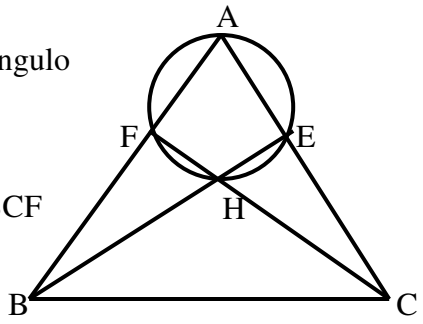
si y sólo si AC = BD Teorema 7.10.

Teorema 4.13. Un ángulo es inscrito en una semicircunferencia si y sólo si es recto.
Demostración:
Sea AB un diámetro de una circunferencia O y sea P un punto distinto de A y B en la circunferencia. Del teorema 7.10 se tiene que ∠APB = ½ arc{AB} = ½ (180) = 90º, y el ángulo APB es recto. Recíprocamente, supóngase que ∠APB = 90°. Del teorema 6.18 los puntos A, B y P están en la circunferencia de diámetro AB.

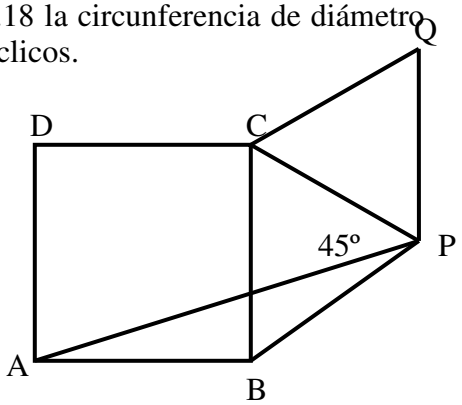


Problema #4.27. Sea P un punto de una semicircunferencia de diámetro AB. Si Q es la proyección ortogonal de P sobre AB, entonces PQ es media geométrica entre AQ y QB. Halle AQ y QB si AB = 25 y PQ = 12.
Solución:
Vea la figura anterior. Del teorema 7.13 se ve que el triángulo APB es rectángulo en P y PQ es la altura de la hipotenusa AB. Del teorema 6.23 se tiene que PQ^2 = AQ•QB. Además, AQ + QB = AB y al sustituir los valores dados se ve que 12^2 = AQ.QB y AQ + QB = 25. De ambas igualdades se obtiene la ecuación cuadrática $AQ^2 - 25 \bullet AQ + 144 = 0$ cuyas raíces son 16 y 9. Por tanto, las soluciones son AQ = 16 y QB = 9 ó AQ = 9 y BQ = 16.

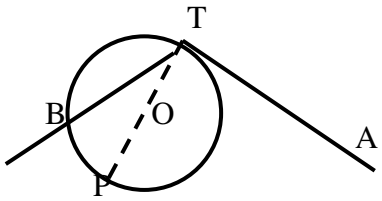
Problema #4.28. Sean BE y CF las alturas de los lados AC y AB del triángulo ABC que se cortan en su ortocentro H. Entonces los puntos B, C, E ,F y A, F, H, E son concíclicos.
Solución:
Como BE y CF son alturas se forman los triángulos rectángulos BCE y BCF cuya hipotenusa común es BC. Por el teorema 6.18 la circunferencia de diámetro BC pasa por E y F. Se ha demostrado que B, C, E y F son puntos concíclicos. Por la misma razón anterior se forman los triángulos rectángulos AFH y AEH de hipotenusa común AH. Por el teorema 6.18 la circunferencia de diámetro AH pasa por los puntos E y F. Por consiguiente, A, F, H y E son concíclicos.



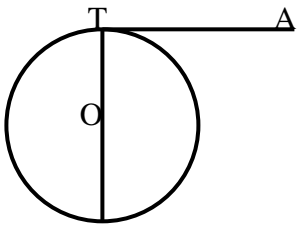
Problema #4.29. En la figura se tiene un cuadrado ABCD y un rombo CBPQ. Pruebe que ∠APC = 45º.
Solución:
La circunferencia de centro B que pasa por C también pasa por A y P ya que BC = BA = BP. El ángulo central es ∠ABC = 90º y por tanto el arco AC mide 90º. Ya que el ángulo APC es inscrito en el arco AC se obtiene que ∠APC = $\frac{1}{2} \bullet 90º = 45º$.



Teorema 4.14. Un ángulo semi−inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida del arco que determina.
Demostración:

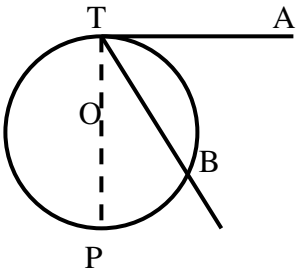


Caso 1



P = B

Caso 2



Caso 3

Sea AVB un ángulo semi–inscrito en Una circunferencia O y sea TP el diámetro que pasa por el punto de tangencia.T.

CASO 1. $\angle ATB > 90°$

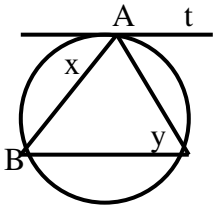
$\angle ATB = \angle BTP + \angle ATP = ½ \text{ arc}\{BP\} + 90° = ½ \text{ arc}\{BP\} + ½\, 180° = ½ \text{ arc}\{BP\} + ½ \text{ arc}\{TP\} = ½ \text{ arc}\{TPB\}$.

CASO 2. $\angle ATB = 90°$

$$\angle ATP = \angle ATB = 90° = ½\, 180° = ½ \text{ arc}\{VB\}$$

CASO 3. $\angle ATB < 90°$

$$\angle ATB = \angle ATP - \angle BTP = 90° - ½ \text{ arc}\{BP\} = ½ \text{ arc}\{TP\} - ½ \text{ arc}\{BP\} = ½ \text{ arc}\{TB\}.$$



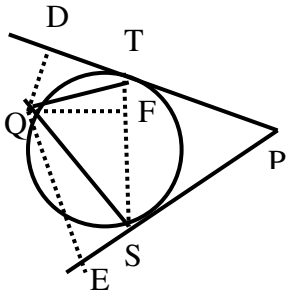
Problema #4.30. En la figura a la derecha A, B, C son puntos de una circunferencia O y t es la tangente en A. Pruebe que x = y.

Solución:

Del teorema anterior se tiene que x = ½ arc{AB} y del teorema 7.10 se ve que y = ½ arc{AB}. Por tanto, x = y.

Problema #4.31. Dos tangentes a una circunferencia O en T y S se cortan en el punto P. Sea Q un punto cualquiera del arco mayor TQS y sean D, E y F las proyecciones ortogonales de Q sobre PT, PS y TS. Entonces QF es la media geométrica entre QD y QE.

Solución:



Del teorema 7.14 se ve que $\angle QTD = ½ \text{ arc}\{QT\}$ y $\angle QST = ½ \text{ arc}\{QT\}$. Al ser iguales los dos segundos miembros de las igualdades anteriores se ve que $\angle QTD = \angle QST$. Estos ángulos están en los triángulos rectángulos QTD y QSF y, por el segundo criterio de semejanza, ambos triángulos son semejantes. Luego,

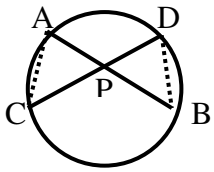
$$\frac{QT}{QS} = \frac{QD}{QF} \text{ ..... (a)}$$

Del teorema 4.14 se ve que $\angle QSE = ½ \text{ arc}\{QS\}$ y $\angle QTS = ½ \text{ arc}\{QS\}$. Se deduce de estas igualdades que $\angle QSE = \angle QTF$. Estos ángulos están en los triángulos rectángulos QSE y QTF, y del segundo criterio de semejanza se deduce que ambos triángulos son semejantes. Por ende,

$$\frac{QT}{QS} = \frac{QF}{QE} \text{ ..... (b)}$$

Como los primeros miembros de (a) y (b) son iguales se sigue que $\frac{QD}{QF} = \frac{QF}{QE}$ y se obtiene al multiplicar en cruz que $QF^2 = QD \bullet QE$.

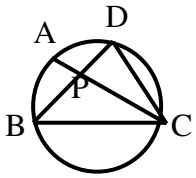
Teorema 4.15. Un ángulo interior a una circunferencia es igual a la semisuma de las medidas de los arcos formados por sus lados y sus prolongaciones.
Demostración:



Sean AB y CD dos cuerdas de una circunferencia O que se cortan en un punto P que está en el interior. Se ve que ∠BPC = ∠PAC + ∠PCA por ser exterior al triángulo ACP. Pero, ∠PAC = ½ arc{BC} y ∠PCA = ½ arc{AD} por el teorema 7.10.
Al sustituir se tiene ∠BPC = ½ arc{BC}+ ½ arc{AD} = ½ [arc{BC} + arc{AD}].

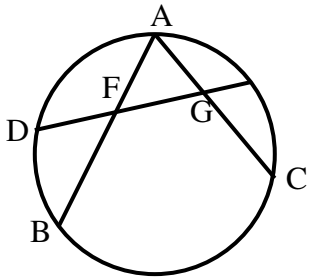
Problema #4.32. Si arc{AC} = 40° y arc{BD} = 130° en la figura anterior, entonces ∠APC = ½ [arc{AC} + arc{BD}] = ½ (40° + 130°) = 85°.y x = 180° – 85° = 95°.

Problema #4.33. En la misma figura anterior se tiene que ∠APD = 85° y arc{AD} = 125°. Halle arc{BC}.
Solución:
Se ve que ∠APD = ½ [arc{BC} + arc{AD}]. Luego, 85° = ½ [arc{BC} + 125°]. Al multiplicar por 2 se ve que 170° = arc{BC} + 125°. Así, arc{BC} = 170° – 125° = 45°.



Problema #4.34. En la figura CA es la bisectriz del ángulo BCD. Además, arc{AB} = 60° y arc{DC} = 80°. Halle ∠DPC y arc{CD}.
Solución:
Del teorema 7.10 se ve que 2•arc{AB} = ∠BCA = ∠DCA = 2•arc{AD}. Al dividir por se ve que arc{AD} = arc{AB} = 60°. Por otro lado, arc{AB} + arc{BC} + arc{CD} + arc{DA} = 360° y, por tanto, se ve que 60° + 80° + 60° + arc{CD} = 360°. Luego, arc{CD} = 160°. Por último, ∠DPC = ½ [arc{CD} + arc{AB}] = ½ (160° + 60°) = 110°.

