Olimpiada Juvenil de Matemática
Afiche Los Favoritos 2015 – Soluciones

Problemas de la Prueba Canguro

Primer Año:

1. Como $135 = 3^3 \cdot 5$, los dígitos sólo pueden ser 3, 9 y 5. La respuesta es 18 (opción A).

2. La respuesta es 3 (opción B). Se deben sacar 3 perlas del extremo izquierdo y 5 perlas del extremo derecho.

Segundo Año:

3. D no se movió (opción D). Así, B intercambió posición con C y E con A, transformando el orden ABCDE en ECBDA, que es lo mismo que AECBD. Las demás alternativas conducen a ordenaciones diferentes.

4. El 5 no puede estar en la casilla central, pues en ese caso los números en las casillas adyacentes sumarían $6 + 7 + 8 + 9 \neq 9$. Tampoco en la media superior (pues entonces en la central debería haber otro 5), ni en la media derecha (pues entonces en la central debería haber un 2, que ya está en la inferior izquierda), ni en la media inferior (pues entonces en la central debería haber un 3, que ya está en la superior derecha). Es decir que el 5 sólo puede estar en la casilla media de la izquierda, y entonces en la casilla central debe estar el 6. Los adyacentes al 6 suman entonces $5 + 7 + 8 + 9 = 29$, y la opción correcta es la E.

Tercer Año

5. Un cubo de lado 3 requiere $3^3 = 27$ cubitos unitarios, luego la respuesta es $27 - 7 = 20$ (opción A).

6. Si $\alpha = \angle DAB$, entonces $\angle DAC = \alpha$ y $\angle ABH = 90° - 2\alpha$. Si P es la intersección de AD y BH entonces $\angle APB = 4\alpha$, y en el triángulo APB se tiene $\alpha + 4\alpha + (90° - 2\alpha) = 180°$, de donde $\alpha = 30°$ y $\angle CAB = 2\alpha = 60°$. La opción correcta es la E.

Cuarto Año

7. Digamos que ambas válvulas vuelven a estar en su punto más bajo luego de que la rueda grande haya dado x vueltas y la pequeña y vueltas. Entonces $4,2x = 0,9y$, o bien $42x = 9y$, o $14x = 3y$. Los enteros positivos más pequeños que satisfacen esta ecuación son $x = 3$, $y = 14$. Luego la respuesta es $3 \cdot 4,2 = 12,6$ m, opción C.

8. Si un cuadro tiene ancho a y altura b en cm, entonces por Pitágoras la distancia del clavo al borde superior del cuadro es $\sqrt{100^2 - (a/2)^2}$ y la distancia del borde inferior del cuadro al piso en cm es $250 - b - \sqrt{100^2 - (a/2)^2}$. La opción C se descarta pues tiene igual ancho que la B pero menor altura, y la D pues tiene igual ancho que la E pero menor altura. Ahora se tiene, para A, $250 - 40 - \sqrt{100^2 - 30^2} = 210 - \sqrt{9100}$; para B, $250 - 90 - \sqrt{100^2 - (60)^2} =$

$160 - \sqrt{6400} = 80$ y para E, $250 - 100 - \sqrt{100^2 - (80)^2} = 150 - \sqrt{3600} = 120$. Como $210 - \sqrt{9100} > 210 - \sqrt{10000} = 110$ es claro que el menor valor se alcanza para la opción B.

Quinto Año

9. Digamos que hace un año había A ranas azules y V ranas verdes. Entonces hoy hay $1,6A$ ranas azules y $0,4V$ ranas verdes. el último año, el número de ranas azules aumentó un 60 % mientras que el número de ranas verdes disminuyó el 60 %. Como $\frac{1,6A}{0,4V} = \frac{V}{A}$ se deduce que $(V/A)^2 = 1,6/0,4 = 4$ y $V/A = 2$, es decir que $V = 2A$. Entonces hace un año había $A + V = A + 2A = 3A$ ranas en total, y hoy hay $1,6A + 0,4V = 1,6A + 0,8A = 2,4A$. Es decir que la población de ranas disminuyó en $0,6A$, que es un 30 % de la población de hace un añp. La opción correcta es entonces la C.

