Álgebra

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

Álgebra para Olimpiadas Matemáticas

José Heber Nieto Said

2015

Teoría de Números para Olimpíadas Matemáticas

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, Mayo 2014

Hecho el depósito de Ley.

Depósito Legal:

ISBN:

Formato digital: 96 páginas

Diseño general: José H. Nieto

Índice general

Introducción **1**

1. Sistemas numéricos **3**
1.1. Números naturales 3
1.1.1. Operaciones 3
1.1.2. El orden en $\mathbb{N}$ 4
1.1.3. Sistemas de numeración 5
1.2. Números enteros 6
1.2.1. Operaciones 6
1.2.2. El orden en $\mathbb{Z}$ 7
1.3. Números racionales 8
1.3.1. Operaciones 9
1.3.2. Fracciones y expresiones decimales 10
1.3.3. El orden en $\mathbb{Q}$ 11
1.4. Números reales 12
1.4.1. Operaciones 13
1.4.2. El orden en $\mathbb{R}$ 15
1.5. Números complejos 16
1.5.1. Operaciones 16
1.5.2. La unidad imaginaria 17
1.5.3. Formas binómica y polar 18
1.6. Problemas 20

2. Polinomios **24**
2.1. Polinomios 24
2.1.1. Operaciones con Polinomios 25
2.1.2. Raíces de un polinomio 29
2.1.3. Fórmulas de Vieta 30
2.1.4. Raíces racionales 31
2.2. Problemas 32

3. Ecuaciones y Sistemas **36**
3.1. Ejemplos 36
3.2. Sistemas de ecuaciones 39
3.3. Problemas 39

4. Sucesiones **41**
4.1. Progresiones aritméticas y geométricas 41
4.2. Recurrencias 43
4.2.1. Números de Fibonacci 44
4.2.2. Recurrencias lineales 45
4.3. Problemas 47

5. Desigualdades **50**
5.1. Algunos ejemplos sencillos 50
5.2. Desigualdades básicas 52
5.2.1. Desigualdad triangular 52
5.2.2. Desigualdad Aritmético-Geométrica (AG) 52
5.2.3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz (CS) 53
5.2.4. Desigualdad del reordenamiento 54
5.2.5. Desigualdad de Chebyshev 54
5.3. Funciones convexas 56
5.3.1. Desigualdad de Jensen 57
5.4. Desigualdades homogéneas 58
5.4.1. Normalización 58
5.4.2. Desigualdad de Muirhead 59
5.4.3. Desigualdad de Schur 61
5.4.4. Homogeneización 61
5.5. Desigualdades geométricas 62
5.6. Problemas 63

6. Ecuaciones funcionales **66**
6.1. Ejemplos 66
6.2. Problemas 68

7. Soluciones a los problemas **69**

Siglas de algunas competencias matemáticas **90**

Bibliografía **91**

Índice alfabético **93**

Introducción

Las *Olimpiadas Matemáticas* son concursos de resolución de problemas que se realizan en todo el mundo a nivel local, nacional, regional e internacional. La participación en estas competencias, en las que se plantean problemas novedosos e interesantes, alejados de la rutina, puede estimular el interés de muchos estudiantes por la matemática y ayudarlos a descubrir aptitudes y hasta vocaciones ocultas.

Para los maestros y profesores las olimpiadas ponen al alcance de su mano un amplio material que puede ser usado para reorientar y enriquecer la enseñanza: problemas cuidadosamente diseñados, libros y revistas sobre resolución de problemas, juegos matemáticos y muchos otros recursos. Además, en torno a estas competencias generalmente se realizan seminarios y talleres para los educadores.

¿Porqué se insiste en la resolución de problemas y no en pruebas de conocimientos? Pues sencillamente porque hay un amplio consenso en que los problemas son el corazón de la matemática, y por lo tanto deben ser el punto focal de la enseñanza de esta disciplina.

Paul Halmos (1916–2006), quien fuera uno de los más importantes matemáticos del siglo XX, escribió en su famoso artículo *El corazón de la matemática* [5]:

> "La principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y por lo tanto en lo que *realmente* consisten las matemáticas es en problemas y soluciones."

En el mismo sentido se había pronunciado el insigne matemático y educador George Pólya (1887–1985):

> "*Entender* la matemática significa ser capaz de *hacer* matemática. ¿Y qué significa hacer matemática? En primer lugar, significa ser capaz de resolver problemas matemáticos."

Ahora bien, la mayor dificultad que confrontan nuestros estudiantes al participar en olimpiadas matemáticas tiene su origen en que, en los cursos de matemática de enseñanza media, probablemente han tenido que resolver numerosos *ejercicios*, pero rara vez un verdadero *problema*. La diferencia consiste en que un *ejercicio* se resuelve más o menos mecánicamente, si se ha comprendido el material instruccional que lo precede. En cambio, ante un verdadero *problema*, el estudiante no tiene a mano un procedimiento que le permita resolverlo, sino que debe utilizar su imaginación, creatividad e ingenio. Y éstas son precisamente las capacidades intelectuales que le permitirán tener éxito en su vida profesional, hallando soluciones creativas a los innumerables problemas del mundo actual que carecen de soluciones prefabricadas.

Los problemas de las olimpiadas matemáticas preuniversitarias son de naturaleza muy variada, pero a grandes rasgos se pueden clasificar en cuatro categorías: Geometría, Teoría de Números, Álgebra y Combinatoria.

El *Àlgebra*, de la cual nos ocupamos en este libro, fue originalmente una extensión de la aritmética, de la que se distinguía por usar letras para denotar cantidades desconocidas, formando expresiones en las que se mezclaban números y letras. Su principal aplicación era la solución de ecuaciones. En la actualidad el álgebra consiste en el estudio de las *estructuras algebraicas*, que son conjuntos en los cuales se han definido una o más operaciones. El álgebra es un tema infaltable en las olimpiadas matemáticas.

Este libro está dirigido a los profesores de matemática interesados en ayudar a sus alumnos a obtener mejores resultados en las Olimpiadas Matemáticas, y en particular a aquellos que eventualmente deseen convertirse en entrenadores de los equipos que participan en estas competencias. También puede ser utilizado por estudiantes con alguna experiencia en olimpiadas matemáticas, que se estén entrenando para las mismas.

El material del primer capítulo es básico y en general se cubre en los programas de enseñanza media en Venezuela, excepto la sección sobre números complejos. Sin embargo los problemas propuestos son de tipo olímpico, y se debe dedicar un buen tiempo a trabajar en ellos.

El capítulo 2 se ocupa de los polinomios, y el 3 de las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones.

En el capítulo 4 se estudian las progresiones y sucesiones, en particular las sucesiones definidas por relaciones de recurrencia, que aparecen con frecuencia en las olimpiadas matemáticas.

El capítulo 5 es tal vez el más avanzado del libro, y se dedica al estudio de las desigualdades. Este tema tiene un gran desarrollo en la matemática de olimpiadas, y su estudio es muy importante para estudiantes que aspiren a participar en competencias internacionales .

El capítulo 6 se dedica a las ecuaciones funcionales.

El Capítulo 7 contiene soluciones para todos los problemas propuestos. Una advertencia: no mire una solución antes de haber realizado un serio intento por resolver el problema. De lo contrario, perderá una oportunidad de aprender y no disfrutará la satisfaccón que se experimenta al resolver uno mismo ul problema.

Finalmente se incluye una bibliografía para quienes deseen ampliar sus conocimientos.

José H. Nieto S.

Capítulo 1

Sistemas numéricos

Los números naturales y los números enteros se estudiaron con detalle en [7]. Aquí sólo se recapitularán sus propiedades más importantes. El resto del capítulo se dedica a los números racionales y a los números reales.

1.1. Números naturales

Los números *naturales* son los que usamos para contar: 1, 2, 3, 4,... El conjunto (infinito) de todos los números naturales se denota $\mathbb{N}$, es decir

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Algunos autores agregan a los números naturales el cero, pero en esta obra no haremos eso. Será útil sin embargo considerar el conjunto de los números naturales ampliados con el 0, que denotamos $\mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

1.1.1. Operaciones

Dado cualquier par de números naturales a, b se puede realizar su *suma* (o adición), que da por resultado un natural $a + b$. La suma $a + b$ se puede definir así: a partir de la aparición de a en la sucesión de los naturales 1, 2, 3,..., a,..., contamos b puestos hacia adelante, y el número que se encuentra allí es $a + b$. En particular $a + 1$ no es más que el sucesor de a. De aquí se desprende que, a partir del 1, se pueden generar aditivamente todos los números naturales. O sea: $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1 = (1 + 1) + 1$, $4 = 3 + 1 = ((1 + 1) + 1) + 1$, etc. En las expresiones anteriores los paréntesis no son realmente necesarios, ya que la suma tiene la *propiedad asociativa*:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Por lo tanto, en vez de $a + (b + c)$ o $(a + b) + c$, que son iguales, se puede escribir simplemente $a + b + c$.

La suma tiene también la propiedad *conmutativa*:

$$a + b = b + a.$$

La suma no tiene elemento neutro en $\mathbb{N}$, pero si se define $a + 0 = 0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{N}_0$, resulta que 0 es neutro para la suma en $\mathbb{N}_0$.

Otra operación que se puede realizar con dos números naturales a y b es su *producto* (o multiplicación), que se denota $a \times b$, $a \cdot b$ o simplemente ab. A los operandos a y b de un producto se les llama *factores*.