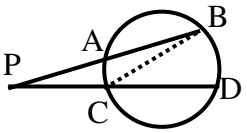
Problema #4.35. Sean A, B, C son puntos cualesquiera de una circunferencia O y sean D y E son los respectivos puntos medios de los arcos AB y AC. Si la recta DE corta las cuerdas AB, AC en F, G, entonces AF = AG.
Solución:

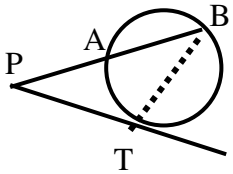


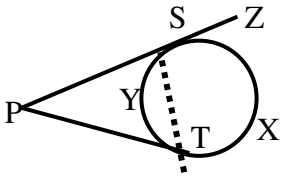
Como D y E son los puntos medios de los arcos AB y AC se tiene que arc{AD} = arc{DB} y arc{AE} = arc{EC}. Así, ∠AFG = ½ [arc{BD} + arc{AE}] = ½ [arc{AD} + arc{EC}] = ∠AGF. Luego, AFG es un triángulo isósceles y se ve que AF = AG.

Teorema 4.16. El ángulo exterior a una circunferencia es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos formados por sus lados.
Demostración:

Considérense tres casos.







CASO 1. Dos lados secantes

Sean PAB y PCD dos secantes a Una circunferencia O Entonces ∠BCD = ∠PBC + ∠BPC por ser un ángulo exterior al triángulo PCB. Así, ∠BPC = ∠BCD − ∠PBC. Pero, ∠BCD = ½ arc{BD}, y se tendrá que ∠PBC = ½ arc{AC} por ser ángulos inscritos en esos arcos. Tendremos entonces que ∠BPC = ½ arc{BD} − ½ arc{AC} = ½[arc{BD} − arc{AC}.

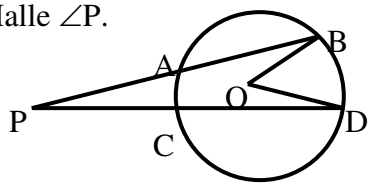
CASO 2. Un lado secante y un lado tangente.

Sea PAB secante a Una circunferencia O y sea PT tangente.Entonces ∠BAT = ∠BPT + ∠PTA por ser ángulo exterior al triángulo APT. Pero, ∠BAT = ½ arc{BT} por el teorema 7.12 y ∠PTA = ½ arc{AT} por el teorema 7.14. Luego, ∠BPT = ∠BAT – ∠PTA = ½ [arc{BT} – arc{AT}].

CASO 3. Dos lados tangentes.

Sean PT y PSD las tangentes a Una circunferencia O en T, S y sea Z un punto en la prolongación de PS. Entonces ∠XST = ∠SPT + ∠PTS por ser ángulo exterior al triángulo PTS. Pero, ∠XST = ½ arc{TXS} y ∠PTS = ½ arc{TYS} por el teorema 7.14. Luego, ∠SPT = ∠XST – ∠PTS = ½ [arc{TXS} – arc{TYS}].

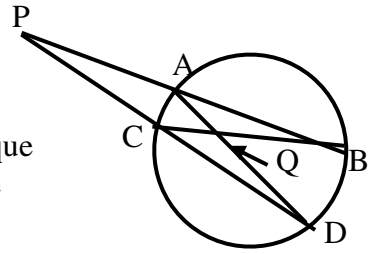
Problema #4.36. En la figura a la derecha arc{AC} = 28° y ∠BOD = 54°. Halle ∠P.



Solución:

Se tiene que arc{BD} = ∠BOD = 54°. Del teorema anterior se tiene que P = ½ [arc{BD} – arc{AC}] = ½ (54° – 28°) = 13°.

Problema #4.37. Sean PAB y PCD dos secantes a una circunferencia O y sea Q el corte de las cuerdas AD y BC. Si arc{BD} = 70° y ∠DQB = 4∠P, halle arc{AC} y ∠P.

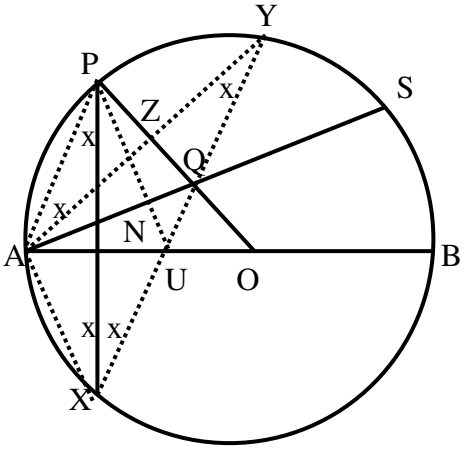


Solución:

Del teorema 7.15 se ve que ∠DQB = ½ [arc{AC} + arc{BD}] = ½ arc{AC} + 35°. Del teorema 7.16 se ve que ∠P = ½ [arc{BD} – arc{AC}] = 35° – ½ arc{AC} Como ∠DQB = 4∠P se ve que ½ arc{AC} + 35° = 4[35° – ½ arc{AC}]. Multiplicando por 2 resulta que arc{AC} + 70° = 280º – 4.arc{AC} y así arc{AC} = 42°. Además, ∠P = 35°–½ arc {AC} = 35°–21° = 14º.

Problema #4.38. Un punto P de una circunferencia O se proyecta sobre el diámetro AB. A lo largo de PO se toma un punto Q de modo que PQ = 2AN. Si AQ corta la circunferencia de nuevo en S, entonces se tiene que ∠AOS = 3∠AOP

Solución:



Sea U el simétrico de A respecto de N y sea X el corte de PN con la circunferencia. Por el teorema 4.2 se ve que N es el punto medio de PX. Luego, AXUP es un rombo ya que sus diagonales PX y AU se bisecan en N y son perpendiculares. Esto indica que XU es paralela a AP. Además, OQ = OP – PQ = OA – 2AN = OP – AU = OU y se ve que OQU es un triángulo isósceles. Por ende, UQ es paralela a AP. Ya que la paralela a AP por U es única se concluye que los puntos X, U, Q son colineales. Sea Y la intersección de la circunferencia con XU. En el triángulo isósceles AXU se ve que XN es bisectriz del ángulo X. Así, $\angle AXN = \angle UXN = x$. Por el teorema 7.10 los arcos AP y PY son iguales y se tiene que

$$\angle AOP = \angle POY \text{ ..... (a)}$$

Por otro lado, $\angle APX = \angle UXP$ por ser ángulos alternos internos entre las paralelas AP y XU cortadas por PX. Luego, los arcos AX y PY son iguales, y se ve que

$$\angle XOA = \angle POY \text{ ..... (b)}$$

Se infiere que las cuerdas AP y PY son iguales lo que indica que P está en la mediatriz del segmento AY. Pero, O también está en esa mediatriz ya que OA = OY. Se deduce entonces que OP es la mediatriz de AY. Al estar el punto Q en esa mediatriz se ve que QA = QY lo que indica que el triángulo AQY es isósceles. Por tanto, $\angle YAQ = \angle AYQ = x$. Luego, los arcos AX y YS son iguales y se tiene

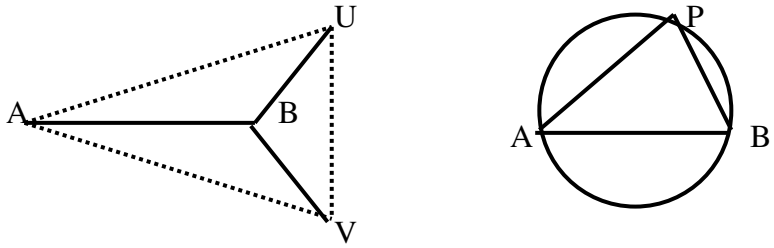
$$\angle XOA = \angle YOS \qquad \text{(c)}$$

De (a), (b), (c) se obtiene que $\angle AOP = \angle POY = \angle YOS$. Se obtiene de aquí la conclusión de que $\angle AOS = \angle AOP + \angle POY + \angle YOS = 3\angle AOP$.

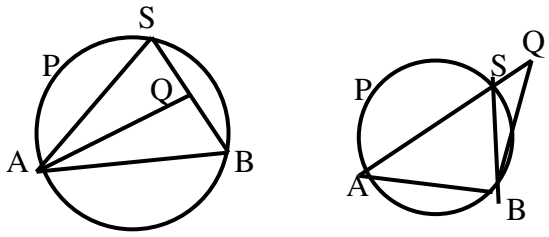
Definición 4.5. Se dice que el segmento AB se **ve desde un punto P bajo el ángulo α** si y sólo si $\angle APB = \alpha$.

Teorema 4.17. El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve a un segmento dado AB bajo un ángulo dado x está formado por dos arcos de circunferencias que pasan por A y B, y son simétricos respecto de la recta AB.

Demostración:



Si U y V son puntos simétricos respecto de la recta AB, entonces $\angle AUB = \angle AVB$ por el ejemplo 6.75. Esto indica que dichos arcos son simétricos. Sea P un punto tal que $\angle APB = x$. Trace la circunferencia que pase por A, B y P según se indica en la figura anterior derecha. Del teorema 7.12 se sigue que cualquier punto del arco APB cumple con la propiedad de que $\angle APB = x$.



Sea Q un punto interior al arco y sea S el punto donde BQ corta al arco APB. Se tendrá entonces que $\angle ASB = \angle APB = x$ por el teorema 7.10, y $\angle AQB > \angle ASB$ por ser ángulo exterior al triángulo AQS. Luego. $\angle AQB > x$ y el punto Q no cumple la propiedad. Sea Q un punto exterior al arco y sea S el corte de AQ con el arco. Entonces $\angle ASB = \angle APB = x$ por el teorema 7.10 y $\angle ASB > \angle AQB$ por ser ángulo exterior al triángulo SBQ. Luego, $x > \angle AQB$ y el punto Q no cuumple la propiedad.

Definición 4.6. El arco desde el cual se ve un segmento dado AB bajo un ángulo dado α se llama **arco capaz** del ángulo α sobre AB.

Problema #4.39. El arco capaz de un ángulo recto sobre cualquier segmento es la semicircunferencia de diámetro dicho segmento.

Problema #4.40. Dado un segmento AB halle un punto P tal que AP = PB y el segmento AB se ve bajo un ángulo recto.
Solución:
Como P debe equidistar de A y B deberá estar en la mediatriz de AB. Ya que $\angle APB = 90°$ se sigue que P está en la semicircunferencia de diámetro AB.

Teorema 4.18. El lugar geométrico de un punto cuya relación de distancias a dos puntos dados A y B es un número $\frac{m}{n}$ con $m \neq n$ es una circunferencia.
Demostración:
Sean P y Q los conjugados armónicos respecto de A y B de razón $\frac{m}{n}$ y sea X un punto tal que $\frac{AX}{XB} = \frac{m}{n}$. Por los teoremas 6.35 y 6.39 los segmentos XP y XQ son las bisectrices interior y exterior del ángulo X en el triángulo ABX. Luego, $\angle PXB = 90°$ lo que indica que X está en la circunferencia de diámetro PQ. Por otro lado, sea Y un punto que está en la circunferencia de diámetro PQ. Por B trace las paraleas a YP e YQ hasta cortar a AY en J y K. Por el teorema de Thales se obtiene que $\frac{AY}{YJ} = \frac{AP}{PB}$ y $\frac{AY}{YK} = \frac{AQ}{QB}$. Como los segundos miembros de ambas igualdades son iguales se tiene que YJ = YK. Pero, $\angle KBJ = 90°$ porque sus lados son paralelos a los del ángulo recto PYQ. Luego, YJ = YB. Sustituyendo en la primera proporción resulta que $\frac{AY}{YB} = \frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$ y el punto Y cumple la propiedad.