10. Numeremos los hombres del 1 al 2014, de izquierda a derecha. Claramente el 1 miente y el 2014 dice la verdad. Si 1,2,. . . ,k son mentirosos y 2014,2013,. . . ,$2015 - k$ son honestos, para algún k con $1 \leq k < 1007$, entonces $k + 1$ es mentiroso y $2014 - k$ es honesto. De esto se sigue que 1,2,. . . ,1007 son are mentirosos y 1008,. . . ,2014 son honestoss. Luego la opción correcta es la E.

Problemas de la Prueba Regional

Primer Año

11. Si es múltiplo de 9 entonces la suma de sus dígitos también es múltiplo de 9, y como los dígitos son pares esa suma es al menos 18. Para alcanzar esa suma se necesitan al menos tres dígitos: 2, 8 y 8 ó 4, 6 y 8 ó 6, 6 y 6. El menor es 288.

Segundo Año

12. He aquí algunas soluciones:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 = 100,$$

$$1 + 2 - 3 \times 4 + 5 \times 6 + 7 + 8 \times 9 = 100,$$

$$1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 - 6 + 7 + 8 \times 9 = 100,$$

$$1 + 2 - 3 \times 4 - 5 + 6 \times 7 + 8 \times 9 = 100,$$

$$1 - 2 + 3 \times 4 \times 5 + 6 \times 7 + 8 - 9 = 100.$$

Tercer Año

13. Sea $x = \angle BAD$. Entonces $\angle ABD = x$ (pues $\triangle ABD$ es isósceles) y $\angle ACB = \angle ABC = x$ (pues $\triangle ABC$ es isósceles). Sumando los ángulos del $\triangle ABC$ resulta $3x + 36 = 180$, de donde $3x = 144$ y $x = 48°$.

14. $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 4^2 - 10 = 6$, de donde $xy = 3$. Como $(x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$ resulta $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2-2(xy)^2 = 10^2-2\cdot 3^2 = 82$.

Cuarto Año

15. La respuesta correcta es 53. Hay 27 sumas posibles que van desde $1+0+0 = 1$ hasta $9+9+9 = 27$. Pero el 1 y el 27 sólo se presentan una vez cada uno (tarjetas 100 y 999) mientras que las demás sumas se presentan al menos 2 veces.

16. Si $c \geq 3$ entonces $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} < 1$. Por lo tanto debe ser $c = 2$. Entonces debe cumplirse $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, con $a > b \geq 3$. Si $b \geq 4$ entonces $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Luego debe ser $b = 3$. Finalmente debe cumplirse $\frac{1}{a} > \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, es decir que a puede ser 4 ó 5. En definitiva hay dos ternas que cumplen las condiciones: $(4, 3, 2)$ y $(5, 3, 2)$.

Quinto Año

17. Para que $CZ = 1$ el triángulo BCZ debe ser equilátero y $\angle CBZ = 60°$. Como $\angle ZBA = 180(n-2)/n$ y $\angle CBA = 180 \cdot 13/15 = 156°$, debe cumplirse entonces que $180(n-2)/n + 156 + 60 = 360$, o sea $180(n-2)/n = 144$, de donde $180(n-2) = 144n$, $36n = 360$ y $n = 10$.

Problemas de la Prueba Final

Primer Año

18. Debe haber 13 personas de un mismo sexo, ya que si hubiese a lo sumo 12 hombres y a lo sumo 12 mujeres, el total de personas no llegaría a 25. Entre esas 13 personas del mismo sexo no puede haber 5 de nacionalidades diferentes, luego son de a lo sumo 4 nacionalidades. Si hubiese menos de 4 de cada nacionalidad, serían a lo sumo $4 \times 3 = 12 < 13$. Luego debe haber 4 de la misma nacionalidad, que son también del mismo sexo.

Solución alternativa: Como no puede haber 5 personas de nacionalidades diferentes, hay a lo sumo 4 nacionalidades diferentes. Si hubiese menos de 7 personas de cada nacionalidad, el número de personas sería a lo sumo $4 \times 6 = 24 < 25$. Luego debe haber al menos 7 personas de una misma nacionalidad. Entre esas 7 personas debe haber 4 de un mismo sexo, pues si hubiese a lo sumo 3 de cada sexo, en total serían a lo sumo 6. Luego hay 4 personas del mismo sexo y la misma nacionalidad.