El producto tiene al 1 como elemento neutro, es decir que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Si $b > 1$, ab es simplemente la suma de b sumandos iguales a a, es decir

$$ab = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ sumandos}}.$$

El producto tiene las propiedades conmutativa ($ab = ba$) y asociativa ($(ab)c = a(bc)$).

La suma y el producto están relacionadas por la propiedad distributiva

$$a(b + c) = ab + ac.$$

El producto se extiende a $\mathbb{N}_0$ definiendo $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ para todo $a \in \mathbb{N}_0$.

La *potencia* de base a y exponente b se define de la siguiente manera:

- Por convención, $a^0 = 1$ y $a^1 = a$.
- Si $b > 1$, entonces
$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{b \text{ factores}}.$$

Así, por ejemplo, $5^0 = 1$, $12^1 = 12$, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Las conocideas *leyes de los exponentes* nos dicen que

$$(ab)^c = a^c \cdot b^c, \qquad a^{b+c} = a^b \cdot a^c =, \qquad (a^b)^c = a^{bc}.$$

Estas leyes son consecuencia de las leyes asociativa y conmutativa, a partir de las cuales se prueban fácilmente.

1.1.2. El orden en $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ es un conjunto linealmente ordenado: si a aparece antes que b en la lista 1, 2, 3,... se dice que a es *menor que* b, y se escribe $a < b$. En este caso también se dice que b es *mayor que* a, y se escribe $b > a$. Es obvio que las relaciones $<$ y $>$ son *transitivas*, es decir:

Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.

También es claro que, dados dos naturales a y b, una y sólo una de las relaciones siguientes es verdadera:

$a = b, \qquad a < b, \qquad a > b.$

Esta propiedad se conoce como *tricotomía*.

Se dice que a es *menor o igual que* b, y se escribe $a \leq b$, si $a < b$ ó $a = b$. En este caso se dice también que b es *mayor o igual que* a, y se escribe $b \geq a$. Las relaciones $\leq$ y $\geq$ también son transitivas.

Para las relaciones $\leq$ y $\geq$ no vale la tricotomía. En cambio se cumple lo siguiente (antisimetría):

$a \leq b$ y $b \leq a$ son ambas verdaderas si y sólo si $a = b$.

La prueba es sencilla y se deja al lector.

A las desigualdades del tipo $a > b$ y $a < b$ se les llama *estrictas*, para distinguirlas de $a \leq b$ y $a \geq b$.

Las operaciones en $\mathbb{N}$ se comportan bien con respecto al orden. Más precisamente, si $a, b, c \in \mathbb{N}$ y $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $ac < bc$. También si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$ y $ac \leq bc$. Estas propiedades se conocen como *monotonía* de la suma y el producto.

1.1.3. Sistemas de numeración

Si $b \in \mathbb{N}$, la representación de un número $n \in \mathbb{N}_0$ en *base* b es la sucesión $a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$, donde cada a_i pertenece al conjunto $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ y

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0.$$

A los a_i se les llama *dígitos* o *cifras* del número n, en base b. Nuestro sistema de numeración usual es el de base 10, con dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Así por ejemplo

$$2015 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5.$$

El número 2015 tiene cuatro dígitos. Los números naturales de cuatro dígitos van desde el 1000 hasta el 9999.

En computación es muy usado el sistema *binario*, de base 2, en el cual 2015 se expresa como 11111011111. También se usa el sistema *hexadecimal*, de base 16, el cual requiere cifras del 0 al 15. Para ello se usan las letras A, B, C, D, E y F para representar 10, 11, 12, 13, 14 y 15, respectivamente. Así por ejemplo el número B3F, en hexadecimal, corresponde al decimal $11 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 15 = 2879$.

Para indicar que un número está expresado en una base diferente de 10, se suele escribir el número entre paréntesis, seguido de la base b como subíndice. Por ejemplo $(321)_7 = 3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1 = 162$.

1.2. Números enteros

El conjunto de los *números enteros* se obtiene agregando a los números naturales el 0 y los *enteros negativos* -1, -2, -3, -4, ... El conjunto que resulta se denota $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Cuando se consideran como subconjunto de los enteros, a los naturales se les llama *enteros positivos*. Los *enteros no negativos* son 0, 1, 2, 3, 4,...

El *valor absoluto* de un entero z, denotado $|z|$, se define así: $|0| = 0$, $|a| = a$ y $|-a| = a$, para todo natural a. Por ejemplo $|-3| = 3$ y $|5| = 5$. Observe que hay un único entero con valor absoluto 0, a saber el 0. En cambio para cada número natural a hay dos enteros con valor absoluto a, a saber a y $-a$.

El *signo* de un entero $z \neq 0$ es positivo $(+)$ si $a > 0$ y negativo $(-)$ si $a < 0$. Es claro que un entero queda determinado por su valor absoluto y su signo.

1.2.1. Operaciones

Las operaciones de suma y producto se extienden fácilmente de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, conservándose las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva.

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, para hallar $a + b$ contamos b puestos después de a si $b > 0$, o b puestos antes de a si $b < 0$, y naturalmente $a + 0 = a$ (el 0 actúa como elemento neutro para la suma). Cada entero a tiene un *opuesto* $-a$ tal que $a + (-a) = 0$. Por ejemplo el opuesto de 3 es -3 y el opuesto de -2 es 2.

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ existe un único $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x + a = b$. En efecto, sumando $-a$ a ambos miembros de $x + a = b$ se obtiene $x + a + (-a) = b + (-a)$, o sea $x + 0 = b + (-a)$ y $x = b + (-a)$. A ese número $b + (-a)$ se le llama *diferencia* entre a y b y se denota $b - a$.

El producto ab de dos enteros a y b se define como sigue: (1) si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $ab = 0$; (2) si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $|a|$ y $|b|$ son números naturales y ab es el entero cuyo valor absoluto es $|a| \cdot |b|$ y su signo es positivo si a y b son del mismo signo, o negativo si a y b son de signos contrarios. Por ejemplo $2(-3) = -6$ y $(-2)(-3) = 6$.

El 1 sigue siendo elemento neutro del producto.

Se dice que un entero a *divide* (o que es un *divisor*) de otro entero b si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$. En este caso también se dice que b es *múltiplo* de a, y se escribe $a \mid b$. Observe que $a \mid 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, es decir que cualquier entero divide al 0, y 0 es múltiplo de cualquier entero.

Los enteros múltiplos de 2 se denominan *pares*, y son ..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8,... Observe que 0 es par.

Los enteros que no son múltiplos de 2 se denominan *impares*, y son ..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7,...

La *división entera* es una operación que da como resultado dos valores: un cociente y un resto. Recordemos que

> Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y b es positivo, entonces existen enteros no negativos *únicos* q y r tales que
> $$a = qb + r \quad \text{y} \quad 0 \leq r < b.$$

A q y r se les llama respectivamente *cociente* y *resto* de la división entera de a entre b. La prueba de este resultado puede verse en [7].

La división entera entre 2 sólo puede dejar resto 0 ó 1. Los enteros que dejan resto 0 son los pares, y los que dejan resto 1 son los impares. Todos los pares son de la forma $2q$, y los impares son de la forma $2q + 1$.

Es claro que la suma de dos enteros pares es par, y más aun la suma de cualquier cantidad de sumandos pares es par. La suma de dos impares también es par, ya que

$$(2q + 1) + (2q' + 1) = 2q + 2q' + 2 = 2(q + q' + 1).$$

La suma de un par y un impar es impar, ya que

$$2q + (2q' + 1) = 2(q + q') + 1.$$

La paridad de una suma de varios impares depende de la cantidad de sumandos. Ya sabemos que la suma de dos impares es par. Si se suma un tercer impar, tendremos la suma de un par y un impar, que es impar. Si se suma un cuarto impar, tendremos la suma de un impar y un impar, que es par. Y así sucesivamente es decir que la suma de impares es par o impar según que la cantidad de sumandos sea par o impar, respectivamente.

El producto de un entero par por otro entero cualquiera es obviamente par. El producto de dos impares es impar, ya que $(2q+1)(2s+1) = 2(2qs+q+s)+1$. Y por lo tanto el producto de cualquier cantidad de enteros impares es impar.

1.2.2. El orden en $\mathbb{Z}$

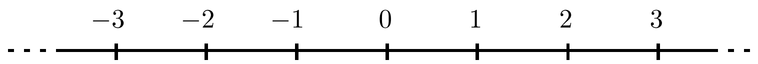
El orden en $\mathbb{N}$ se extiende fácilmente a $\mathbb{Z}$: si a aparece antes que b en la lista $\ldots$, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,... entonces se dice que a es *menor que* b, y se escribe $a < b$. En este caso también se dice que b es *mayor que* a, y se escribe $b > a$. Las relaciones $\leq$ y $\geq$ se definen de modo análogo a como lo hicimos para los números naturales. Las propiedad transitiva sigue valiendo, así como la monotonía de la suma. Sin embargo hay algunas diferencias entre el orden en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{N}$. La primera es que en $\mathbb{N}$ hay un primer elemento, el 1, mientras que en $\mathbb{Z}$ no hay primer elemento.

