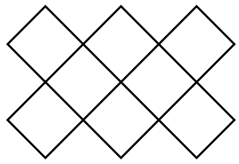
PRUEBA REGIONAL OJM 2012

Problemas y Soluciones



Problema 1 de Primer y Segundo Año. El área de la siguiente figura, construida con cuadrados idénticos, es 72 cm^2. ¿Cuál es su perímetro?

Solución: La figura se compone de 8 cuadrados, luego el área de cada uno de ellos es $72/8 = 9$ cm^2 y por lo tanto el lado de cada cuadrado mide 3 cm. El perímetro se compone de 16 segmentos de 3 cm cada uno, por lo tanto es $16 \times 3 = 48$ cm.

Problema 2 de Primer Año.
Entre los compañeros de clase de Nicolás hay el doble de niñas que de niños. Se sabe que el número total de alumnos en la clase es un múltiplo de 5, mayor que 10 y menor que 40. ¿Cuál es ese número?

Solución: Los compañeros de Nicolás son múltiplo de 3, luego el número buscado es un múltiplo de 5 entre 10 y 40 que deja resto 1 al dividirlo entre 3. Como 15 deja resto 0, 20 deja resto 2, 25 deja resto 1, 30 deja resto 0 y 35 deja resto 2, la respuesta es 25.

Problema 2 de Segundo Año.
Una hoja rectangular de papel mide 192×84 mm. La hoja se corta a lo largo de una línea recta hasta obtener dos partes, una de las cuales es un cuadrado. Luego se hace lo mismo con la parte no cuadrada que quedó, y así sucesivamente. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado más pequeño que se puede obtener con este procedimiento?

Solución: La respuesta es 12mm, ya que los cortes sucesivos producen hojas no cuadradas de dimensiones 108×84, 24×84, 24×60, 24×36, 12×36, 12×24, y en el próximo corte quedan dos hojas cuadradas de 12×12.

Solución alternativa: En general, si $a > b$ entonces $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(a - b, b)$. Por lo tanto, al ir descartando cuadrados, siempre nos quedamos con piezas tales que el mcd de sus lados es el mismo que el del rectángulo original. El proceso se detiene cuando nos queda un cuadrado, cuyo lado será entonces el mcd de los lados del rectángulo original. En este caso, $\mathrm{mcd}(192, 84) = 12$.

Problema 3 de Primer y Segundo Año. En una lista de cinco números, el primero es 2 y el último es 12. El producto de los tres primeros números es 30, el producto de los tres del medio es 90 y el producto de los últimos tres es 360. ¿Cuáles son los tres números del medio?

2				12

Solución: Si se divide el producto de los tres del medio entre el producto de los tres primeros se obtiene $90/30 = 3$, pero eso debe ser igual al cuarto entre el primero (2), luego el cuarto es 6 (también se puede llegar a esa conclusión dándole varios valores al 2º número y calculando los demás). Entonces el del medio es $360/(6 \times 12) = 5$ y el segundo es $30/(2 \times 5) = 3$.

Es claro que los tres números pueden ser hallados también en otro orden.

Solución alternativa: Si llamamos x al segundo número, entonces el tercero debe ser $30/(2x) = 15/x$. Entonces el producto del segundo y el tercero es 15, por lo tanto el cuarto es $90/15 = 6$. Luego el del medio es $360/(6\times 12) = 5$. Finalmente el segundo es $30/(2 \times 5) = 3$.

Problema 4 de Primer y Segundo Año. En un juego de fútbol el ganador obtiene 3 puntos y el perdedor 0 puntos. Si el juego termina en un empate, entonces cada equipo obtiene un punto. La Vinotinto ha jugado 38 veces y ha obtenido 80 puntos. ¿Cuál es el mayor número posible de juegos que ha perdido?

Solución: La respuesta es 10. Para obtener 80 puntos en el menor número de juegos posible la Vinotinto debe ganar 26 juegos y empatar 2 ($26\times 3+2 = 80$), es decir que requiere 28 juegos. Si jugó 38 juegos, entonces perdió a lo sumo $38 - 28 = 10$.