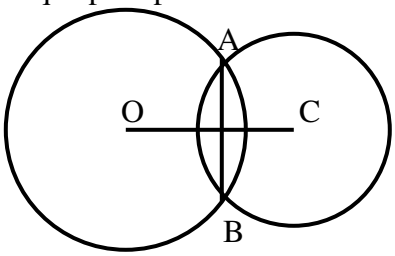
Definición 4.7. La circunferencia dada en el teorema anterior se llama **círculo de Apolonio** de razón $\frac{m}{n} \neq 1$ sobre el segmento AB.

Apolonio (ca. 225 A.C.) nació en Perga y fue llamado "el gran geómetra". Escribió una obra de ocho libros sobre las Cónicas, e introdujo los términos elipse, parábola e hipérbola. Nótese que si m = n, entonces el lugar geométrico anterior es la mediatriz del segmento AB.

Problema #4.41. Halle el diámetro del círculo de Apolonio de razón $\frac{1}{3}$ sobre un segmento AB de longitud 12.
Solución:

Usando el teorema 4.13 resulta que $\frac{PQ}{AB} = \frac{2\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$. Por ende, PQ = $\frac{3}{4}.12 = 9$.

Definición 4.8. Diremos que dos circunferencias **se cortan** o **son secantes** si tienen dos puntos distintos en común. Los puntos en común se llaman puntos **de corte** y el segmento que une esos dos puntos se llama la **cuerda común**. La recta que pasa por sus centros se llama la **recta de los centros**.



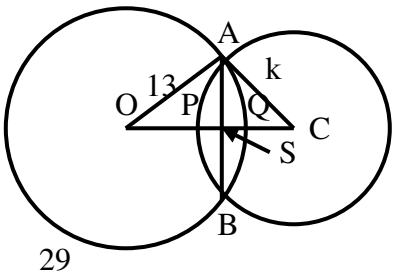
En la figura anterior A y B son los puntos de intersección de las circunferencias O y C, la cuerda común es el segmento AB y la recta OC es la recta de los centros.

Teorema 4.19. Si las circunferencias O y C tienen un punto en común A que no está en la recta OC, entonces son secantes y la cuerda común es perpendicular a la recta de los centros OC.
Demostración:
Sea B el punto simétrico de A respecto de la recta OC. Entonces OA = OB y CA = CB lo que indica que B está en ambas circunferencias y que OC es la mediatriz del segmento AB.

Si A está en ambas circunferencias y OC < OA + AC, entonces por el teorema anterior las circunferencias son secantes.

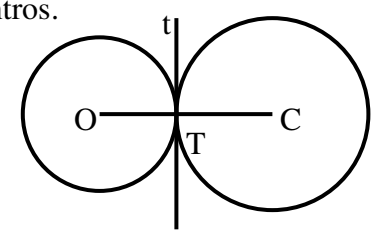
Problema #4.42. Sean las circunferencias O y C de radios 3 y 4, y sea OC = 5, entonces la tangente a una circunferencia por el punto de corte pasa por el centro de la otra circunferencia.
Solución:
Vea la figura anterior. Como OC = 5 < 3 + 4 se sigue del comentario anterior que ambas circunferencias son secantes. Si A es uno de los puntos de corte, entonces OA = 3, CA = 4 y OC = 5. Pero, $3^2 + 4^2 = 5^2$ y se deduce que el triángulo AOC es rectángulo en A, o sea, OA y CA son perpendiculares. Por el teorema 7.5 la tangente a la circunferencia O en A pasa por el punto C.

Problema #4.43. Sean las circunferencias O y C de radios 13 y k que se cortan en A y B tal que AB = 10. La recta OC corta ambas circunferencias en P y Q de modo que PQ = 3. Halle k.
Solución:

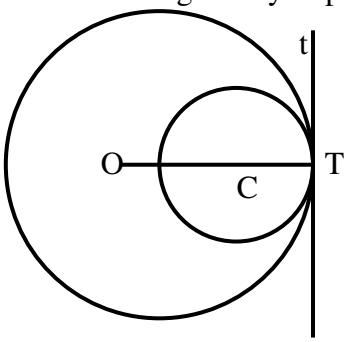


Sea S el corte de OC, AB. Ya que OC es mediatriz de AB se ve que AS = 5. E. En el triángulo rectángulo OSA se tiene por Pitágoras que $OS^2 = OA^2 - SA^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2$. Así, OS = 12. Como OQ = OA = 13 se tiene que SQ = OQ – OS = 13 – 12 = 1. Ahora, PS = PQ – SQ = 3 – 1 = 2. Por otro lado, CA = CP = k. Así, CS = CP – PS = k – 2. Aplicando Pitágoras en el triángulo rectángulo ASC se ve que $k^2 = AS^2 + CS^2 = 5^2 + (k-2)^2$. Luego, 4k = 29 y se ve que $k = \frac{29}{4}$.

Definición 4.9. Dos circunferencias se dicen **tangentes** si ambas son tangentes a la misma recta en el mismo punto. Este punto se llama **punto de tangencia** o **de contacto**. Diremos que dos circunferencias son **tangentes interiormente** si son tangentes y el punto de tangencia está entre los dos centros. Se dice que dos circunferencias son **tangentes exteriormente** si son tangentes y el punto de tangencia no está entre los dos centros.



Las circunferencias O y C son tangentes exteriormente

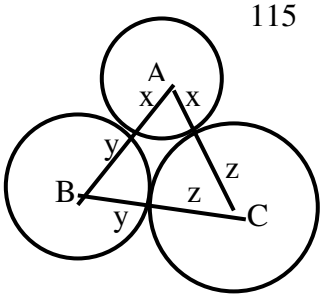


Las circunferencias O y C son tangentes interiormente

Teorema 4.20. Si dos circunferencias son tangentes, entonces sus centros y el punto de tangencia son colineales.
Demostración:
Si las circunferencias O y C son tangentes en T, entonces existe una tangente t a las dos circunferencias que pasa por T. Los radios OT y CT son perpendiculares a t y de la unicidad de esa perpendicular se deduce que O, C, T son colineales.

En la figura anterior izquierda se tienen dos circunferencias que son tangentes exteriormente, y en la figura derecha dos que son tangentes interiormente. Si las circunferencia O y C de radios k y s son tangentes exteriormente, entonces OC = k + s, y si las circunferencia O y C son tangentes interiormente, entonces se tiene que OC = k – s si k > s

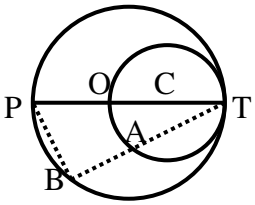
Problema #4.44. Sean A, B, C los centros de tres circunferencias que son tangentes exteriormente de dos en dos tales que AB = 10, AC = 14 y BC = 16. Halle cada uno de los radios.
Solución:
Si x, y, z son los respectivos radios, entonces x + y = 10, y + z = 16, x + z = 14.



Al restar las dos primeras igualdades resulta que $x - z = -6$, y al sumar este resultado con la tercera igualdad se ve que $2x = 8$ y así $x = 4$. De la primera igualdad se obtiene que $y = 10 - 4 = 6$, y de la tercera igualdad vemos que $z = 14 - 4 = 10$. En consecuencia, los radios miden 4, 6 y 10.

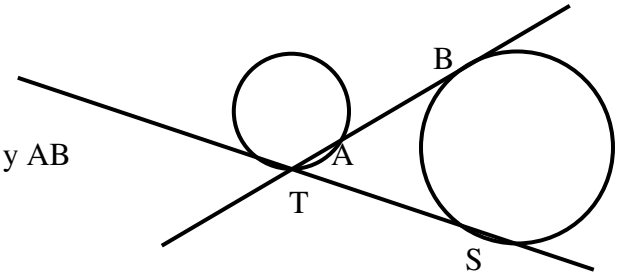
Problema #4.45. Si las circunferencias O y C son tangentes interiormente en T, la circunferencia C pasa por O y una recta por T corta a la circunferencia C en A y a la circunferencia O en B, entonces A es el punto medio de TB.

Solución:



Sea P el punto diametralmente opuesto a T según se indica en la figura a la derecha. Los ángulos TAO y TBP son rectos por el teorema 7.13. Luego, OA y PB son paralelas. Ya que O es el punto medio de TP se sigue que A es el punto medio de BT.

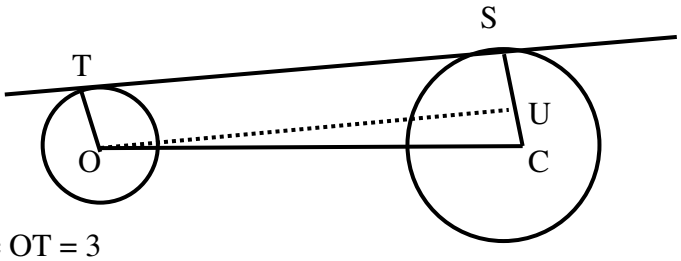
Definición 4.10. Diremos que una recta es **tangente común** a dos circunferencias si es tangente a ambas. Una tangente común se dice **interior** si corta a la recta de los centros en un punto que esté entre esos centros. Una tangente común se dice **exterior** si no es interior.



En la figura TS es una tangente común exterior y AB es una tangente común interior.

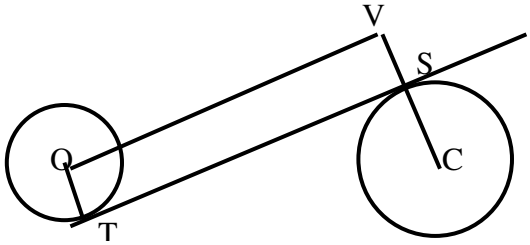
Problema #4.46. Halle el segmento de tangente común entre los puntos de tangencia de las circunferencias O y C de radios 3 y 8 si OC = 13.

Solución:



CASO 1. Tangente común exterior.

Sean T y S los puntos de tangencia. Entonces OT = 3, CS = 8 y los radios OT y CS son perpendiculares a TS. Luego, dichos radios son paralelos. Trace por O la paralela a TS hasta cortar a CS en U. Entonces TOUS es un rectángulo y US = OT = 3 y TS = OU. Pero, CU = CS − US = 8–3 = 5. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo OCU rectángulo en U, se tiene que $OC^2 = OU^2 + CU^2$, o sea, $13^2 = OU^2 + 5^2$. Esto quiere decir que $OU^2 = 144$ y se tiene que OU = 12 = TS.

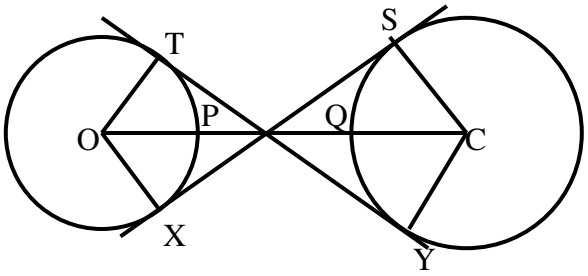


CASO 2. Tangente común interior.