Otra diferencia importante es que la monotonía del producto solamente vale si se multiplica por un entero positivo. Si se multiplica por un entero negativo, el sentido de la desigualdad cambia, es decir:

Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

Esto último se debe a lo siguiente: si $a < b$ y $c < 0$, entonces $-c > 0$ y por la monotonía con factor positivo se tiene $a(-c) < b(-c)$, es decir $-ac < -bc$. Sumando ahora $ac + bc$ a ambos miembros de la desigualdad, por la monotonía de la suma se tiene $-ac + ac + bc < -bc + ac + bc$, y cancelando opuestos resulta $bc < ac$, o sea $ac > bc$.

Los números enteros pueden representarse gráficamente sobre una recta:



Para ello supongamos que la recta es horizontal. Se marca un punto con el 0 y otro punto a su derecha con el 1. El punto a la derecha del 1 y a igual distancia de éste que el 0 se marca con el 2. El punto a la derecha del 2 y a igual distancia de éste que el 1 se marca con el 3, y así sucesivamente. Los enteros negativos se representan de manera similar a la izquierda del 0.

1.3. Números racionales

Una *fracción* es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Al entero a se le llama *numerador* y a b se le llama *denominador*.

Las fracciones se utilizan en situaciones en las cuales un objeto se divide en cierto número b de partes iguales. En ese caso, si a es un entero no negativo, $\frac{a}{b}$ representa a de esas partes. Por ejemplo si una torta se divide en 8 trozos iguales, se dice que cada trozo es $\frac{1}{8}$ de torta. Y si alguien come 3 de esos trozos, se dice que comió $\frac{3}{8}$ de torta.

Pero hay fracciones que, con numeradores y denominadores diferentes, representan lo mismo. Por ejemplo $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ representan la misma cantidad de torta, a saber media torta. Por esa razón se dice que esas fracciones son "iguales", y se escribe $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, aunque en un lenguaje más técnico se dice que son *equivalentes*. En general, si a, b y k son naturales, se tiene $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$, ya que la fracción de la derecha representa k veces más partes que la de la izquierda, pero partes k veces más pequeñas, por lo cual el resultado es el mismo. Ahora bien, ¿cómo se puede determinar si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales? Si $b = d$ las partes son del mismo tamaño y la igualdad se da si y sólo si $a = c$. En general, como $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ y $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$, la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se dará si y sólo si $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, es decir si y sólo si $ad = bc$.

Adoptaremos entonces la siguiente definición:

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son *equivalentes* si y sólo si $ad = bc$.

Un número *racional* es una clase de equivalencia de fracciones, es decir el conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada. Por ejemplo la fracción $\frac{1}{2}$ y todas sus (infinitas) equivalentes: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{-1}{-2}$, $\frac{-2}{-4}$, etc. definen un número racional, que queda determinado por cualquiera de las fracciones que lo representan.

El conjunto de todos los números racionales se denota $\mathbb{Q}$.

Cada entero a se puede identificar con la clase de fracciones equivalentes a $\frac{a}{1}$, de esta manera se puede considerar a $\mathbb{Q}$ como una extensión de $\mathbb{Z}$.

Una fracción $\frac{a}{b}$ se dice que es *reducida* si a y b son coprimos, es decir si su máximo común divisor es 1. Toda fracción tiene una equivalente que es reducida. En efecto, si $d = \operatorname{mcd}(a, b)$ entonces $a = da'$ y $b = db'$, donde $\operatorname{mcd}(a', b') = 1$. Por lo tanto $\frac{a}{b} = \frac{da'}{db'} = \frac{a'}{b'}$, que es reducida.

1.3.1. Operaciones

Para sumar dos fracciones del mismo denominador, simplemente se suman los numeradores: $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$. Si los denominadores son diferentes, se buscan fracciones equivalentes a las dadas pero que tengan denominadores iguales y se suman los numeradores. Una forma de hacerlo es $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$. Por lo tanto se puede adoptar como definición de la suma la siguiente:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

El producto se define simplemente como

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Puede probarse que si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se sustituyen por fracciones equivalentes, se obtienen resultados equivalentes tanto al calcular la suma como el producto según las definiciones anteriores. Por lo tanto hemos definido en realidad la suma y el producto de números racionales.

En la práctica, para sumar dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se acostumbra tomar fracciones equivalentes cuyo denominador sea $\operatorname{mcm}(a, b)$, número que se denomina *mínimo común denominador*. Esto en general simplifica un poco los cálculos, aunque también puede ocurrir que el cálculo de $\operatorname{mcm}(a, b)$ lleve más tiempo que el de $\frac{ad+bc}{bd}$.

Estas dos operaciones tienen las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva. El 0 es neutro para la suma, el 1 es neutro para el producto, y cada $\frac{a}{b}$ tiene un opuesto $\frac{-a}{b}$. Estas propiedades se encontraban ya en $\mathbb{Z}$, pero en $\mathbb{Q}$ se tiene además la siguiente:

Todo racional $r \neq 0$ tiene un inverso multiplicativo r^{-1} tal que $rr^{-1} = 1$.

En efecto, si $\frac{a}{b}$ es una fracción que representa a r, como $r \neq 0$ debe ser $a \neq 0$, y el racional r^{-1} con representante $\frac{b}{a}$ cumple lo deseado, ya que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1} = 1$.

En vista de esto, en $\mathbb{Q}$ se puede dividir entre cualquier $r \neq 0$. En efecto, si definimos $s/r = sr^{-1}$, entonces $(s/r)r = s$.

Una consecuencia importante es que si $r, s \in \mathbb{Q}$ y $r \neq 0$, entonces la ecuación $rx + s = 0$ tiene solución única, es decir que existe un único racional x tal que $rx + s = 0$. En efecto, $rx + s = 0$ si y sólo si $rx = -s$, si y sólo si $x = -s/r$.

Otra consecuencia es que se puede extender la potenciación a exponentes enteros negativos, definiendo, para $r \neq 0$ y n natural, $r^{-n} = 1/r^n$. Con esta definición se siguen cumpliendo las leyes de los exponentes.

Una cuestión de notación: en lugar de $\frac{a}{b}$ se puede escribir a/b. Esta última notación se suele preferir al escribir fracciones en medio de una línes de texto, pero puede requerir paréntesis adicionales. por ejemplo:

$$\frac{a+b}{c} = (a+b)/c, \quad \text{pero} \quad a+b/c = a+\frac{b}{c},$$

y

$$\frac{a}{b+c} = a/(b+c), \quad \text{pero} \quad a/b+c = \frac{a}{b}+c.$$

1.3.2. Fracciones y expresiones decimales

Una *fracción decimal* es una fracción cuyo denominador es una potencia de 10, por ejemplo $\frac{371}{10}$, $\frac{-237}{100}$, $\frac{43}{10000}$. Cada fracción decimal $\frac{a}{10^k}$ tiene una *expresión decimal* que se obtiene escribiendo el numerador a con una coma intercalada a la izquierda de los últimos k dígitos, agregando ceros iniciales si es necesario. Así se tiene $\frac{371}{10} = 37{,}1$, $\frac{-237}{100} = -2{,}37$, $\frac{43}{10000} = 0{,}0043$.

Si el denominador de una fracción reducida no tiene factores primos diferentes de 2 y 5, ésta se puede expresar como fracción decimal. Por ejemplo:

$$\frac{37}{25} = \frac{37}{5^2} = \frac{37\cdot 2^2}{5^2\cdot 2^2} = \frac{148}{10^2} = 1,48$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2^3} = \frac{7\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^3} = \frac{875}{10^3} = 0,875$$

estas expresiones decimales también se pueden obtener dividiendo el numerador entre el denominador mediante el algoritmo que se aprende en la escuela. Sin embargo si en el denominador de una fracción reducida aparece un primo diferente de 2 y 5, al efectuar la división resulta un proceso que no termina nunca. Por ejemplo

$$\frac{179}{14} = 12,7857142857142857142\ldots$$

y se observa que después de algunos dígitos iniciales (12,7) aparece un grupo de dígitos que se repite indefinidamente. Ese grupo de dígitos (en este ejemplo 857142) se denomina *período*. La repetición indefinida del período se suele indicar colocando un arco sobre él, es decir

$$\frac{179}{14} = 12{,}7\overset{\frown}{857142}$$

Este comportamiento no es casual sino que siempre ocurre para este tipo de fracciones. En efecto, al dividir a entre b se van obteniendo restos menores que b. Pero sólo hay un número finito de restos posibles, luego tarde o temprano alguno se repetirá, y a partir de ese momento comienza la repetición de cifras del período. Como nunca se obtiene resto 0 (ya que en ese caso la fracción sería decimal), los restos posibles van de 1 hasta $b-1$. De esto se deduce que la longitud del período es, como máximo, $b-1$, aunque naturalmente puede ser menor. Este máximo se alcanza, por ejemplo, para $\frac{1}{7} = 0.\widehat{142857}$.

Observemos que si $x = 0.\widehat{a_1 a_{k-1} \ldots a_k}$ entonces

$$10^k x = a_1 a_{k-1} \ldots a_k.\widehat{a_1 a_{k-1} \ldots a_k} = a_1 a_{k-1} \ldots a_k + x,$$

luego $(10^k - 1)x = a_1 a_{k-1} \ldots a_k$ y

$$0.\widehat{a_1 a_{k-1} \ldots a_k} = \frac{a_1 a_{k-1} \ldots a_k}{10^k - 1}.$$

Por ejemplo

$$0.\widehat{135} = \frac{135}{999} = \frac{5}{37}.$$

Usando esto se puede convertir cualquier expresión decimal periódica en fracción ordinaria, por ejemplo:

$$24{,}68\widehat{135} = 24{,}68 + {,}00\widehat{135} = \frac{2468}{1000} + \frac{1}{100} \cdot \frac{5}{37} = \frac{45683}{18500}.$$

Observemos en particular que

$$0{,}999\cdots = 0.\widehat{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

En general todas las expresiones decimales finitas (las que corresponden a fracciones decimales) tienen una equivalente infinita periódica, que termina en una sucesión infinita de nueves. Por ejemplo $2{,}54 = 2{,}53999\ldots$ La única excepción es el 0.