Problema 5 de Primer y Segundo Año. Halle todos los enteros n, $1 \leq n \leq 8$, tales que sea posible marcar algunas casillas en un tablero de 5×5 de modo tal que haya exactamente n casillas marcadas en cada cuadrado de 3×3.

Solución: Es posible para todos los enteros desde el 1 hasta el 8, como muestran los siguientes diagramas:

		X		

$n = 1$

		X		
		X		
		X		

$n = 2$

		X		
		X		
		X		
		X		
		X		

$n = 3$

		X		
		X		
	X	X		X
		X		
		X		

$n = 4$

X	X		X	X
X	X		X	X
X			X	
X	X		X	X
X	X		X	X

$n = 5$

X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X

$n = 6$

X	X	X	X	X
X	X		X	X
X	X		X	X
X	X	X	X	X
X	X		X	X

$n = 7$

X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X		X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X

$n = 8$

Problema 1 de Tercer Año. Entre los compañeros de clase de Nicolás hay el doble de niñas que de niños. Se sabe que el número total de alumnos en la clase es un múltiplo de 5, mayor que 10 y menor que 40. ¿Cuál es ese número?

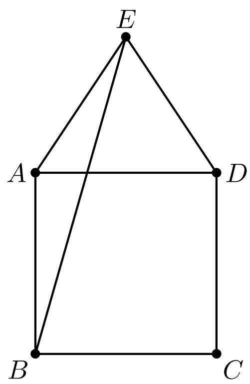
Solución: Los compañeros de Nicolás son múltiplo de 3, luego el número buscado es un múltiplo de 5 entre 10 y 40 que deja resto 1 al dividirlo entre 3. Como 15 deja resto 0, 20 deja resto 2, 25 deja resto 1, 30 deja resto 0 y 35 deja resto 2, la respuesta es 25.

Problema 2 de Tercer Año. Sean m y n enteros positivos, tales que $19 \leq m \leq 49$, y $51 \leq n \leq 101$. ¿Cuál es el mayor valor posible para la expresión $\dfrac{m+n}{n-m}$?

Solución: Tenemos que $\frac{n+m}{n-m} = \frac{n-m+2m}{n-m} = 1 + \frac{2m}{n-m}$. Para alcanzar el mayor valor, m debe ser lo más grande posible y la diferencia $n - m$debe ser lo más pequeña posible. Es claro que ambas condiciones se logran cuando m toma su mayor valor posible (49) y n su menor valor posible (51). En ese caso el valor de la expresión es $100/2 = 50$.

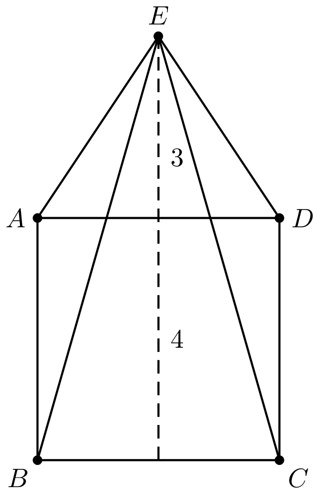
Al mismo resultado se llega observando que $\frac{n+m}{n-m} = \frac{1+\frac{m}{n}}{-+\frac{m}{n}}$.

Problema 3 de Tercer Año.
$ABCD$ es un cuadrado de lado 4 cm, $AE = DE$ y el área del pentágono $ABCDE$ es 22 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo ABE?



Solución: Como $AE = DE$, el punto E se encuentra en la mediatriz del segmento AD, que es paralela al lado AB y a distancia 2 cm de ese lado. Por lo tanto el área del triángulo ABE, tomando AB como base, es $4 \times 2/2 = 4$ cm^2.