Trace por O la paralela a TS hasta cortar a CS en V. Se forma el rectángulo OTSV y así VS = OT = 3 y TS = OV. Pero, CV = CS + SV = 8 + 3 = 11. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo OCV, rectángulo en V, se tiene que $OC^2 = OV^2 + VC^2$, o sea, $13^2 = OV^2 + 11^2$. Luego, $OV^2 = 48$ y se tiene que OV = TS = $4\sqrt{3}$.

Problema #4.47. Las tangentes comunes interiores a dos circunferencias que no se cortan y la recta de los centros de esas circunferencias se cortan en el mismo punto.

Solución:



Sean las circunferencias O y C de radios k y s con OC > k + s. Sean T, Y y X, S los puntos de tangencia de las tangentes comunes interiores según se ve en el dibujo a la derecha. Supóngase que TY corta a OC en P y XS corta a OC en Q. Los triángulos rectángulos TOP y YCP son semejantes ya que ∠TPO = ∠YPC por ser ángulos opuestos por el vértice. Luego,

$$\frac{OT}{CY} = \frac{OP}{CP} \text{ ..... (a).}$$

Los triángulos rectángulos XOQ y SCQ son semejantes porque ∠XQO = ∠SQC por ser ángulos opuestos por el vértice. Por ende,

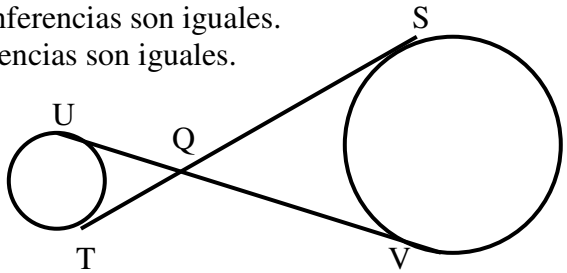
$$\frac{OX}{CS} = \frac{OQ}{CQ} \text{ ..... (b).}$$

Los primeros miembros de (a) y (b) coinciden puesto que OT = OX = k y CS = CY = s. Luego, $\frac{OP}{CP} = \frac{OQ}{CQ}$. Esto quiere decir que P y Q dividen internamente a OC en la misma razón y, por ende, P y Q coinciden. En consecuencia, TY, XS y OC pasan por el mismo punto.

Problema #4.48.

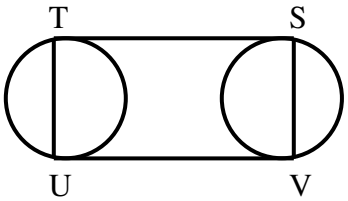
1. Los segmentos de tangentes interiores entre dos circunferencias son iguales.
2. Los segmentos de tangentes exteriores a dos circunferencias son iguales.

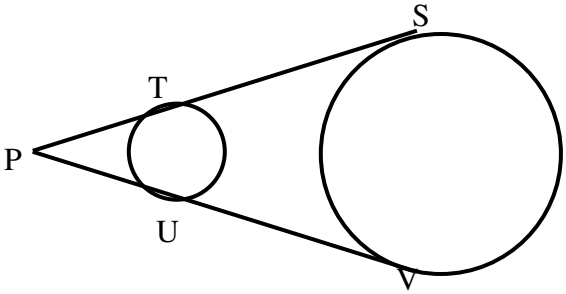
Solución:



1. Sean ST y UV los segmentos de tangentes interiores a las circunferencias O y C. Entonces debido al teorema 7.7 se tiene que SQ = VQ y QT = QU. Por tanto, ST = SQ + QT = UQ + QV = UV.

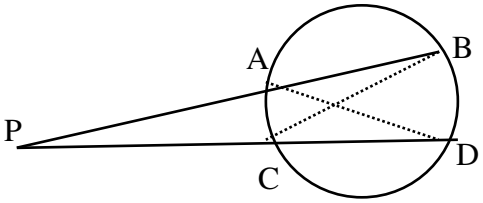
2.





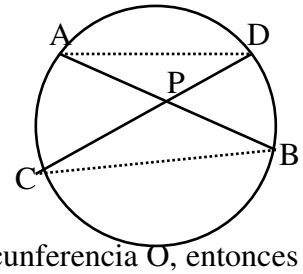
Sean TS y UV los segmentos de tangentes exteriores a las circunferencias O y C. Si los radios son iguales, entonces se forma el rectángulo TUVS y se ve que TS = UV. Si los radios son distintos, entonces TS y UV se cortan en P. Usando el teorema 7.7 se ve que TS = PS – PT = PV – PU = UV.

Teorema 4.21. Si PAB y PCD son dos secantes a una circunferencia O. donde P es un punto exterior a una circunferencia O, entonces PA•PB = PC•PD.



Demostración:
Se ve que ∠PBC = ∠PDA por ser ángulos inscritos en el arco AC.
Luego, los triángulos PBC y PDA son semejantes. Por tanto,
$\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA}$, o sea, PA•PB = PC•PD.

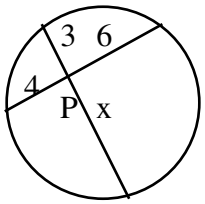
Teorema 4.22. Si P es el punto común de dos cuerdas AB y CD de una circunferencia O, entonces PA•PB = PC•PD.



Demostración:
Se tiene que ∠DAP = ∠PCB por ser ángulos inscritos en el mismo arco BD.
Además, ∠APD = ∠BPC por ser ángulos opuestos por el vértice. Por el segundo criterio de semejanza se tiene que los triángulos APD y CPB son semejantes. Luego, $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, o sea, PA•PB = PC•PD.
Los dos últimos teoremas indican que si P es un punto que no está en una circunferencia O, entonces al trazar cualquier secante a ella que la corte en A y B, el número PA•PB es constante. Si P está en una circunferencia O, entonces ese producto es cero.

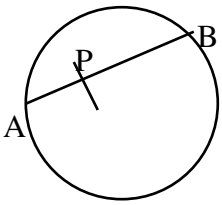
Definición 4.11. Sea P un punto cualquiera y considérese una circunferencia O. El número PA•PB, donde A y B son los puntos de intersección de la circunferencia O con cualquier recta que pase por P, se llama la **potencia de P respecto de la circunferencia O.**

La palabra **potencia** fue introducida por el geómetra suizo **Jacob Steiner** (1796–1863).



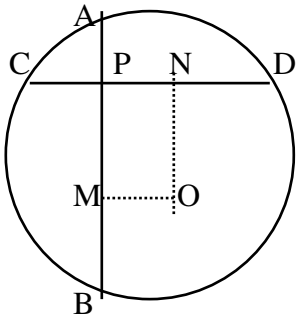
Problema #4.49. Dos cuerdas de una circunferencia se cortan en P. Las longitudes de los segmentos de una cuerda son 4 y 6. Si la longitud de un segmento de la otra cuerda es 3, determínese la longitud del otro segmento.
Solución:
La potencia de P respecto de la circunferencia O es 4•6 = 3x y así x = 8.

Problema #4.50. Sea P uno de los puntos de trisección de la cuerda AB de longitud 12 en una circunferencia O. Halle la potencia de P respecto de la circunferencia.



Solución:
Se tiene que AP + PB = AB = 12 y 2•PB = AP. Luego, 2•BP + BP = 12 y así 3•BP = 12. Por ende, BP = 4 y AP = 8, y la potencia de P respecto de una circunferencia O es AP•PB = 4 x 8 = 32.

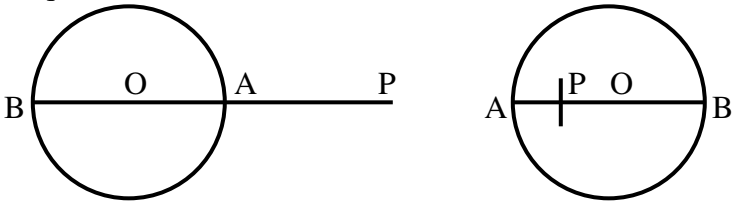
Problema #4.51. Dos cuerdas AB, CD de una circunferencia O de radio k son perpendiculares entre sí y se cortan en P tal que AP = 2, PB = 12 y CP = 4. Halle el radio k.
Solución:
La potencia del punto P respecto de la circunferencia O es AP•PB = PC•PD,



es decir, 2 x 12 = 4•PD. Así, PD = 6. Sean M y N las proyecciones O sobre AB y CD. Entonces M y N son los puntos medios de esas cuerdas y se tendrá que ON = PM = AM – AP = 7 – 2 = 5. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo NOD se tiene que $k^2 = OD^2 = ON^2 + ND^2 = 25 + 25 = 50$. Por tanto, $k = 5\sqrt{2}$.

Teorema 4.23. La potencia de un punto P respecto de una circunferencia O de radio k es el número $OP^2 - k^2$ o $k^2 - OP^2$ según que P sea exterior o interior a una circunferencia O.

Demostración:

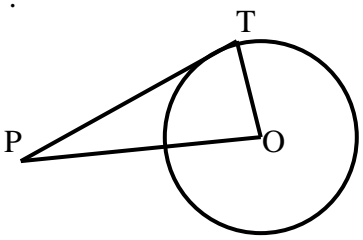


CASO 1. P es exterior a la circunferencia O

Sea PAB la secante que pasa por O y P. Entonces la potencia del punto P respecto de la circunferencia O es PA•PB = (OP – OA)•(OP + OB) = (OP – k)•(OP + k) = $OP^2 - k^2$.

CASO 2. P es interior a la circunferencia O

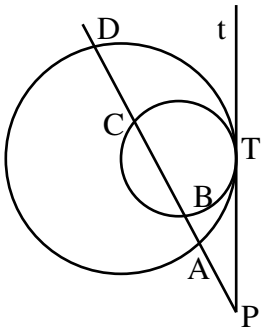
Trace por P el diámetro AB. Entonces la potencia del punto P respecto de la circunferencia O está dada mediante PA•PB = (AO – OP)•(OB + OP) = (k – OP)•(k + OP) = $k^2 - OP^2$.



Teorema 4.24. La potencia de un punto P, exterior a una circunferencia O, respecto de una circunferencia O es igual a PT^2, donde T es el punto de contacto de la tangente a ella trazada por P.

Demostración:

Se tiene que $OP^2 = OT^2 + PT^2$ aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OPT, rectángulo en T. Por tanto, $PT^2 = OP^2 - OT^2 = OP^2 - k^2$. Aplíquese el teorema anterior.



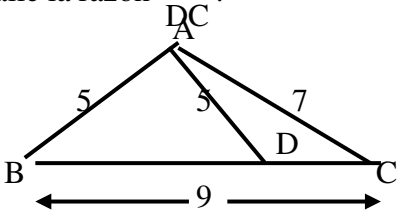
Problema #4.52. En la figura las circunferencias son tangentes interiormente a t en T. P es un punto de t, distinto de T. Entonces $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}$.