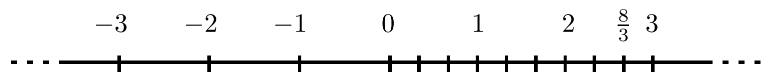
1.3.3. El orden en $\mathbb{Q}$

Las relaciones $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ se pueden extender fácilmente de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$. Para ello, dados dos racionales, representémoslos mediante fracciones con un mismo denominador, digamos $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c}$. Podemos suponer que c es positivo, ya que de lo contrario se pueden sustituir las fracciones por las equivalentes $\frac{-a}{-c}$ y $\frac{-b}{-c}$. Entonces se dice que $\frac{a}{c}$ es menor, igual o mayor que $\frac{b}{c}$ según que a sea menor, igual o mayor que c, respectivamente.

El orden en $\mathbb{Q}$ tiene propiedades similares a las que tiene en $\mathbb{N}$. En particular valen la propiedad transitiva, la tricotomía, la monotonía de la suma y del producto por un factor positivo, el cambio de sentido de la desigualdad al multiplicar por un factor negativo. Una diferencia importante es que entre dos números racionales cualesquiera siempre hay otro racional, lo cual se conoce como *densidad* de $\mathbb{Q}$. En efecto, si $r < s$ entonces multiplicando por $1/2$ se tiene $r/2 < s/2$. Sumando $r/2$ a ambos miembros de esta última desigualdad resulta $r < (r+s)/2$, y sumando

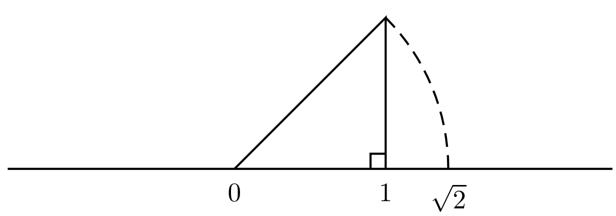
$s/2$ resulta $(r+s)/2 < s$. Por lo tanto $r < (r+s)/2 < s$. Los números enteros, en cambio, no son densos. Por ejemplo entre 1 y 2 no hay ningún otro entero.

Los números racionales se pueden representar fácilmente en una recta. Para ello tomemos un segmento AB como unidad de medida, y el punto A como origen. Para representar $r = \frac{a}{b}$, con a y b enteros positivos, se divide AB en b partes iguales y se toman a de esas partes, a partir de A y en dirección hacia B. Observemos que al 0 le corresponde A, a 1 le corresponde B y a $\frac{1}{2}$ le corresponde el punto medio del segmento AB. Los racionales negativos se representan a la izquierda del origen. El siguiente diagrama muestra la representación de $\frac{8}{3}$.



1.4. Números reales

La construcción anterior suscita la siguiente pregunta: ¿quedarán todos los puntos de la recta representados por algún número racional? La respuesta es negativa. En efecto, consideremos un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1, y sea h la longitud de su hipotenusa. Por el Teorema de Pitágoras se sabe que $h^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Este número h que elevado al cuadrado nos da 2 se denota $\sqrt{2}$ y se puede representar en la recta como se ve a continuación:



Pero los mismos pitagóricos descubrieron, hace alrededor de 2500 años, que $\sqrt{2}$ no puede ser racional. La prueba es un clásico del método de *reducción al absurdo*: se supone lo contrario de lo que se quiere probar y se llega a una contradicción. En efecto, si $\sqrt{2}$ fuese racional se podría escribir $\sqrt{2} = a/b$, donde a/b es una fracción irreducible. Elevando al cuadrado resulta $2 = a^2/b^2$, y multiplicando por b^2 se obtiene $2b^2 = a^2$. Esto nos dice que a^2 es par, y por lo tanto a también debe ser par (ya que si fuese impar su cuadrado sería impar). Entonces a se puede escribir como $2c$, para cierto entero c, y sustituyendo a por $2c$ en $2b^2 = a^2$ queda $2b^2 = 4c^2$, de donde $b^2 = 2c^2$. De aquí se sigue que b debe ser par, contradiciendo la suposición de que la fracción a/b era irreducible. Por lo tanto $\sqrt{2}$ no es racional.

Podemos intentar expresar $\sqrt{2}$ mediante una fracción decimal. Como $1^2 < 2 < 2^2$, es claro que $1 < \sqrt{2} < 2$. Como $1{,}1^2 = 1{,}21 < 2$, $1{,}2^2 = 1{,}44 < 2$, $1{,}3^2 = 1{,}69 < 2$, $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$ pero $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$, vemos que la primera cifra decimal de $\sqrt{2}$ debe ser 4. Del mismo modo, como $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$ pero $1{,}42^2 = 2{,}064 > 2$, la segunda cifra decimal de $\sqrt{2}$ debe ser 1. Continuando de esta manera se pueden calcular sucesivamente cuántas cifras decimales queramos:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769\ldots$$

Es decir que $\sqrt{2}$ se puede identificar con una expresión decimal infinita no periódica.

A las expresiones decimales infinitas, periódicas o no, precedidas o no de un signs $-$, se les llama *números reales*. Recordemos sin embargo que cada expresión decimal periódica que finaliza en infinitos nueves tiene una equivalente pero terminada en infinitos ceros: ambas definen el mismo número real. También se identifican $0{,}000\ldots$ y $-0{,}000\ldots$, ambas expresiones representan el 0.

El conjunto de todos los números reales se denota $\mathbb{R}$. Observemos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. A los números reales que no son racionales se les llama *irracionales*. Por ejemplo $\sqrt{2}$ es, como vimos más arriba, un irracional.

Existen varias construcciones alternativas de los números reales (cortaduras de Dedekind, sucesiones de Cauchy de números racionales, etc.) que el lector interesado puede consultar en la literatura especializada.

1.4.1. Operaciones

Las operaciones de suma y producto se extienden de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ y se mantienen las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Cada real a tiene un opuesto $-a$ tal que $a+(-a) = 0$. Cada real $a \neq 0$ tiene un *recíproco* o inverso multiplicativo, que se denota a^{-1} o $\frac{1}{a}$.

Aunque aquí no entraremos en los detalles de cómo hacerlo, la potenciación a^b que definimos para los números naturales se puede extender a los reales para $a > 0$ y b cualquiera. El resultado es real positivo, y se siguen cumpliendo las leyes de los exponentes:

$$(ab)^c = a^c \cdot b^c, \qquad a^{b+c} = a^b \cdot a^c, \qquad (a^b)^c = a^{bc}.$$

Observemos en particular que $\left(a^{\frac{1}{b}}\right)^b = a^1 = a$. Por lo tanto $a^{\frac{1}{b}}$ se puede considerar como la raíz de índice b de a. La notación $\sqrt[b]{a}$ significa lo mismo que $a^{\frac{1}{b}}$.

Las identidades

$$\sqrt[b]{\sqrt[c]{a}} = \sqrt[bc]{a}, \qquad \sqrt[c]{ab} = \sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}, \qquad \sqrt[b]{a^c} = \sqrt[c]{a^b}$$

son inmediatas.

Ejemplo 1.1. Exprese el número $\frac{5}{3-\sqrt{2}}$ en la forma $a + b\sqrt{2}$, con $a, b \in \mathbb{Q}$.

Solución: Recordemos que $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$, luego $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 3^2-2 = 7$ y

$$\frac{5}{3-\sqrt{2}} = \frac{5(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{15+5\sqrt{2}}{7} = \frac{15}{7} + \frac{5}{7}\sqrt{2}.$$

Si $a < 0$ la potencia a^b sólo está definida para b entero. Se conviene que $0^b = 0$ para $b > 0$, y no está definido para $b \leq 0$ (sin embargo, en comninatoria muchos autores toman $0^0 = 1$).

Para los reales negativos sólo se pueden definir las raíces de índice entero impar. En efecto, si n es un natural impar y a un real negativo, entonces $-a > 0$ y existe $\sqrt[n]{-a}$, y se tiene

$$\left(-\sqrt[n]{-a}\right)^n = -\left(\sqrt[n]{-a}\right)^n = -(-a) = a.$$

Por ejemplo $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

En $\mathbb{R}$ siempre se puede resolver la ecuación $x^b = a$, para cualquier $a > 0$ y $b \neq 0$. Esta ecuación tiene la solución positiva $\sqrt[b]{a}$. Si b es un entero par hay otra solución, a saber $-\sqrt[b]{a}$. Si $a < 0$ la ecuación $x^b = a$ sólo tiene solución si b es un entero impar, a saber $x = -\sqrt[b]{-a}$. La ecuación $x^b = 0$, para $b > 0$, tiene como única solución $x = 0$.

Por ejemplo $x^2 = 9$ tiene la solución positiva $\sqrt{9} = 3$ y además la solución negativa -3. La ecuación $x^2 = 0$ tiene como única solución $x = 0$. La ecuación $x^2 = -9$ no tiene solución real (pero sí en el campo complejo, como se verá más adelante). La ecuación $x^3 = -125$ tiene como única solución $x = -5$.