Solución alternativa: Usando [ ] para denotar áreas, se tiene que $[ABCD] = 4^2 = 16$ y $[ABCDE] = 22$, luego $[ADE] = 22 - 16 = 6$ y la altura del triángulo ADE sobre AD es $2[ADE]/AD = 2 \times 6/4 = 3$. Entonces la altura del triángulo BCE sobre BC es $4 + 3 = 7$ y $[BCE] = 4 \times 7/2 = 14$. Como los triángulos ABE y CDE tienen igual área por ser simétricos, el área de cada uno de ellos es $(22 - 14)/2 = 4$ cm^2.



Problema 4 de Tercer Año. Sean a, b, c y d números reales positivos tales que $a^b = \sqrt{c}$ y $c^d = 5$. ¿Cuál es el valor de a^{6bd}?

Solución: Elevando al cuadrado la primera igualdad se tiene $(a^b)^2 = c$, o sea $a^{2b} = c$. Elevando esta última igualdad a la d resulta $/a^{2b})^d = c^d$, o sea $a^{2bd} = 5$. Y elevando esta última al cubo resulta $(a^{2bd})^3 = 5^3$, o sea $a^{6bd} = 125$.

También se puede hacer en una línea: $a^{6bd} = (a^b)^{6d} = (\sqrt{c})^{6d} = c^{3d} = (c^d)^3 = 5^3 = 125$.

Problema 5 de Tercer Año. Se tienen doce pelotas numeradas del 1 al 12. Cada una se colorea con verde o azul de tal manera que se satisfacen las dos condiciones siguientes:

(a) si dos pelotas marcadas a y b son azules y $a + b < 13$, entonces la bola $a + b$ es azul.

(b) si dos pelotas marcadas a y b son verdes y $a + b < 13$, entonces la bola $a + b$ es verde.

¿De cuántas maneras distintas se pueden pintar las pelotas?

Solución: Supongamos que la pelota marcada con el 1 es azul. Si la pelota marcada con el 2 también es azul, entonces las marcadas con $1+2 = 3$, $1+3 = 4$ $\dots$, $1+11 = 12$ son todas azules. Por lo tanto en este caso todas las pelotas son azules.

Si la pelota marcada por el 2 fuese verde, debemos considerar dos casos. Si la pelota número 3 es azul, entonces $1 + 3 = 4$, $1 + 4 = 5$ $\dots$, $1 + 11 = 12$ también son azules. Si la pelota marcada con el 3 fuese verde, entonces $2 + 3 = 5$ también es verde. Como $1 + 4 = 5$ 5 es verde y 1 es azul, entonces 4 no puede ser azul, sería verde y entonces $4 + 2 = 6$, $5 + 2 = 7$, $6 + 2 = 8$, $7 + 2 = 9$, $8 + 2 = 10$, $9 + 2 = 11$ y $10 + 2 = 12$ serán verdes.

Así vemos que al suponer que la pelota 1 es azul, hay tres casos posibles. Si intercambiamos azul y verde en el argumento, tenemos otros tres casos. En consecuencia, hay seis casos en total, a saber: todas las pelotas son azules, todas las pelotas son verdes, todas menos la número 1 son verdes, todas menos la número uno son azules, todas menos la número dos son azules o todas menos la número dos son verdes.

Problema 1 de Cuarto y Quinto Año. Un entero positivo es *fino* si es par, tiene cuatro dígitos y el número formado por los dos primeros dígitos es igual a cinco veces el número formado por los dos últimos dígitos. Ejemplo: 7014 es fino.

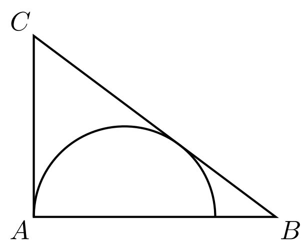
a) Halle el máximo común divisor de todos los números finos.

b) Halle el mínimo común múltiplo de todos los números finos.