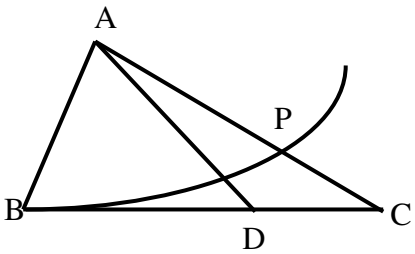
Solución:

Por el teorema anterior se tiene que PT^2 = PA•PD y PT^2 = PB•PC. Ya que los primeros miembros de las dos igualdades anteriores son iguales se sigue que PA•PD = PB•PC. Luego, $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}$.

Problema #4.53. En un triángulo ABC se tiene que AB = 5, AC = 7 y BC = 9. Sea D un punto en BC de modo que AD = 5. Halle la razón $\frac{BD}{DC}$.

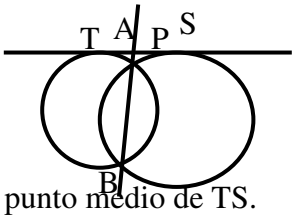
Solución:





Trace la circunferencia A de radio 5 que pasará por B y D y corta a AC en un punto P de modo que AP = 5. Luego, PC = AC − AP = 7−5 = 2. Sea Q el punto diametralmente opuesto a P. Usando la potencia de C respecto de la circunferencia A resulta que CP•CQ = CD•CB, o sea, 2•12 = CD•9. Se ve que CD = 8/3. Por tanto, BD = BC − CD = 9 − 8/3 = 19/3 y se tiene que, $\frac{BD}{DC} = \frac{19/3}{8/3} = \frac{19}{8}$.

Problema #4.54. Supóngase que las circunferencias O y C se cortan en dos puntos A y B y sean T y S los puntos de tangencia de una tangente común exterior a ambas circunferencias. Entonces la recta AB biseca al segmento TS.



Solución:
Sea P la intersección de AB con TS. La potencia de P respecto de una circunferencia O es PT^2 = PA•PB, y la potencia de P respecto de C es PS^2 = PA•PB. Al ser iguales los segundos miembros resulta que $PT^2 = PS^2$.
Al ser las bases de las potencias números positivos resulta que PT = PS y P es el punto medio de TS.

Teorema 4.25. El lugar geométrico de un punto cuyas potencias respecto de dos circunferencias dadas sean iguales es una recta perpendicular a la recta que pasa por los centros.
Demostración:
Dadas las circunferencias O y C de radios k y s, si P es un punto del lugar geométrico requerido, entonces $OP^2 - k^2 = CP^2 - s^2$ por el teorema 7.23. Luego, $OP^2 - CP^2 = k^2 - s^2$ es una constante. Aplíquese el teorema 6.51.

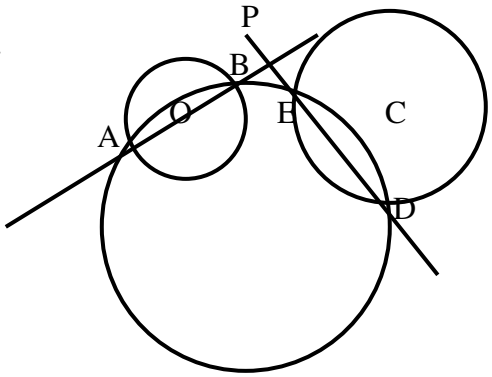
Definición 4.12. La recta dada en el teorema anterior se llama **eje radical** de las dos circunferencias.

Problema #4.55. Si las circunferencias O y C se cortan en dos puntos A y B, entonces la recta AB es el eje radical de ambas circunferencias.
Solución:
Las potencias de A y B respecto de ambas circunferencias son iguales a cero. Por tanto, A y B están en el eje radical.

Teorema 4.26. Los ejes radicales de tres circunferencias, cuyos centros no son colineales, tomados de dos en dos son concurrentes.
Demostración:
Sean las tres circunferencias O, C, P donde sus centros no sean colineales. Sea X el corte del eje radical de las dos primeras circunferencias con el eje radical de las dos últimas circunferencias. Las potencias de X respecto de las dos primeras circunferencias son iguales y las potencias con respecto a la dos últimas también son iguales. Por tanto, las potencias de X respecto de las circunferencias O y P son iguales. Así, X está en el eje radical de esta dos últimas circunferencias.

Definición 4.13. El punto común dado en el teorema anterior se llama el **centro radical** de las tres circunferencias.

Los términos **eje** y **centro radicales** fueron introducidos en 1813 por **Louis Gaultier**.

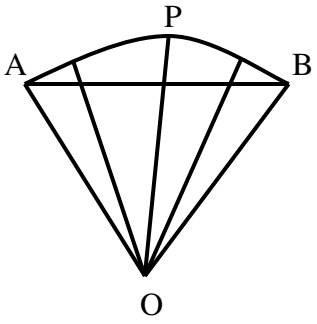


Problema # 4.56. Trace el eje radical de dos circunferencias dadas.
Solución:
Sean las circunferencias O y C las dos circunferencias dadas. Si ellas se cortan en A y B, entonces la recta AB es su eje radical por el ejemplo anterior. Si ambas circunferencias son tangentes su eje radical es la tangente común. Supóngase entonces que ambas circunferencias no tienen puntos en común. Trace una nueva circunferencia que corte a la circunferencia O en A y B, y corte a la circunferencia C en D y E. Las rectas AB, DE se cortan en un punto P. La perpendicular a OC que pasa por P es la solución pedida puesto que P es el centro radical de las tres circunferencias.

Para determinar el área de figuras circulares es menester usar el cálculo diferencial e integral y no se hará en este libro. Se escribirán las fórmulas necesarias sin demostración alguna.

Definición 4.14. Sean A y B dos puntos distintos de una circunferencia O de radio k.

1. El conjunto de los puntos del plano que están en el círculo O y en el interior del ángulo AOB se llama **sector circular** de **centro** O y **radio** k.
2. El conjunto de puntos que está en el sector circular de centro O y radio k y que no esté en el triángulo AOB se llama **segmento circular** de **centro** O y **radio** k.
3. El número que se obtiene al dividir la longitud del arco AB sobre el radio k se llama medida del ángulo AOB en **radianes**.



Problema #4.57. En la figura se tiene un sector circular OAPB de centro O y radio OA. Se tiene el segmento circular APB de centro O y radio OA.

Los antiguos matemáticos griegos sabían que la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es una constante. Esta constante es el número irracional $\pi = 3{,}1415926\ldots$ llamado **número pi**.

A1. La longitud de la circunferencia de radio R es $L = 2\pi \bullet R$.
A2. La longitud de un arco α de radio R dado en radianes es $s = \alpha \bullet R$.
A3. El área de la circunferencia de radio R es $S = \pi \bullet R^2$
A4. El área de un sector circular de radio R y ángulo α dado en radianes es $S = \frac{1}{2} \bullet \alpha \bullet R^2$

Problema #4.58. Al dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro 2R se obtiene la medida 2π en radianes para la circunferencia. O sea, 2π radianes equivalen a 360º. Luego,

$$30º = \frac{360º}{12} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$
$$60º = \frac{360º}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$
$$45º = \frac{360º}{8} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$
$$90º = \frac{360º}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$
$$180º = \frac{360º}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

El intercambio entre grados y radianes también puede hacerse mediante el uso de la regla de tres.

Problema #4.59. ¿Cuántos radianes son 144º?
Solución:
Se puede escribir 2π ——— 360º
x ——— 144º. Por ende, $x = \frac{2\pi \bullet 144}{360} = \frac{4\pi}{5}$ radianes.

Problema #4.60. ¿Cuánto mide un ángulo de una circunferencia de radio 15 mts. si el arco determinado por sus lados es las dos quintas partes de una circunferencia? ¿Cuánto vale su longitud?
Solución:
La medida es $\frac{2}{5} \bullet 360° = 144°$. El ángulo en radianes por el ejemplo anterior es $\frac{4\pi}{5}$ por lo que su longitud está dada mediante A2, y es $s = \frac{4\pi}{5} \bullet 15 = 6\pi$ mts.

Nótese que la medida de un arco está dada en medida de ángulos mientras que la longitud está dada en unidades de longitud.

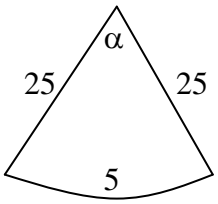
Problema #4.61. En una circunferencia de radio R = 2 un ángulo central mide 60°. Halle la longitud s de su arco.
Solución:

Como 60º es $\frac{\pi}{3}$ radianes se tiene de A2 que $s = \frac{\pi}{3} \bullet 2 = \frac{2\pi}{3}$.

Problema #4.62. El minutero de un reloj mide 4 cms. ¿Qué recorrido realiza la punta de la manecilla en 15 minutos?
Solución:
Los 15 minutos recorridos representan la cuarta parte de la circunferencia. Su ángulo central es

$\frac{1}{4} \bullet 360° = 90° = \frac{\pi}{2}$ radianes. Aplicando A2 se obtiene $s = \frac{\pi.}{2} \bullet 4 = 2\pi$ cms.

Problema #4.63. El final de un péndulo de 25 cms. describe un arco de 5 cms. ¿Qué ángulo recorre el péndulo al balancearse?
Solución:



Haciendo s = 5 y R = 25 en A2 se tiene que $5 = \alpha \bullet 25$. Luego $\alpha = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ de radianes.

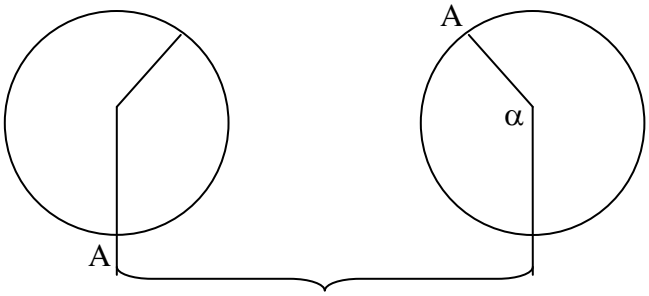
Problema #4.64. Halle el área de un sector circular si su ángulo central es de 40° y su radio es de 3 cms.
Solución:

El ángulo central en radianes es $\frac{2\pi}{9}$ y de A4 se tiene que el área es $S = \frac{1}{2} \bullet \frac{2\pi}{9} \bullet 3^2 = 2\pi$.

Problema #4.65. Halle el diámetro de una circunferencia si el área de un sector circular es 248 y el ángulo central mide 72°.
Solución:

El ángulo de 72º es $\frac{2\pi}{5}$ radianes. De A4 se ve que $248 = \frac{1}{2} \bullet \frac{2\pi}{5} \bullet .R^2$. O sea, $R^2 = \frac{248 \bullet 5}{\pi} \approx 394{,}7$. Al extraer raíces cuadradas vemos que $R \approx 19{,}87$ y su diámetro será aproximadamente $2R \approx 39{,}73$.