En $\mathbb{R}$ se pueden definir también los logaritmos. Si $a, b > 0$ y $a \neq 1$, $\log_a(b)$ se define como el exponente al que se debe elevar la base a para obtener b como resultado. Es decir:

$$a^{\log_a(b)} = b.$$

A partir de las leyes de los exponentes se prueba fácilmente que

$$\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c),$$

y también

$$\log_a(b) \cdot \log_b(c) = \log_a(c), \qquad \log_b(c) = \frac{\log_a(c)}{\log_a(b)}.$$

Estas últimas identidades se conocen como «regla del cambio de base», ya que permiten calcular los logaritmos en una base cuando se conocen en otra.

Las logaritmos más usadas son los de base $e = 2{,}718281828\ldots$, llamados logaritmos naturales, o neperianos, y los de base 10, llamados logaritmos decimales.

Ejemplo 1.2. Calcule $a = \log_2(0,0625)$ y $b = \log_8(32)$.

Solución: $a = \log_2(\frac{1}{16}) = -4$, $b = \frac{\log_2(32)}{\log_2(8)} = \frac{5}{3}$.

Finalmente, el conjunto de los números reales se puede poner en correspondencia ordenada y biyectiva con todos los puntos de la recta.

1.4.2. El orden en $\mathbb{R}$

Las relaciones $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ se pueden extender de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$. Llamemos *negativos* a los reales no nulos precedidos del signo $-$, y *positivos* a los no nulos sin signo $-$. El $0 = 0{,}000\dots$ no es ni positivo ni negativo. Dados dos reales positivos a y b, representémoslos mediante expresiones decimales infinitas (para los que admiten dos expresiones, escojamos la que finaliza en infinitos ceros): $a = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0.a_{-1} a_{-2} \dots$ y $b = b_h b_{h-1} \dots b_1 b_0.b_{-1} b_{-2} \dots$. Si $k < h$ entonces $a < b$, y si $k > h$ entonces $a > b$. Si $k = h$ se examinan los dígitos de ambos números, de izquierda a derecha. Si $a_i = b_i$ para todo i, evidentemente $a = b$. Si no, hay un primer índice i para el cual $a_i \neq b_i$. Si $a_i < b_i$ entonces $a < b$, y si $a_i > b_i$ entonces $a > b$. Por ejemplo $243{,}16\dots > 98{,}37\dots$, $24{,}16597\dots < 24{,}16702\dots$

Para dos reales negativos distintos a y b, $a < b$ si $-a > -b$. Finalmente, cualquier real negativo es menor que 0, y 0 es menor que cualquier real positivo.

El orden en $\mathbb{R}$ que acabamos de definir tiene propiedades similares a las que tiene en $\mathbb{Q}$. En particular valen la propiedad transitiva, la tricotomía, la monotonía de la suma y del producto por un factor positivo, el cambio de sentido de la desigualdad al multiplicar por un factor negativo. Pero hay una propiedad del orden en $\mathbb{R}$ que es característica y marca una diferencia importante con $\mathbb{Q}$. La explicaremos luego de dar algunas definiciones.

Un número real c es *cota superior* de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, si para todo $a \in A$ se cumple $a \leq c$. En este caso se dice que A está *acotado superiormente*. Un número real M es *máximo* de $A \subset \mathbb{R}$, si M es cota superior de A y además $M \in \mathbb{R}$. Análogamente $d \in \mathbb{R}$ es *cota inferior* de A si para todo $a \in A$ se cumple $d \leq a$ (en este caso se dice que A está *acotado inferiormente*) y $m \in \mathbb{R}$ es *mínimo* de A, si m es cota inferior de A y además $m \in \mathbb{R}$. Un conjunto es *acotado* si lo está tanto superior como inferiormente.

La *parte entera* o *piso* de un real x se define como el mayor entero que es menor o igual que x, y se denota $\lfloor x \rfloor$. Por ejemplo $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = 2$, $\left\lfloor -\frac{7}{3} \right\rfloor = -3$. Observe que $\lfloor x \rfloor = x$ si y sólo si x es entero. La *parte fraccionaria* de x se define como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Si $x \geq 0$ y lo representamos mediante una expresión decimal que no finalice en infinitos nueves, entonces $\lfloor x \rfloor$ es sencillamente el entero cuyos dígitos aparecen a la izquierda de la coma decimal de x.

Si el conjunto de las cotas superiores de un conjunto A tiene mínimo, a ese mínimo se le llama *supremo* o *extremo superior* de A y se denota $\sup A$. Análogamente, si el conjunto de las cotas inferiores de A tiene máximo, a ese máximo se le llama *ínfimo* o *extremo inferior* de A, y se denota $\operatorname{ínf} A$.

La propiedad del orden en $\mathbb{R}$ a la cual nos referíamos más arriba es la siguiente:

Principio del supremo: Todo conjunto no vacío y acotado superiormente de números reales tiene supremo.

Prueba: La haremos sólo para el caso en que A tenga algún elemento no negativo, dejando el otro caso como ejercicio. Condideremos el conjunto A_0 formado por las partes enteras de los elementos de A. Como A es acotado superiormente, A_0 contiene sólo un número finito de elementos no negativos, y por lo tanto tiene un elemento máximo $g \geq 0$. Condideremos ahora el conjunto A_1 formado por todos los elementos de A que tienen parte entera g. Sea a_1 el mayor dígito que aparezca como primer cifra decimal de algún elemento de A_1. Sea A_2 el conjunto formado por todos los elementos de A_1 que comienzan con g, a_1. Sea a_2 el mayor dígito que aparezca como segunda cifra decimal de algún elemento de A_2. Continuando de este modo se obtiene un real $g, a_1 a_2 \ldots$ que es el supremo de A.

Por razones de simetría, existe también un *Principio del ínfimo*: Todo conjunto no vacío y acotado inferiormente de números reales tiene ínfimo. Estos dos principios son en realidad equivalentes. Ninguno de ellos vale en $\mathbb{Q}$.

1.5. Números complejos

Un número complejo es simplemente un par ordenado de números reales. El conjunto de todos los números complejos se denota $\mathbb{C}$, es decir

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

La *parte real* de un complejo $z = (a, b)$ es la primera componente a del par ordenado. La *parte imaginaria* es la segunda componente b. Se denotan $\Re(z)$ e $\Im(z)$, respectivamente. Cada número real a se puede identificar con el complejo $(a, 0)$. De esta manera podemos considerar a $\mathbb{C}$ como una extensión de $\mathbb{R}$. Los números complejos de la forma $(0, b)$, es decir con parte real nula, se llaman *imaginarios puros.*

Recordemos que si en el plano se toma un sistema de coordenadas cartesianas, entonces se puede establecer una correspondencia biyectiva entre puntos del plano y pares ordenados de números reales (los cuales se llaman abscisa y ordenada del punto respectivo). Por consiguiente, los números complejos se pueden representar también como puntos del plano.

1.5.1. Operaciones

La suma de dos números complejos (a, b) y (c, d) se efectúa componente a componente, es decir

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Es inmediato verificar que esta operación es conmutativa y asociativa, a partir de las propiedades correspondientes de la suma de reales. Además el complejo $(0, 0)$ es elemento neutro de la suma, y cada complejo (a, b) tiene un opuesto $(-a, -b)$.

El producto se define de una manera más complicada, que a primera vista puede parecer un poco extraña:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Esta operación es conmutativa, ya que

$$(c, d)(a, b) = (ca - db, cb + da) = (ac - bd, ad + bc) = (a, b) \cdot (c, d).$$

Veamos si es asociativa. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}\big((a, b)(c, d)\big)(e, f) &= (ac - bd, ad + bc)(e, f)\\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e)\\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce).\end{aligned}$$

Y del mismo modo se calcula

$$\begin{aligned}(a, b)\big((c, d)(e, f)\big) &= (a, b)(ce - df, cf + de)\\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df))\\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf).\end{aligned}$$

Por lo tanto el producto de números complejos es asociativo.

El $(1, 0)$, que se identifica con el real 1, actúa como elemento neutro ya que

$$(a, b)(1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b).$$

También se verifica la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}&(a, b)\big((c, d) + (e, f)\big) = (a, b)(c + e, d + f)\\ &\quad= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e))\\ &\quad= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be)\\ &\quad= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f).\end{aligned}$$

El producto de un complejo por un real es particularmente sencuillo, En efecto, si se desea multiplicar (a, b) por el real c, que se identifica con $(c, 0)$, entonces

$$(a, b)c = (a, b)(c, 0) = (ac - b \cdot 0, a \cdot 0 + bc) = (ac, bc),$$

es decir que basta multiplicar cada componente de (a, b) por c.

1.5.2. La unidad imaginaria

En $\mathbb{R}$ la ecuación

$$x^2 = -1$$

no tiene solución, ya que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Veamos si en $\mathbb{C}$ tiene solución. Pongamos $x = (a, b)$. Entonces

$$x^2 = (a, b)(a, b) = (a^2 - b^2, 2ab) = (-1, 0)$$

si y sólo si $a^2 - b^2 = -1$ y $2ab = 0$. Ahora bien, $2ab = 0$ sólo si $a = 0$ o $b = 0$. Pero $b = 0$ conduce a $a^2 = -1$, que es imposible. La alternativa es $a = 0$ y $-b^2 = -1$, o sea $b^2 = 1$, que tiene dos soluciones: $b = 1$ y $b = -1$. Esto significa que la ecuación $x^2 = -1$ tiene dos soluciones en $\mathbb{C}$, a saber $(0, 1)$ y $(0, -1)$. El primero de estos números se denomina *unidad imaginaria* y se denota con la letra i, es decir

$$i = (0, 1).$$

Evidentemente entonces $(0, -1) = -(0, 1) = -i$ y las dos raíces de la ecuación $x^2 = -1$ son i y $-i$.