Solución: a) Si $n = 1000a + 100b + 10c + d$ es fino entonces $10a + b = 5(10c + d)$ y $n = 100(10a + b) + 10c + d = 501(10c + d)$. Como además n es par, d debe ser par resulta que los números finos son $501 \cdot 2$, $501 \cdot 4$,$\dots$, $501 \cdot 18$, o equivalentemente 1002, $1002 \cdot 2$, $1002 \cdot 3$,$\dots$, $1002 \cdot 9$. Entonces es claro que su máximo común divisor es 1002.

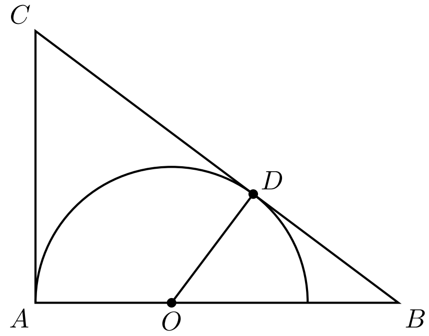
b) $\mathrm{mcm}(1002, 1002 \cdot 2, \dots, 1002 \cdot 9) = 1002 \cdot \mathrm{mcm}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$
$= 1002 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2525040$.

Problema 2 de Cuarto y Quinto Año.
El triángulo ABC es rectángulo en A, $AB = 8$ cm y $AC = 6$ cm. ¿Cuál es el radio de la semicircunferencia cuyo diámetro se apoya en AB y que es tangente a los otros dos lados del triángulo ABC?



Solución: Sean O el centro de la semicircunferencia, D su punto de tangencia con el lado BC y $r = OD$ el radio. Entonces $\triangle ODB \sim \triangle CAB$ (por ser ambos rectángulos y con el ángulo en B común). Entonces $OD/OB = CA/CB$, es decir $r/(8-r) = 6/\sqrt{6^2+8^2} = 3/5$. De aquí se sigue que $r = \frac{3}{5}(8-r)$ y $\frac{8}{5}r = \frac{24}{5}$, de donde $r = 3$ cm.

Otra manera de proceder consiste en observar que $DC = AC$ por ser segmentos de tangente desde A a la misma circunferencia, de donde $DB = BC - DC = \sqrt{6^2+8^2} - 6 = 4$ cm. Entonces, como $OD(DB = AC/AB = 6/8$ resulta $r/4 = 3/4$ y $r = 3$ cm.



Problema 3 de Cuarto y Quinto Año. Ayer y hoy han estado jugando en el parque un grupo de niñas y niños. Ayer la relación de niñas a niños era de 2 : 3. Hoy, el número de niños es el cuadrado del número de niñas y además hay 6 niños y 7 niñas menos que ayer. Contando a los niños y a las niñas, ¿cuántos estuvieron jugando ayer?

Solución: Ayer en el parque estuvieron $3t$ niños y $2t$ niñas. Hoy hay $3t-6$ niños y $2t-7$ niñas. Pero $3t-6 = (2t-7)^2 = 4t^2 - 28t + 49$, entonces $4t^2 - 31t + 55 = 0$. Esta ecuación tiene raíces 5 y $11/3$, pero como t es un entero, sólo tiene sentido $t = 5$. Por lo tanto la cantidad de niños y niñas que ayer había en el parque es $3t + 2t = 5t = 25$.

Alternativamente se puede decir que syer en el parque estuvieron h niñas y v niños, con $h/v = 2/3$. Hoy hay $v-6$ niños y $h-7$ niñas, y se cumple $v - 6 = (h-7)^2$. Como $v = 3h/2$ nos queda $3h/2 - 6 = h^2 - 14h + 49$, o bien $h^2 - (31/2)h + 55 = 0$, que tiene soluciones 10 y $11/2$. Como h es un entero, sólo tiene sentido $h = 10$. Por lo tanto $v = 3 \cdot 10/2 = 15$ y la respuesta es $h + v = 25$.

Problema 4 de Cuarto Año.
Se tienen doce pelotas numeradas del 1 al 12. Cada una se colorea con verde o azul de tal manera que se satisfacen las dos condiciones siguientes:

(a) si dos pelotas marcadas a y b son azules y $a + b < 13$, entonces la bola $a + b$ es azul.