Problema #4.66. Una rueda de 1 metro de radio gira en un camino recto donde hay marcas rojas a cada 3 metros de separación. La rueda al ir dando vueltas completas deja una marca azul en el camino. Cuando la rueda empieza a rotar está en contacto con el piso con una marca azul.
(a) ¿Cuál es la separación de las marcas azules?
(b) ¿En cuál ángulo ha girado la rueda para ir de una marca azul a otra?
(c) ¿Coincidirá una marca azul con una marca roja?
Solución:
Una rueda que se mueve sin deslizarse recorre una distancia igual a la longitud del arco que describe.



Si se hace $\alpha = 360°$ se tiene que $\alpha = \dfrac{\pi \bullet R \bullet 360}{180} = 2\pi \bullet R$, y se ve que la longitud del arco descrito es igual a la longitud de la circunferencia. Por tanto, en una **rotación** o **vuelta completa** la rueda recorre su longitud.

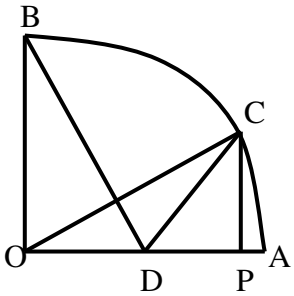
(a) Ya que las marcas azules se obtienen en una rotación de la rueda la separación entre dos marcas azules es igual a la longitud de la rueda, es decir, 2π metros.

(b) El ángulo recorrido es una vuelta completa es de 360°

(c) Supóngase que en un punto X del camino coinciden una marca azul con una marca roja. Si la rueda ha dado n rotaciones para llegar a ese punto, entonces la distancia recorrida por dicha rueda es de $n.2\pi.1 = 2n\pi$, mientras que la distancia hasta la marca roja será de 3m con m entero. Ya que las marcas coinciden se tendrá que $2n\pi = 3m$, o sea, $\pi = \dfrac{3m}{2n}$. El primer miembro es un número irracional mientras que el segundo miembro es un número racional. Por consiguiente, nunca coincidirán las marcas azules y rojas.

Problema #4.67. Sea O el centro de un cuarto de círculo de radio OA = OB =1. Sea C un punto del arco AB tal que $\angle BOC = 60º$. Si D es un punto del radio OA tal que el área de la sección limitada por el ángulo BDC y el arco BC sea igual a la mitad del área del cuarto de círculo. ¿Cuánto mide OD?

Solución:



$[OACB] = [OCB] + [ODC] + [DAC] = [OCB] + \dfrac{1}{2}[OADB] + [OAC] - [ODC]$.

Luego, $\dfrac{1}{2}[OACB] = [OCB] + [OAC] - [ODC]$. Pero,

$\dfrac{1}{2}[OADB] = \dfrac{1}{2} \bullet \dfrac{1}{4} \bullet \pi \bullet 1^2 = \dfrac{\pi}{8}$, $[OCB] = \dfrac{1}{2} \bullet OC \bullet \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$, $[OAC] = \dfrac{1}{2} \bullet \dfrac{\pi}{6} \bullet 1^2 = \dfrac{\pi}{12}$. $[ODC] = \dfrac{1}{2} \bullet OD \bullet CP$ donde P es la proyección de C sobre OA. Ya que el ángulo COP mide 30º se sigue que PC es la mitad de OC. Así, $[ODC] = \dfrac{OD}{2}$.

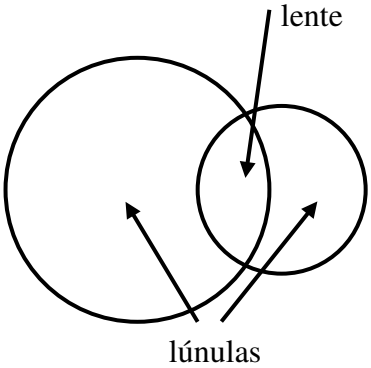
Colocando estos valores en la igualdad inicial se tiene que $\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{OD}{2}$. Luego, $OD = \dfrac{\pi}{4}$.

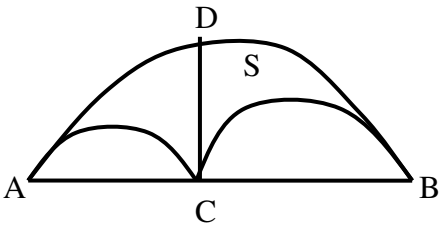
Definición 4.15.

1. Considérense dos circunferencias O y C que se cortan en dos puntos. La región encerrada por una de las circunferencias que esté fuera de la otra se llama **lúnula.** La parte común encerrada por ambas circunferencias se llama **lente**.

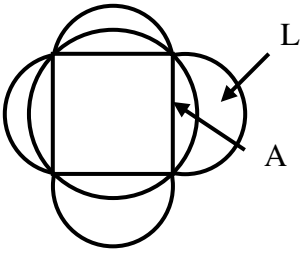
2. Un **arbelos** es la región encerrada por una semicircunferencia de diámetro AB y dos semicircunferencias de diámetros AC y CB donde C es un punto entre A y B. Esas semicircunferencias están situadas del mismo lado del diámetro AB.

La palabra latina *lúnula* significa pequeña luna mientras que la palabra griega *arbelos* significa trinchete de zapatero.



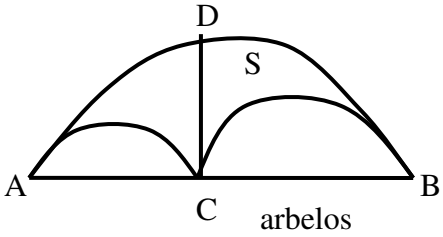


arbelos



Problema #4.69. En la figura se tiene un cuadrado cuyos vértices están en una circunferencia. Se trazan circunferencias cuyos diámetros son los lados del cuadrado formándose lúnulas con la circunferencia anterior. Pruebe que el área de las cuatro lúnulas es igual al área del cuadrado.

Solución:
Sea L el área de una lúnula y sea A el área de una de las partes del círculo que sobresale en cada lado como se indica en la figura. Sea a el lado del cuadrado. El radio del círculo será $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ que se obtiene usando Pitágoras. Luego, el área del círculo es $\pi \bullet \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{2}$. A será la cuarta parte del área del círculo menos el área del cuadrado, es decir, $A = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}$. Pero, L + A es igual al área de la semicircunferencia de diámetro el lado del cuadrado, o sea, $L + A = \frac{\pi a^2}{8}$. Luego, $L = (L + A) - L = \frac{a^2}{4}$. El área de las cuatro lúnulas es $4L = a^2$ que es el área del cuadrado.



arbelos

Problema #4.70. En la figura a la derecha S representa el área del arbelos. Se traza por C la perpendicular a AB hasta cortar la semicircunferencia de diámetro AB en el punto D. Pruebe que S es igual al área de la circunferencia de diámetro CD.

Solución:
El área del arbelos es el área de la semicircunferencia de diámetro AB menos las áreas de las semicircunferencias de diámetros AC y BC, o sea,

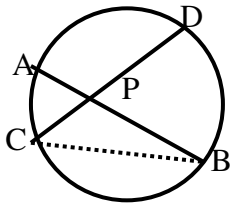
$S = \pi \bullet \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \pi \bullet \left(\frac{AC}{2}\right) - \pi \bullet \left(\frac{BC}{2}\right)^2$. Al tomar factor común se ve que

$$S = \frac{\pi}{8} \bullet (AB^2 - AC^2 - BC^2) \qquad (*)$$

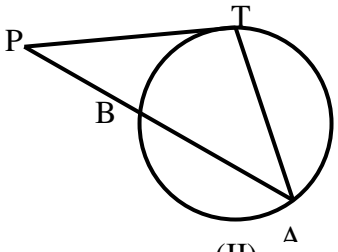
Aplicando Pitágoras en los triángulos rectángulos CAD, BCD y ABD se tiene que $AD^2 = AC^2 + CD^2$, $BD^2 = CD^2 + BC^2$ y $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Luego, $AB^2 = AD^2 + BD^2 = (AC^2 + CD^2) + (CD^2 + BC^2)$. Luego, $AB^2 - AC^2 - BC^2 = 2 \bullet CD^2$. Colocando este valor en (*) resulta $S = \frac{\pi}{8} \bullet 2 \bullet CD^2 = \pi \bullet \left(\frac{CD}{2}\right)^2$ que es el área de la circunferencia de diámetro CD.

Ejercicios 4.

1.



(I)



(II)

En (I) AB y CD son cuerdas en una circunferencia O que se cortan en P. En (II) PT es tangente a la circunferencia O en T.

(I) (a) Si arc{AC} = 67º y arc{BD} = 51º, halle ∠APC.
(b) Si arc{BC} = 205º y arc{AD} = 39º, halle ∠APC.
(c) Si ∠APC = 64º y arc{BD} = 59º, halle arc{AD}.

(II) (a) Si arc{AT} = 76º y arc{TB} = 50º, halle ∠TPA.
(b) Si ∠TPA = 15º y arc{AT} = 73º, halle arc{TB}.
(c) $PA.PB = PT^2$.

2. Una secante y una tangente paralela a ella determinan arcos iguales en una circunferencia.

3. Dos tangentes paralelas determinan arcos iguales en una circunferencia.

4. Dos circunferencias no pueden tener más de dos puntos en común.

5. Si dos circunferencias se cortan en dos puntos distintos, la recta que pasa por ellos es mediatriz del segmento determinado por sus centros.

6. Por uno de los puntos P de corte de dos circunferencias se trazan dos diámetros PA y PB, uno en cada una de ellas. Entonces AB pasa por el otro punto de intersección.