1.5.3. Formas binómica y polar

Puesto que

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1) = a + bi,$$

el complejo (a, b) se puede representar como $a + bi$. Esta representación, llamada *forma binómica*, suele ser más cómoda que la de pares ordenados, ya que para multiplicar sólo hay que recordar que $i^2 = -1$ y aplicar las propiedades del producto. Por ejemplo

$$(3 + 4i)(2 - 5i) = 3 \cdot 2 + (4i)2 + 3(-5i) + (4i)(-5i) = 6 + 8i - 15i + 20 = 26 - 7i.$$

Dado un número complejo $z = a + bi$, su *conjugado* es $\overline{z} = a - bi$ y su *módulo* es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Observe que

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

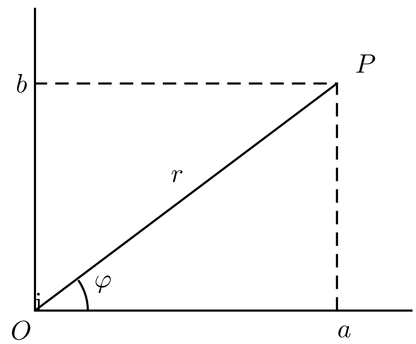
Para dividir un complejo w entre otro $z \neq 0$, se hace lo siguiente:

$$\frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} w\overline{z}.$$

Por ejemplo

$$\frac{3 + 2i}{4 - 3i} = \frac{(3 + 2i)(4 + 3i)}{4^2 + 3^2} = \frac{1}{25}(6 + 15i) = \frac{6}{25} + \frac{3}{4}i.$$

Representemos el complejo $z = a + bi$ en el plano cartesiano como un punto P de coordenadas (a, b). Sea r la distancia del origen O a P y φ el ángulo que forma el eje de las x con la semirecta OP. Observe que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ es el módulo de z. Al ángulo φ se le llama *argumento* de z.



Observe que $a = r\cos\varphi$ y $b = r\operatorname{sen}\varphi$, luego

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

Esta representación de un número complejo se conoce como forma *polar* o *trigonométrica*.

dados dos complejos $z = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ y $w = s(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi)$, como consecuencia de las fórmulas para el coseno y el seno de una suma se tiene que

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)s(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi) \\ &= rs(\cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + i(\cos\varphi\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\varphi\cos\psi)) \\ &= rs(\cos(\varphi+\psi) + i\operatorname{sen}(\varphi+\psi)). \end{aligned}$$

En palabras: el módulo de un producto es el producto de los módulos y el argumento es la suma de los argumentos.

La función exponencial $f(x) = e^x$ se puede extender de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ mediante la definición

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b),$$

donde b se toma como argumento en radianes de las funciones seno y coseno. Es claro que si $b = 0$ esta definición coincide con la de la exponencial real. Las razones profundas de esta definición se estudian en los cursos de análisis matemático, y tienen que ver con los desarrollos en serie de potencias de las funciones e^x, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$. Aquí nos limitaremos a justificarla observando que cumple la ley de los exponentes $e^{z+w} = e^z e^w$. En efecto, si $z = a + bi$ y $w = c + di$ entonces

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{a+c}(\cos(b+d) + i\operatorname{sen}(b+d)) \\ &= e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b)e^c(\cos d + i\operatorname{sen} d) = e^z e^w. \end{aligned}$$

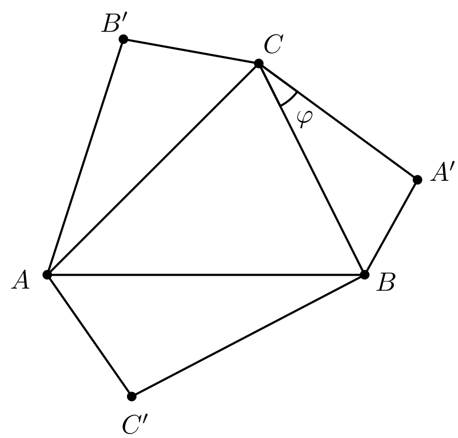
Observemos que $e^{\pi i} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1$, de donde

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

relación notable que liga a los cinco números más importantes de la matemática.

Los números complejos tienen muchas aplicaciones en geometría. Por ejemplo el punto medio del segmento AB, si A y B se interpretan como números complejos, es simplemente $(A+B)/2$. Y el baricentro de un triángulo ABC es $(A+B+C)/3$. Aplicar una homotecia de centro en el origen y razón r (real) equivale a multiplicar por r. Rotar un punto A un ángulo φ alrededor del origen equivale a multiplicar A por $e^{i\varphi}$. El resultado de rotar un punto A un ángulo φ alrededor de un punto Q es $Q + e^{i\varphi}(A - Q)$.

Ejemplo 1.3. Sea ABC un triángulo. Sea A' un punto no alineado con B y C. Sean B' y C' puntos tales que los triángulos $B'CA$ y $C'AB$ sean directamente semejantes al $A'BC$. Probar que el baricentro de $A'B'C'$ coincide con el de ABC.



Solución: Sea $r = CA'/CB$ y $\varphi = \angle BCA'$. Entonces $A' = C + re^{i\varphi}(B - C)$. Análogamente $B' = A + re^{i\varphi}(C - A)$ y $C' = B + re^{i\varphi}(C - B)$. Luego

$$A' + B' + C' = A + B + C + re^{i\varphi}((B - C) + (C - A) + (C - B)) = A + B + C$$

y en consecuencia $\frac{1}{3}(A' + B' + C') = \frac{1}{3}(A + B + C)$.

Para saber más sobre números complejos y sus aplicaciones en geometría vea [1] y [6].

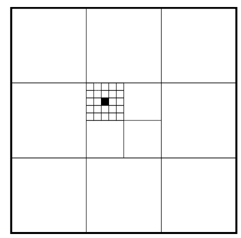
1.6. Problemas

Problema 1.1. (Canguro 2010, 1º) Sea $N = 2^{2010} \cdot 125^{671}$. Halle
(a) el número de cifras de N,
(b) la suma de todas las cifras de N.

Problema 1.2. Pruebe que el número $(121)_b$ es un cuadrado perfecto cualquiera que sea la base b.

Problema 1.3. (Canguro 2009, 2º) El área del cuadrado más grande es 1. ¿Cuál es el área del pequeño cuadradito negro?

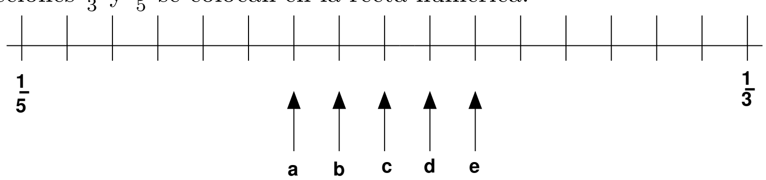
A $\frac{1}{100}$; B $\frac{1}{300}$; C $\frac{1}{600}$; D $\frac{1}{900}$; E $\frac{1}{1000}$.



Problema 1.4. (Canguro 2009, 4º) ¿Cuál es el valor de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{7}$ de $\frac{7}{8}$ de $\frac{8}{9}$ de $\frac{9}{10}$ de 1000?

A 250; B 200; C 100; D 50; E ninguna de las anteriores.

Problema 1.5. (Canguro 2009, 2º)
Las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$ se colocan en la recta numérica:



¿Dónde va la fracción $\frac{1}{4}$?

A a; B b; C c; D d; E e.

Problema 1.6. Halle una fórmula cerrada pare la suma

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}.$$

Problema 1.7. Calcule el valor de la suma

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2014\cdot 2015}.$$

Problema 1.8. (Regional 2010/5, 3º)

(a) Pruebe la igualdad $\dfrac{n^2}{(n-1)(n+1)} = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

(b) Calcule el valor exacto de $\dfrac{2^2}{1\cdot 3} + \dfrac{3^2}{2\cdot 4} + \dfrac{4^2}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{2010^2}{2009\cdot 2011}$.

Problema 1.9. (Canguro 2010, 4º y 5º) El valor de la expresión

$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)\cdots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$$

es igual a:

A 3^{2048}; B 2^{4096}; C 2^{2048}; D 3^{4096}; E $3^{2048}+2^{2048}$.

Problema 1.10. (OJM 2010, Final 2º) Juan tiene un saco lleno de naranjas. A Pedro le regala la mitad de las naranjas más media naranja, a Luis le regala la tercera parte de las que le quedan más un tercio de naranja y a Armando la cuarta parte de lo que le queda más un cuarto de naranja. Al final, a Juan le quedaron 8 naranjas. ¿Cuántas naranjas tenía al principio? ¿Cuántas dio a cada amigo?

Problema 1.11. Sean a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$. Pruebe que si b y d son impares, entonces la suma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, expresada en forma reducida, tiene denominador impar.

Problema 1.12. ¿Existe algún entero $n > 1$ tal que la suma $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ sea entera?