(b) si dos pelotas marcadas a y b son verdes y $a + b < 13$, entonces la bola $a + b$ es verde.

¿De cuántas maneras distintas se pueden pintar las pelotas?

Solución: Supongamos que la pelota marcada con el 1 es azul. Si la pelota marcada con el 2 también es azul, entonces las marcadas con $1+2=3$, $1+3=4$ ..., $1+11=12$ son todas azules. Por lo tanto en este caso todas las pelotas son azules.

Si la pelota marcada por el 2 fuese verde, debemos considerar dos casos. Si la pelota número 3 es azul, entonces $1+3=4$, $1+4=5$ ..., $1+11=12$ también son azules. Si la pelota marcada con el 3 fuese verde, entonces $2+3=5$ también es verde. Como $1+4=5$ 5 es verde y 1 es azul, entonces 4 no puede ser azul, sería verde y entonces $4+2=6$, $5+2=7$, $6+2=8$, $7+2=9$, $8+2=10$, $9+2=11$ y $10+2=12$ serán verdes.

Así vemos que al suponer que la pelota 1 es azul, hay tres casos posibles. Si intercambiamos azul y verde en el argumento, tenemos otros tres casos. En consecuencia, hay seis casos en total, a saber: todas las pelotas son azules, todas las pelotas son verdes, todas menos la número 1 son verdes, todas menos la número uno son azules, todas menos la número dos son azules o todas menos la número dos son verdes.

Problema 4 de Quinto Año.
En una caja azul hay doce pelotas, numeradas del 1 al 12. Enrique mueve algunas de ellas, pero no todas, a otra caja verde. Al hacerlo se da cuenta que para cada dos pelotas de la caja verde lo siguiente es verdad: Si estas dos pelotas están numeradas con los números a y b, entonces la pelota marcada con el número $|a-b|$ está en la caja azul. ¿Cuál es la mayor cantidad de pelotas que Enrique pudo mover a la caja verde?

Solución: Enrique pudo mover 6 pelotas. Si mueve todas las pelotas marcadas con los impares, entonces la diferencia entre dos de esos números es par y está por lo tanto en la caja azul. O bien puede mover las pelotas numeradas del 7 al 12, cuyas diferencias están comprendidas entre 1 y 5 y por lo tanto quedaron en la caja azul.

Supongamos ahora que movió 7 pelotas y denotemos los números de esas pelotas en orden creciente por $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$. Entonces las diferencias $a_7 - a_1$, $a_6 - a_1$, $a_5 - a_1$, $a_4 - a_1$, $a_3 - a_1$, $a_2 - a_1$, son seis enteros positivos diferentes y menores que 12. Estas pelotas deberían estar en la caja azul, pero eso es imposible pues allí solo hay cinco pelotas.

Problema 5 de Cuarto Año.
Resuelva la ecuación: $\log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) - 2\log_{64}(x) = 9$.

Solución: Por las propiedades de la función logaritmo tenemos:

$$\begin{aligned}
9 &= \log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) - 2\log_{64}(x) \\
&= \log_2(10x) + \frac{\log_2(100x)}{\log_2 4} + \frac{\log_2(1000x)}{\log_2 8} - \frac{2\log_2(x)}{\log_2 64} \\
&= \log_2(10x) + \frac{\log_2(100x)}{2} + \frac{\log_2(1000x)}{3} - \frac{2\log_2(x)}{6} \\
&= \log_2(10x) + \frac{1}{2}\log_2(100x) + \frac{1}{3}\log_2(1000x) - \frac{1}{3}\log_2(x) \\
&= \log_2(10x) + \log_2(\sqrt{100x}) + \log_2\sqrt[3]{1000x} - \log_2\sqrt[3]{x} \\
&= \log_2\big(\frac{10x\sqrt{100x}\sqrt[3]{1000x}}{\sqrt[3]{x}}\big) \\
&= \log_2(1000\sqrt[3]{x}).
\end{aligned}$$