7. Si una circunferencia se divide en seis arcos iguales, cada cuerda es igual al radio.
8. Dos tangentes paralelas de una circunferencia son perpendiculares a uno de sus diámetros.
9. Sea P un punto que no está en una circunferencia O. Los puntos de la circunferencia que están más cerca y más lejos de P están en la intersección de ella con la recta OP.
10. Se llama **normal** a una circunferencia O a la perpendicular a una tangente a la circunferencia en uno de sus puntos. Todas las normales a una circunferencia pasan por su centro.
11. Dos circunferencias son secantes si y sólo si la distancia entre sus centros es menor que la suma de sus radios.
12. El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos es la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos.
13. En una circunferencia O se trazan un diámetro AB y una cuerda CD paralela a AB e igual a k. Por el punto medio M de BD se traza una perpendicular a AB hasta cortar la circunferencia en un punto P tal que PD > PB. Si Q es el punto medio de CD, entonces AB biseca al segmento PQ.
14. En una circunferencia O se prolonga una cuerda AB en una longitud BC igual a k. Se traza la recta CFOE que pasa por O y C. Entonces $\angle AOE = 3\angle ACE$.
15. En una circunferencia O se traza un diámetro AB y un radio OC perpendicular a AB. Se prolonga el diámetro AB a ambos lados de una circunferencia O en longitudes iguales AE = BD. Las rectas CE y CD cortan a la circunferencia O en F y G. Entonces $\angle CFO = \angle CGO$.
16. Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia O. Sea H su ortocentro. Si N es el punto medio de AH, P es el punto medio de AB y Q es el punto medio de AC, entonces OQNP es un paralelogramo.
17. En una circunferencia O un diámetro AB y una cuerda AC forman en A un ángulo de 30º. La tangente a la circunferencia O en C corta la recta AB en D. Entonces el triángulo ACD es isósceles.
18. Por el punto medio M del segmento AB se traza una recta cualquiera m. Se traza B` simétrico de B respecto de m y se traza la perpendicular B`N a MB`(N sobre m). Entonces NB es tangente a la circunferencia de diámetro AB.
19. Sea A un punto de una circunferencia O. Se traza en A la tangente AP de longitud dada d. Trace el lugar geométrico de P cuando A recorre la circunferencia O.
20. Por el punto de contacto T de dos circunferencias tangentes exteriormente se traza una secante que corta a una circunferencia en A y a la otra en B . Entonces las tangentes en A y B son paralelas.
21. Una circunferencia O y O`(k`) se cortan en A y B. Por A se trazan los diámetros AC y AD. Entonces CD es perpendicular a AB y pasa por B.
22. Se traza una cuerda que corta a dos circunferencias concéntricas: a la de menor radio en A y B, y a la otra en C y D. Entonces AC = BD.
23. Se tienen dos circunferencias concéntricas. Entonces las cuerdas en la circunferencia mayor que son tangentes a la otra circunferencia son iguales.
24. En una circunferencia O se trazan los radios OA y OB. Se traza una cuerda MN perpendicular a la bisectriz del ángulo AOB. MN corta a OA en F y a OB en G. Entonces MF = NG y FA = GB.
25. La cuerda más pequeña que puede trazarse por un punto interior de una circunferencia es perpendicular al diámetro que pasa por dicho punto.

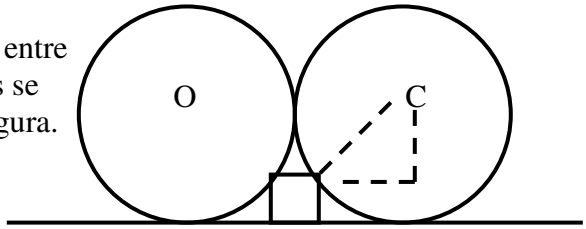
26. En un triángulo ABC se trazan las alturas AD y BE. La circunferencia de diámetro AB pasa por D y E. Si ∠BAC = 64º calcule ∠ADE.
27. Sea una semicircunferencia de diámetro AB. Trace una cuerda AC de modo que ∠CAB = 20º. Trace la tangente XDY paralela a AC y punto de contacto D. Halle ∠YDC y ∠XDA.
28. Dos circunferencias son tangentes en A. Se trazan dos secantes BAC y B`AC` por ese punto. Entonces BB` y CC` son paralelas.
29. En el extremo A de un diámetro AB de una circunferencia se traza una cuerda AC, y en el otro extremo B se traza la tangente. La bisectriz del ángulo CAB corta la recta BC en F, a la circunferencia en H y a la tangente en D. Entonces BD = BF y FH = HD.
30. Sea ABC un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia O. Sea I el incentro del triángulo. Sean E y los cortes de BI y CI con la circunferencia O. Entonces el cuadrilátero AFIE es un rombo. Calcule ∠IAC − ∠IAB en función de los ángulos de la base.
31. Sea A un punto de Una circunferencia O y sea P un punto interior a una circunferencia O. Por el punto medio de AP se traza la cuerda BC perpendicular a AP. PB corta a la circunferencia O en B` y PC la corta en C`. Entonces ∠BB`C` = ∠BC`A.
32. Dos circunferencias se cortan en B y C. Por B se traza una secante MBN. Las tangentes por M y N forman el mismo ángulo que el de las tangentes por B.
33. Si dos circunferencias iguales son tangentes exteriormente, entonces todo punto que equidiste de sus centros está en la tangente común.
34. Sea P un punto que está a una distancia de 20 del centro de O(5). Halle las longitudes de las tangentes de P a Una circunferencia O.
35. Sea AB un diámetro de una circunferencia O y sea AC una cuerda cualquiera. La recta que pasa por O y es paralela a AC corta en D a la tangente a la circunferencia O en C. Entonces DB es tangente a Una circunferencia O en B.
36. En la circunferencia O de radio 5/2 una cuerda dista 5 de O. Halle la longitud de la cuerda.
37. Una cuerda y un diámetro de una circunferencia O tienen un extremo común. Si el diámetro es 40 y la cuerda es 24, ¿a qué distancia de O está la cuerda?
38. Una cuerda de una circunferencia O mide 16 y está a la distancia 15 de O. Halle k.
39. El lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de longitud dada de una circunferencia es otra circunferencia concéntrica con aquélla.
40. Si dos cuerdas en una circunferencia tienen un extremo común y forman ángulos iguales con el diámetro que pasa por dicho extremo, entonces las cuerdas son iguales.
41. Si dos cuerdas (que no son diámetros) iguales de una circunferencia se cortan en un diámetro, entonces forman ángulos iguales con dicho diámetro.
42. Determine cómo se halla el centro y el radio de una circunferencia si se conoce solamente un arco de ella.
43. Un diámetro perpendicular a una cuerda biseca los arcos subtendidos por la cuerda.
44. Si un ángulo inscrito en un arco es recto, entonces dicho arco es una semicircunferencia.
45. Si el diámetro AB de una circunferencia corta perpendicularmente a la cuerda CD en M, entonces $CD^2 = 4.AM.BM$.
46. Si el ángulo que forman dos tangentes a una circunferencia trazada desde un punto exterior mide 60º, entonces los segmentos tangentes forman un triángulo equilátero con la cuerda que une los puntos de tangencia.
47. La tangente común exterior a las circunferencia O O` de radios 5 y 17 mide 16. Halle OO`.

48. Dos circunferencias de diámetros 4,86 y 3,74 son tangentes exteriormente. Halle la distancia entre sus centros.
49. Si dos circunferencias se cortan en A y B, entonces el ángulo formado por las tangentes en A y el ángulo formado por las tangentes en B son iguales. Este ángulo común se llama el **ángulo entre las dos circunferencias**. Dos circunferencias se dicen **ortogonales** si el ángulo es recto.
50. Dos circunferencias secantes son ortogonales si y sólo si los radios que pasan por los puntos comunes son perpendiculares.
51. Si dos circunferencias son ortogonales, entonces la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une sus centros, pasa por los puntos comunes.
52. Describa el recíproco de la proposición del ejercicio anterior y demuéstrela.
53. Si dos circunferencias son ortogonales, el radio de una de ellas que pasa por uno de los puntos comunes, es tangente a la otra circunferencia. ¿Es verdadero su recíproco?
54. Si P es un punto de la semicircunferencia de diámetro AB, entonces las circunferencias APO y BPO son ortogonales.
55. Si dos circunferencias son ortogonales, entonces cualquier diámetro que interseca la otra circunferencia es cortada armónicamente por dicha circunferencia.
56. Establezca y demuestre el recíproco del ejercicio anterior.
57. Una condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias sean ortogonales es que la potencia del centro de una de ellas, respecto de la otra, sea igual al cuadrado del radio correspondiente.
58. Dos circunferencias O y O` de radios k y k`, que se cortan en A y B, son ortogonales si y sólo si AB•OO` = 2kk`.
59. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Las circunferencias que tienen como diámetro a AH y BC son ortogonales.
60. Sean AB y AC las tangentes a una circunferencia O con puntos de contacto B y C. Sea E la proyección ortogonal de C sobre el diámetro BD. Entonces BE.BO = AB.CE y $\frac{AB}{\sqrt{BE}} = \frac{BO}{\sqrt{ED}}$.
61. Si un triángulo inscrito en una circunferencia tiene un ángulo constante, entonces el lado opuesto es tangente a una circunferencia tangente con la circunferencia dada.
62. El centro de la circunferencia de los los nueve puntos de un triángulo es el punto medio del segmento determinado por el circuncentro y el ortocentro.
63. El centro de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo está en la recta de Euler.
64. La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente al incírculo y a los excírculos del triángulo.
65. Sea AB un diámetro de Una circunferencia O. Se trazan por B la tangente t y por A una secante que corte a Una circunferencia O en M y a t en N. Entonces AM.AN = $4k^2$.
66. Los extremos de dos diámetros perpendiculares en una circunferencia O son los vértices de un cuadrado.
67. Calcule el lado de un triángulo equilátero circunscrito a O(15).
68. En una circunferencia O de diámetro AB se trazan dos cuerdas AC y AD de modo que ∠BAC = 30º y ∠BAD = 45º. Halle el perímetro del cuadrilátero ABCD.
69. La circunferencia que pasa por los vértices A, B, C de un paralelogramo ABCD corta a DA y BC en los puntos A` y C`. Entonces A`B:A`C` = A`C:A`B..

70. Un punto P de una circunferencia O se proyecta ortogonalmente en N sobre uno de sus diámetros AOB. Se traza PQ = 2.AN a lo largo de la semirrecta PQ. Si AQ corta a Una circunferencia O de nuevo en el punto S, entonces $\angle AOS = 3\angle AOP$.
71. Desde el punto S se trazan las tangentes SA y SB, y la secante SPQ a la misma circunferencia. Entonces AP:AQ = BP:BQ.
72. Una cuerda variable AB de una circunferencia dada es paralela a un diámetro fijo que pasa por un punto dado P. La suma de los cuadrados de las distancias de P a los extremos de AB es constante, e igual al doble del cuadrado de la distancia de P al punto medio del arco AB.
73. Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia. Si P es un punto en el interior de esa circunferencia, al trazar las rectas PA, PB, PC cortan de nuevo a la circunferencia en los puntos X, Y, Z que forman un nuevo triángulo. Halle el punto P de modo que el triángulo XYZ sea equilátero.
74. Dos cuerdas AB y CD en una circunferencia O son perpendiculares y se cortan en un punto P. La recta que pasa por P, perpendicular a la cuerda AC, biseca la cuerda BP.
75. Un cuadrado ABCD está inscrito en una circunferencia O y P es un punto cualquiera de Una circunferencia O. Entonces la suma de los cuadrados de las distancias de P a los vértices es constante. Halle esta constante si el lado del cuadrado es 8.
76. Un diámetro AB de O(37) se extiende hasta un punto P de modo que AP = 77. Se traza por P otra secante PCD de modo que PD = 33. Halle $\angle APD$.
77. En un triángulo ABC sus lados son AB = 12, BC = 18 y AC = 25. Se traza una semicircunferencia de centro O cuyo diámetro esté en AC y que sea tangente a AB y BC. Halle OA y el diámetro de la semicircunferencia.
78. Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia O. Se traza el diámetro AD y se traza por D la tangente hasta cortar a AB y AC en E y F. Si AB = 4, AC = 6 y BE = 8, halle CF, $\angle DAF$ y BC.
79 ABCDE es un pentágono regular inscrito en una circunferencia O y P es un punto del arco BC. Entonces PA+PD = PB+PC+PE.
80. ABCDEF es un hexágono regular inscrito en una circunferencia O y P es un punto del arco BC, entonces PE+PF = PA+PB+PC+PD.
81. Una recta trazada por el vértice A del triángulo BAC corta al lado opuesto BC en D y al circuncírculo en P. Entonces $\frac{1}{PD} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.
82. El simétrico del ortocentro de un triángulo respecto de uno de sus lados es un punto que está en el circuncírculo del triángulo.
83 Un triángulo inscrito en O(5) tiene dos lados que miden 5 y 6. Halle la medida del tercer lado.
84. Un cuadrado ABCD de lado 8 está inscrito en una circunferencia O. Si E es un punto de una circunferencia O, halle $AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2$.
85. Una circunferencia de diámetro AC es cortada por una secante en B y D. La secante y el diámetro se cortan en un punto P, exterior a la circunferencia. Sean E y F las proyecciones ortogonales de A y C sobre la secante. Halle DF si EB = 2 y BD = 6.
86. En el triángulo ABC de lados AB = 12, BC = 18 y AC = 25, se traza una semicircunferencia cuyo diámetro está en AC, y es tangente a AB y BC. Si O es el centro de la circunferencia, halle AO.