Problema 1.13. (Canguro 2009, 4º y 5º) ¿Cuántos ceros deben insertarse en el lugar del $*$ en la expresión decimal $1.*1$ para obtener un número menor que $\frac{2009}{2008}$ pero mayor que $\frac{20009}{20008}$?

(A) 1; (B) 4; (C) 2; (D) 5; (E) 3.

Problema 1.14. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ sea a_n el resto de la división de n^2 entre 6. Pruebe que el número $0.a_1a_2a_3\ldots$ es racional, y expréselo como una fracción ordinaria.

Problema 1.15. Pruebe que la suma de un racional y un irracional es siempre irracional. Muestre que la suma de dos irracionales puede ser tanto racional como irracional.

Problema 1.16. Pruebe que $\sqrt[3]{2}$ es irracional.

Problema 1.17. Si n y k son números naturales y $\sqrt[k]{n}$ es racional, pruebe que $n = a^k$ para algún natural a.

Problema 1.18. ¿Es cierto o falso que el producto de un racional y un irracional es siempre irracional? ¿Y qué se puede decir del producto de dos irracionales?

Problema 1.19. Pruebe que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

Problema 1.20. Pruebe que

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = 9.$$

Problema 1.21. Calcule

$$\sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2014\sqrt{1 + 2013\sqrt{1 + \cdots + 5\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 3\sqrt{1}}}}}}}.$$

Problema 1.22. Calcule

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1\cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2\cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{728^2} + \sqrt[3]{728\cdot 729} + \sqrt[3]{729^2}}.$$

Problema 1.23. (OMCC 2010) Sean p, q y r números racionales distintos de cero tales que

$$\sqrt[3]{pq^2} + \sqrt[3]{qr^2} + \sqrt[3]{rp^2}$$

es un número racional distinto de cero. Pruebe que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$$

también es un número racional.

Problema 1.24. Calcule:

$$a = \log_{\frac{1}{9}}(27), \qquad b = \log_{\sqrt{8}}\left(\sqrt[7]{\frac{1}{32}}\right), \qquad c = \left(\sqrt[3]{9}\right)^{\log_{\sqrt[9]{3}}(\sqrt[6]{3})}.$$

Capítulo 2

Polinomios

Los polinomios son expresiones algebraicas sencillas que sin embargo dan origen a numerosos e interesantes problemas. Son un tema típico en las olimpiadas matemáticas.

2.1. Polinomios

Un *polinomio* en una variable (o “indeterminada”) x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y a_0, a_1,..., a_n son elementos de un anillo (por lo general los enteros, los racionales, los reales o los complejos). Cada sumando $a_k x^k$ en la expresión anterior es un *término* o *monomio* del polinomio. A k se le llama *grado* y a a_k se le llama *coeficiente* del término $a_k x^k$.

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus monomios que tengan coeficiente no nulo. Por ejemplo $x^2 - 6x + 4$ es un polinomio de segundo grado y $0x^7 + 3x^5 + 2x^3 - 6x$ es un polinomio de quinto grado. El grado del polinomio nulo (0) se considera indefinido. Si P es un polinomio, $\mathrm{gr}(P)$ denotará el grado de P. Al término de mayor grado $a_n x^n$ (con $a_n \neq 0$) se le llama *término principal* del polinomio. Al término a_0 se le llama *término constante* y puede ser considerado como el coeficiente de $x^0 = 1$. Si el coeficiente de un término de grado positivo es 1, no se acostumbra escribirlo (es decir que en vez de $1x^3$ se escribe simplemente x^3). Un polinomio es *constante* si su único término es el término constante. Por ejemplo 5 y -3 son polinomios constantes. Al polinomio constante 0 se le llama *polinomio nulo*.

El conjunto de todos los polinomios con coeficientes en un anillo A se denota $A[x]$. Por ejemplo $\mathbb{Z}[x]$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros.

Usaremos letras mayúsculas como P y Q para denotar polinomios. Si se desea indicar cuál es la variable se escribe la misma entre paréntesis, por ejemplo $P(x)$, $Q(u)$.

El nombre de la variable en realidad no tiene importancia: lo esencial de un polinomio es su secuencia ordenada de coeficientes a_0, $a_1, \dots$, a_n. Por ejemplo $3x^2 - 5x + 4$ y $3u^2 - 5u + 4$ son el mismo polinomio, expresado en el primer caso con la variable x y en el segundo con la variable u. Más precisamente: dos polinomios P y Q son *idénticos* si son del mismo grado y tienen la misma secuencia de coeficientes.

Si α es un número entonces $P(\alpha)$ denota el resultado de evaluar P en α, es decir de sustituir cada aparición de la letra x por α y calcular el resultado. Por ejemplo si $P(x) = x^2 + 2x + 3$ entonces $P(-5) = (-5)^2 + 2(-5) + 3 = 25 - 10 + 3 = 18$. De esta manera cada polinomio P determina una *función polinómica*, la que a cada número α le hace corresponder $P(\alpha)$. Es obvio que polinomios idénticos determinan la misma función polinómica. Sin embargo el recíproco de esta afirmación, aunque verdadero en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$, requiere una demostración (que se verá más adelante).

Observe que no es lo mismo polinomio que función polinómica: un polinomio no es una función, sino una mera expresión, o si se quiere una secuencia de coeficientes.

2.1.1. Operaciones con Polinomios

Dados dos polinomios en x, un término de uno de ellos es *semejante* a un término del otro si en ambos la x aparece elevada al mismo exponente.

La suma de dos polinomios se efectúa sumando los coeficientes de términos semejantes (si un término de un polinomio no tiene semejante en el otro, queda igual en la suma). Por ejemplo si $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x + 5$ y $Q(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x + 2$, entonces

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= x^4 + (2+5)x^3 - 6x^2 + (-4+7)x + (5+2) \\ &= x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 3x + 7. \end{aligned}$$

La suma de polinomios es conmutativa y asociativa. El polinomio nulo es elemento neutro para esta suma. Si $P(x)$ es un polinomio llamemos $-P(x)$ al polinomio que se obtiene cambiando de signo a cada coeficiente de $P(x)$. Es claro que $P(x) + (-P(x)) = 0$, así que $-P(x)$ es el opuesto de $P(x)$ respecto a la suma. La diferencia $P - Q$ de dos polinomios se define como $P + (-Q)$. Es claro que dos polinomios son idénticos si y sólo si su diferencia es el polinomio nulo.

Es fácil verificar que $\mathrm{gr}(P+Q) \le \max\{\mathrm{gr}(P), \mathrm{gr}(Q)\}$. La desigualdad puede ser estricta, si ambos polinomios son del mismo grado y los coeficientes de los términos principales son opuestos.

El *producto* de dos polinomios se efectúa multiplicando cada término de un polinomio por cada término del otro y agrupando términos semejantes (el producto de dos términos ax^k y bx^h es abx^{k+h}). Por ejemplo

$$\begin{aligned}(x^2-3x+4)(2x+5) &= 2x^3+5x^2-6x^2-15x+8x+20\\ &= 2x^3-x^2-7x+20.\end{aligned}$$

El producto de polinomios es conmutativo y asociativo. Además se cumple la ley distributiva: $(P+Q)R = PR+QR$, para cualesquiera polinomios P, Q y R. El grado del producto de polinomios no nulos es la suma de los grados de los factores.

Productos notables

Hay algunos productos que aparecen con mucha frecuencia y conviene recordarlos. Reciben el nombre de *productos notables*:

$$\boxed{\begin{aligned}(x+a)(x-a) &= x^2-a^2,\\ (x+a)^2 &= x^2+2ax+a^2,\\ (x-a)^2 &= x^2-2ax+a^2,\\ (x+a)(x+b) &= x^2+(a+b)x+ab,\\ (x+a)^3 &= x^3+3ax^2+3a^2x+a^3.\end{aligned}}$$

En las igualdades anteriores a y b denotan constantes cualesquiera.

Las identidades para $(x+a)^2$ y $(x+a)^3$ admiten una generalización que se conoce como *Teorema del binomio de Newton*:

$$\boxed{\begin{aligned}(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3x^{n-3} + \cdots\\ \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^kx^{n-k} + \cdots + na^{n-1}x + a^n,\end{aligned}}$$

donde $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots k$ es el *factorial* de k.