En consecuencia $1000\sqrt[3]{x} = 2^9$ o $x = \left(\frac{2^9}{10^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{25}$

Solución alternativa I: Como

$$\begin{aligned}
\log_2(x) &= \log_2(64)\log_{64}(x) = 6\log_{64}(x), \\
\log_4(x) &= \log_4(64)\log_{64}(x) = 3\log_{64}(x), \\
\log_8(x) &= \log_8(64)\log_{64}(x) = 2\log_{64}(x),
\end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación dada nos queda

$$6\log_{64}(10x) + 3\log_{64}(100x) + 2\log_{64}(1000x) - 2\log_{64}(x) = 9,$$

o bien

$$\log_{64}\left(\frac{(10x)^6(100x)^3(1000x)^2}{x^2}\right) = 9,$$

o sea

$$\log_{64}(10^{18}x^9) = 9.$$

Entonces $9\log_{64}(100x) = 9$, de donde $100x = 64$ y $x = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$.

Solución alternativa II: La ecuación se puede escribir como

$$\log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) = 9 + 2\log_{64}(x).$$

Elevando 64 a cada miembro resulta

$$64^{\log_2(10x)} \cdot 64^{\log_4(100x)} \cdot 64^{\log_8(1000x)} = 64^9 \cdot 64^{2\log_{64}(x)},$$

y como $64 = 2^6 = 4^3 = 8^2$, se tiene

$$2^{6\log_2(10x)} \cdot 4^{3\log_4(100x)} \cdot 8^{2\log_8(1000x)} = 64^9 x^2,$$

o bien

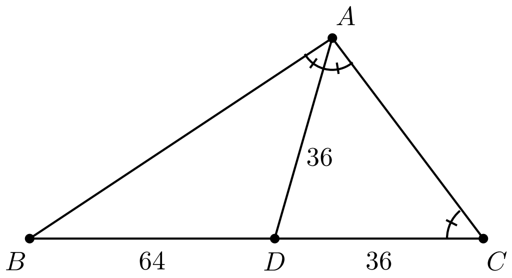
$$(10x)^6(100x)^3(1000x)^2 = 64^9 x^2,$$

es decir $10^{18}x^{11} = 64^9 x^2$, de donde $10^{18}x^9 = 64^9$, $x^9 = (64/100)^9$ y $x = 64/100 = 16/25$.

Problema 5 de Quinto Año

Tenemos un triángulo ABC. La bisectriz de $\angle BAC$ corta a $\overline{BC}$ en D. ADC es isósceles con $AD = CD = 36$ y $BD = 64$. Hallar las longitudes de los lados de ABC.

Solución: Es claro que $BC = 100$. Encontremos las medidas de AC y AB. Como $\angle BAD = \angle DAC = \angle ACB$, los triángulos CBA y ABD son semejantes y $\frac{CA}{AD} = \frac{BA}{BD} = \frac{CB}{AB}$. La segunda igualdad implica que $AB^2 = BD \cdot CB$ y entonces $AB = \sqrt{64 \cdot 100} = 80$. Ahora usamos la primera igualdad para obtener $CA = \frac{AD \cdot BA}{BD} = frac36 \cdot 8064 = 45$.



Solución alternativa: Pongamos $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. En primer lugar $a = 64 + 36 = 100$. Por el teorema de la bisectriz se tiene

$$\frac{b}{36} = \frac{c}{64}$$

y por el teorema de Stewart

$$b^2 \cdot BD + c^2 \cdot DC = BC(AD^2 + BD \cdot DC),$$

es decir

$$64b^2 + 36c^2 = 100(36^2 + 64 \cdot 36) = 360000.$$

Sustituyendo $b = (36/64)c$ y dividiendo entre 36 queda

$$\left(\frac{36}{64} + 1\right) c^2 = 10000,$$

es decir $(100/64)c^2 = 10000$, de donde $c^2 = 6400$ y $c = 80$. Finalmente $b = (36/64)80 = 45$.