87. AB es una cuerda de una circunferencia O y M es su punto medio. CMD es otra cuerda de Una circunferencia O. Se traza una semicircunferencia de diámetro CD. Se traza por M la perpendicular a CD hasta cortar la semicircunferencia en P. Entonces PM = AM.
88. Una circunferencia O tiene como diámetro la altura AD en el triángulo ABC. Si Una circunferencia O corta AB y AC en E y F, halle EF:BC.
89. PA y PB son tangentes a Una circunferencia O y PCD es una secante. Halle BC si AC = 9, AD = 12 y BD = 10.
90. Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. BC = 16. El diámetro del circuncírculo del triángulo ABC es 20. Halle AH.
91. Dos circunferencias son tangentes interiormente en el punto T y una cuerda AB de la circunferencia mayor es tangente en C a la circunferencia menor. PB y PAQ cortan la circunferencia menor en E y D. Halle AC si AB = 15, PE = 2 y PD = 3.
92. Sean A(k) y B(k) dos circunferencias iguales. que son tangentes exteriormente en el punto T. La cuerda TM en A(k) es perpendicular a la cuerda TN en B(k). Entonces ABNM es un paralelogramo.
93. El centro de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es el punto medio del segmento que une el circuncentro con el ortocentro.
94. Sea P un punto del circuncírculo de un triángulo ABC y sean X,Y,Z las proyecciones ortogonales de P sobre los lados AB,BC,CA. Sean U,V,W puntos de modo que X,Y,Z sean los puntos medios de AU,BV,CW. Entonces U,V,W están en una recta que pasa por el ortocentro del triángulo
95. El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son los excentros.
96. Dos circunferencias son tangentes internamente en T. La cuerda AB de la circunferencia mayor es tangente en P a la circunferencia menor. Entonces TP es bisectriz del ángulo ATB.
97. Los puntos donde las alturas cortan al circuncírculo forman un triángulo semejante al triángulo órtico.
98. Trace la recta de Simpson para cada vértice de un triángulo.
99. Los lados opuestos de un cuadrilátero cíclico se cortan en V y los otros dos lados se cortan en W. Entonces las bisectrices de los ángulos en V y W son perpendiculares.
100. Desde un punto P, exterior a una circunferencia O, se trazan las tangentes a ella que la tocan en T,S. Sea K la proyección ortogonal de S sobre el diámetro TQ que pasa por T. Entonces TK.TO = PT.SK y PT $\sqrt{QK}$ =TO $\sqrt{TK}$
101. Sean OA,OB dos radios perpendiculares en una circunferencia O. Trace una recta paralela a AB que corte a OA en P, a OB en Q y a Una circunferencia O en M y N de modo que P esté entre M y Q. Halle k si MP = $\sqrt{56}$ y PN = 12.
102. ABCD es un cuadrilátero cíclico. Supóngase que la diagonal BD biseca a AC. Halle BC si AB = 10, AD = 12 y CD = 11.
103. Supóngase que una circunferencia O y C(s) son tangentes externamente en T. La cuerda TM en una circunferencia O es perpendicular a la cuerda TN en C(s). Entonces MN es igual y paralela a OC.
104. Se inscribe una circunferencia en un triángulo de lados 10, 10, 12. Una segunda circunferencia menor se inscribe tangente al la primera circunferencia y a los lados iguales del triángulo. Halle el radio de la segunda circunferencia.

105. Sobre el lado AB de un cuadrado ABCD se traza externamente el triángulo rectángulo ABF, de hipotenusa AB. Halle EF, donde E es el centro del cuadrado, si AF = 6 y BF = 8. resuelva el problema si F está dentro del cuadrado.
106. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero ABCD se cortan en E. Halle AB si AE = 2, BE = 5, CE = 10, DE = 4 y BC = $\frac{15}{2}$.
107. Las rectas que pasan por los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cíclico y son perpendiculares a los lados opuestos son concurrentes.
108. El lado BC de un triángulo variable ABC es fijo y la suma AB+AC = k es constante. La recta DP trazada por el punto medio D de BC y paralela a AB corta la paralela CP por C a la bisectriz interior AW del ángulo A en P. El lugar geométrico de P es una circunferencia de centro D.
109. Sean M y N los puntos medios de dos cuerdas no paralelas AB y CD en la circunferencia O de rdio k. Entonces AB = CD si y sólo si el triángulo OMN es isósceles de base MN. ¿Qué ocurre si las cuerdas son paralelas?
110. Hay dos circunferencias iguales de radios R tangentes entre si y tangentes a una recta. Entre ambas circunferencias se coloca un cuadradito de lado x como se indica en la figura. Halle la relación entre R y x.



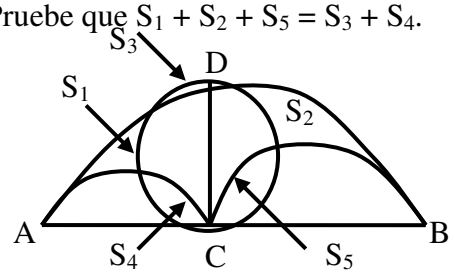
111. Se traza un cuarto de círculo OAB de centro O y de radio OA = OB = R. Se traza la semicircunferencia de diámetro OA hacia adentro de OAB. Se traza la semicirunferencia cuyo diámetro está en OB hacia dentro de OAB tal que sea tangente a OAB en A y sea tangente a la semicircunferencia de diámetro AB. Se traza una circunferencia de radio r que sea tangente exteriormente a ambas semicircunferencias y sea tangente interiormente en T al cuarto de círculo OAB. Pruebe que R = 6r.
112. Trace la circunferencia C de diámetro AB. Trace las circunferencias A y B de radios R y r que sean tangentes en el punto D que está entre A y B. Trace una circunferencia E que sea tangente exteriormente a las circunferencias A y B y sea tangente interiormente a la circunferencia C. pruebe que el radio x de la circunferencia E es un cuarto de la razón armónica de R y r.
113. Sea CD la altura de la hipotenusa AB del triángulo rectángulo ABC. Sean E y F las proyecciones de D sobre AC y BC. Si x, a y b son los inradios de los triángulos DEF, AED y BDF, pruebe que $x = \sqrt{a \bullet b}$.
114. Sea CD la altura de la hipotenusa AB del triángulo rectángulo ABC. Sean E y F las proyecciones de D sobre AC y BC. Si r, r_1 y r_2 son los inradios de los triángulos ABC, AED y DFB, pruebe que $r = r_1 + r_2$.

115. Sea CD la altura de la hipotenusa AB del triángulo rectángulo ABC. Sean E, F y G los incentros de los triángulos ABC, DAC y y BDC. Pruebe que FG = $r\sqrt{2}$ donde r es el inradio del triángulo ABC.
116. Sea I el incentro del triángulo ABC rectángulo en C. Trace por I la paralela a AC hasta cortar a AB y BC en D y G. Trace por I la paralela a BC hasta cortar a AC y AB en H y M. Sean r_1 y r_2 los inradios de los triángulos AHM y DGB. Pruebe que DE = $r_1 + r_2$.

117. Sea Cd la altura de la hipotenusa AB del triángulo rectángulo ABC. Sean I, U y V los incentros y sean r, r_1 y r_2 los inradios de los triángulos ABC, DAC y DCB. Si F y G son la proyecciones de U y V sobre BD, y E es la proyección de I sobre AB pruebe que $DE = FG = r_2 - r_1$ si $r_2 > r_1$.

118. Sea P un punto interior a una circunferencia O. Trace la circunferencia P tangente a la circunferencia O en el punto T.Trace por un punto C de la circunferencia P la recta tangente a ella que corte la crincunferencia O en los puntos A y B. Pruebe que TC es la bisectriz del ángulo ATB.

119. Considérese el arbelos de los puntos colineales A, C y B en ese orden y sea D el punto de la perpendicular a AB por C que corta la semicirunferencia de diámetro AB. Sea S_1 el área de la región común a la semicircunferencia de diámetro AC y la circunferencia de diámetro CD. Sea S_2 el área de la región común a la semicircunferencia de diámetro CB y la circunferencia de diámetro CD. Sea S_3 el área de la región dentro del arbelo y fuera de la circunferencia de diámetro CD. Sea S_4 el área de la región dentro del arbelo y fuera de la circunferencia de diámetro CD. Sea S_5 el área de la región dentro de la circunferencia de diámetro CD y fuera del arbelo y de las semicircunferencias de diámetros AC y CB. Pruebe que $S_1 + S_2 + S_5 = S_3 + S_4$.



120. Considérese el arbelos de base ACB como se indica en la figura. Sea S_1 el área dentro del arbelos y fuera de la semicircunferencia de diámetro AC y fuera de la circunferencia de diámetro CD. Sea S_2 el área de la región del arbelos que está fuera de la semicircunferencia de diámetro BC y fuera de la circunferencia de diámetro CD. Sea S_3 el área de la circunferencia de diámetro CD que está fuera del arbelos y fuera de la semicircunferencia de diámetro AC. Sea S_4 el área de la región común a la circunferencia de diámetro CD y la semicircunferencia de diámetro AC y sea S_5 la región común a la circunferencia de diámetro CD y la semicircunferencia de diámetro BC. Pruebe que $S_1 + S_2 = S_3 + S_4 + S_5$.

121. Considérese un arbelos como en la figura del ejercicio anterior. La circunferencia de diámetro CD corta los arcos AC y CB en los puntos U y V tales que UV es la tangente común a las semicircunferencias de diámetros AC y AB. Además, las tríadas de puntos A, U, D y B, V, D son colineales.