Segundo Año

19. $\angle BAC = 180° - 50° - 62° = 68°$, luego $\angle DAC = 34°$ y $\angle ADB = 34° + 62° = 96°$ (por ser exterior del $\triangle DAC$). Entonces $\angle ADE = 48°$, $\angle EAD = 34°$ y $\angle AED = 180° - 34° - 48° = 98°$.

Tercer Año

20. Se deben hallar dos naturales $m \neq n$ tales que $mn = 13(m+n)$. Entonces 13 divide al menos a uno de ellos, digamos a m. Pongamos $m = 13M$ y nos queda $13Mn = 13(13M + n)$, de donde $Mn = 13M + n$, $M(n-13) = n$ y $n - 13$ divide a $n = (n-13) + 13$. Entonces $n - 13$ divide a 13. Como $n - 13$ debe ser positivo (pues $M(n-13) = n$), sólo hay dos posibilidades: que $n - 13$ sea 1 o que sea 13. Si $n - 13 = 1$ entonces $n = 14$, $M = n = 14$ y $m = 13M = 182$. Si

$n-13=13$ entonces $n=26$, $13M=26$, $M=2$ y $m=26$, que se descarta pues debe ser $m \neq n$. Luego la única solución es 14 y 182.

Solución alternativa I: Se deben hallar dos naturales $m \neq n$ tales que $mn = 13(m+n)$, o bien $mn-13m-13n=0$. Sumando 13^2 a ambos miembros queda $mn-13m-13n+13^2=13^2$, que se factoriza como $(m-13)(n-13)=13^2$. Como $m \neq n$, debe ser también $m-13 \neq n-13$. Como 13 es primo, la única manera de expresar 13^2 como producto de dos factores diferentes es $1 \cdot 169$. De $m-13=1$ y $n-13=169$ se obtienen $m=14$ y $n=182$, luego la respuesta es 14 y 182.

Cuarto Año

21. La circunferencia de diámetro BC pasa por A, por ser $\angle BAC$ recto. Luego F es el circuncentro del triángulo ABC, y en particular $FA=FB$. Luego el triángulo FAB es isósceles y

$$\angle FAB = \angle FBA = 90^\circ - \angle ACD = \angle CAD.$$

Como $\angle EAB = \angle EAC$, restando miembro a miembro las dos últimas igualdades se tiene

$$\angle FAB - \angle EAB = \angle CAD - \angle EAC,$$

o sea $\angle EAF = \angle DAE$.
Por supuesto que la misma demostración puede realizarse intercambiando los roles de B y C.

Quinto Año

22. (a) La respuesta es que sí. En efecto, como solo hay un número finito de posibles cuaternas de dígitos consecutivos (de hecho, hay $10^4=10000$) en la sucesión necesariamente debe haber una cuaterna que se repita. Sea a, b, c, d la primera cuaterna que aparece en la sucesión y que más tarde se repite. Si esta cuaterna no fuese la inicial 2, 0, 1, 4, entonces estaría precedida por un término x tal que $x+a+b+c$ termina en d. Sea y el término que precede a la *segunda* aparición de a, b, c, d. Es claro que también $y+a+b+c$ termina en d. Como $|x-y| = |(x+a+b+c)-(y+a+b+c)|$ termina en cero, y x e y son dígitos, se sigue que $x=y$. Pero entonces la cuaterna x, a, b, c se repite y aparece por segunda vez antes que la a, b, c, d, contra lo supuesto de que ésta era la primera que se repetía. Por lo tanto 2, 0, 1, 4 no sólo se repite, sino que es la primera cuaterna que lo hace.

(b) La respuesta es que no. Si observamos la paridad de los términos de la secuencia, poniendo P para un par e I para un impar, los cinco primeros son $PPIPI$. Afirmamos que este patrón se repite en los 5 siguientes. En efecto, la suma $P+I+P+I$ es par, luego sigue P y se tiene $PPIPIP$; $I+P+I+P$ también es par, y se tiene $PPIPIPP$; ahora $P+I+P+P$ es impar, y se tiene $PPIPIPPI$. Ahora $I+P+P+I$ es par, y se tiene $PPIPIPPIP$. Y como $P+P+I+P$ es impar, sigue I y se tiene $PPIPIPPIPI$. Es claro que este patrón se repite indefinidamente, y que nunca aparecerán dos impares juntos. Luego la secuencia 2, 0, 1, 5 no puede aparecer, ya que es del tipo $PPII$.