Si $P(x)$, $Q(x)$ y $T(x)$ son polinomios y $P(x)Q(x) = T(x)$ entonces se dice que $P(x)$ y $Q(x)$ son *divisores* o *factores* de $T(x)$, y que $T(x)$ es *múltiplo* de $P(x)$ y $Q(x)$. *Factorizar* un polinomio significa expresarlo como el producto de dos o más polinomios no constantes. Los productos notables vistos más arriba permiten obtener algunas factorizaciones, por ejemplo:

$$\begin{aligned}x^2+6x+9 &= x^2+2\cdot 3x+3^2 = (x+3)^2,\\ x^2-25 &= x^2-5^2 = (x+5)(x-5),\\ x^2+5x+6 &= x^2+(2+3)x+2\cdot 3 = (x+2)(x+3),\end{aligned}$$

Otras factorizaciones comunes y útiles son las siguientes:

$$\boxed{\begin{aligned} x^3 - a^3 &= (x-a)(x^2+ax+a^2), \\ x^3 + a^3 &= (x+a)(x^2-ax+a^2) \\ x^4 + 4a^4 &= (x^2+2ax+2a^2)(x^2-2ax+2a^2). \end{aligned}}$$

La última se conoce como *identidad de Sophie Germain*. La primera se puede generalizar así:

$$\boxed{x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}).}$$

Para n *impar* se tiene también

$$\boxed{x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}).}$$

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se pueden *componer* para obtener otro polinomio $P(Q(x))$. Para ello se sustituye cada aparición de x en P por $Q(x)$. Por ejemplo si $P(x) = x^2 - 2x + 7$ y $Q(x) = x + 3$ entonces

$$\begin{aligned} P(Q(x)) &= (x+3)^2 - 2(x+3) + 7 \\ &= (x^2+6x+9) - 2(x+3) + 7 = x^2 + 4x + 10. \end{aligned}$$

y

$$Q(P(x)) = (x^2 - 2x + 7) + 3 = x^2 - 2x + 10.$$

La *división* con resto de polinomios es similar a la división con resto de números enteros: Dados un polinomio P (dividendo) y un polinomio no nulo D (divisor) entonces existen dos polinomios únicos Q (cociente) y R (resto) tales que

$$\boxed{P = DQ + R, \quad \text{donde } R = 0 \text{ o } \operatorname{gr}(R) < \operatorname{gr}(D).}$$

Si $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ y

El siguiente ejemplo muestra cómo se calculan Q y R por el método de la *división larga*.

$$\begin{array}{rl} 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4 & \big| \; \underline{x^2 + x - 1} \\ \underline{2x^3 + 2x^2 - 2x \phantom{{}+4}} & \;\; 2x - 5 \\ -5x^2 + 7x + 4 & \\ \underline{-5x^2 - 5x + 5} & \\ 12x - 1 & \end{array}$$

Como ejercicio verifique que $2x^3 - 3x^2 + 5x + 4 = (x^2 + x - 1)(2x - 5) + 12x - 1$.

Observe que si $P(x)$ y $D(x)$ tienen coeficientes enteros y $D(x)$ es *mónico* (es decir, el coeficiente de su término principal es 1), entonces el cociente y el resto de la división de $P(x)$ entre $D(x)$ tienen coeficientes enteros.

Un caso particular importante se presenta cuando el divisor es de la forma $x - \alpha$, para alguna constante α. En este caso el resto debe ser una constante (pues o es nulo o es de grado 0) y se tiene $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r$. Por lo tanto $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + r = 0 \cdot Q(\alpha) + r = r$. Es decir que el resto de esta división es precisamente el valor del polinomio $P(x)$ evaluado en α.

Si el dividendo es $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, el cociente será un polinomio de grado $n - 1$, digamos $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$, y debe cumplirse que

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + P(\alpha)$$

$$= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_0 - \alpha b_1)x + P(\alpha) - \alpha b_0.$$

Igualando coeficientes de potencias iguales de x a ambos lados del signo de igual resulta $a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1}$ $a_1 = b_0 - \alpha b_1$, $a_0 = P(\alpha) - \alpha b_0$. Por lo tanto $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}, \ldots$, $b_0 = a_1 + \alpha b_1$, $P(\alpha) = a_0 + \alpha b_0$.

Estos cálculos se realizan fácilmente mediante el siguiente esquema de Ruffini, en cuya fila superior se escriben los coeficientes del dividendo mientras que en la fila inferior se van obteniendo, uno a uno, los coeficientes del cociente y en la última casilla el resto:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
α		αa_n	$\ldots$	αb_1	αb_0
	a_n	$a_{n-1} + \alpha a_n$	$\ldots$	b_0	$P(\alpha)$

Observe que el coeficiente a_n se baja a la tercera fila. Luego se multiplica por α y el resultado αa_n se coloca en la segunda fila, debajo de a_{n-1}. Estos dos números se suman y el resultado se coloca en la misma columna, tercera fila. El procedimiento continúa del mismo modo.

Como ejemplo concreto dividamos $3x^4 + 2x^3 - 3x + 5$ entre $x + 2$. Observe que $x + 2 = x - (-2)$ y por lo tanto $\alpha = -2$. Como el dividendo no tiene término en x^2 colocamos un 0 en el puesto de a_2.

	3	2	0	-3	5
-2		-6	8	-16	38
	3	-4	8	-19	43

El cociente obtenido es $3x^3 - 4x^2 + 8x - 19$ y el resto es 43.

2.1.2. Raíces de un polinomio

Un número α es *raíz* de un polinomio $P(x)$ si $P(\alpha) = 0$. En este caso la división de $P(x)$ entre $x - \alpha$ es exacta, ya que el resto $P(\alpha)$ es cero, y $P(x)$ se puede factorizar como $P(x) = (x - \alpha)Q_1(x)$. Si α es también raíz de Q_1 entonces se podrá escribir $Q_1(x) = (x - \alpha)Q_2(x)$ y por lo tanto $P(x) = (x - \alpha)^2 Q_2(x)$. Si α es también raíz de Q_2 entonces se podrá escribir $Q_2(x) = (x - \alpha)Q_3(x)$ y por lo tanto $P(x) = (x - \alpha)^3 Q_3(x)$, y así sucesivamente. A la mayor potencia de $x - \alpha$ que divide a $P(x)$ se le llama *multiplicidad* de la raíz α. Si la multiplicidad es 1 se dice que α es una raíz simple, si es 2 se dice que α es una raíz doble, etc.

Sea ahora $P(x)$ un polinomio no nulo con raíces diferentes x_1, x_2,..., x_k y sea λ_i la multiplicidad de x_i, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces se puede escribir

$$P(x) = (x - x_1)^{\lambda_1}(x - x_2)^{\lambda_2} \cdots (x - x_k)^{\lambda_k} Q(x),$$

para cierto polinomio Q. Observemos que $\mathrm{gr}(P) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_k + \mathrm{gr}(Q)$, por lo tanto $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_k \leq \mathrm{gr}(P)$. En otras palabras: el número de raíces de un polinomio no nulo, contadas con su multiplicidad, no puede superar al grado del polinomio. En caso de que lo iguale, el grado de Q debe ser 0 y por lo tanto Q es una constante.

De la observación anterior se deduce el siguiente teorema.

Teorema 2.1 (Teorema de identidad de polinomios). *Si dos polinomios toman valores iguales para un número de valores de la variable superior al grado de ambos, entonces son idénticos.*

En otras palabras, si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, n un entero tal que $n > \mathrm{gr}(P)$ y $n > \mathrm{gr}(Q)$, y x_1, x_2,...,x_n son n números diferentes tales que $P(x_i) = Q(x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces P es idéntico a Q. En efecto, el polinomio $P - Q$ tiene grado menor que n pero se anula en los n números x_1,...,x_n, por lo tanto $P - Q$ es nulo y P y Q son idénticos.

Teorema 2.2 (Teorema fundamental del álgebra). *Todo polinomio no constante con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz en el campo complejo.*

La demostración de este teorema requiere conocimientos de análisis matemático. La idea de la demostración puede verse en [2].

Usando este teorema es fácil probar inductivamente que cualquier polinomio P de grado $n \geq 1$ se puede factorizar en el campo de los números complejos en la forma

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

donde a es una constante (que debe ser igual al coeficiente de x^n en $P(x)$) y x_1, x_2,...,x_n son las raíces de P (cada raíz aparece tantas veces como indique su multiplicidad). En efecto, si $n = 1$ esto es cierto pues $p(x) = ax + b = a(x + b/a)$. Si el resultado es cierto para n y P es un polinomio de grado $n + 1$, entonces por el teorema fundamental existe $x_1 \in \mathbb{C}$ tal que $P(x_1) = 0$. Por lo tanto $P(x) = (x - x_1)Q(x) = 0$, donde Q es un polinomio de grado n. Ahora aplicamos la hipótesis inductiva y listo.

2.1.3. Fórmulas de Vieta

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ entonces se tiene que

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Si se desarrolla el miembro derecho se observa que el coeficiente de x^{n-1} es $a_n(-x_1 - x_2 - \cdots - x_n)$. Como esto debe ser igual a a_{n-1} resulta que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Del mismo modo, igualando los coeficientes de x^{n-2}, x^{n-3},..., x y el término constante en ambos miembros de la igualdad resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\
\sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k &= -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots\cdots\cdots \\
x_1 x_2 \ldots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}
\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores se conocen como *relaciones entre coeficientes y raíces* o *fórmulas de Vieta*. Para $n = 2$ estas fórmulas nos dicen que si x_1 y x_2 son las raíces del trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$, entonces

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}, \\
x_1 x_2 &= \frac{c}{a}.
\end{aligned}$$

Para $n = 3$ nos dicen que si x_1, x_2 y x_3 son las raíces de $ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a}, \\
x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 &= \frac{c}{a}, \\
x_1 x_2 x_3 &= -\frac{d}{a}.
\end{aligned}$$

La noción de polinomio puede extenderse fácilmente al caso de varias variables x_1, x_2,..., x_n. Un monomio es en este caso una expresión de la forma $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}$, donde los exponentes r_i son enteros no negativos y el coeficiente a es un número. Un polinomio es una suma de monomios. La suma y el producto se definen de la manera natural, de modo que se cumplan las leyes asociativa y distributiva.

Un polinomio en varias variables se dice que es *simétrico* si es invariante bajo cualquier permutación de sus variables. Los polinomios que aparecen como miembros izquierdos en las fórmulas de Vieta se llaman *polinomios simétricos elementales* en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se puede probar que cualquier polinomio simétrico en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se puede expresar como un polinomio en los polinomios simétricos elementales. Esto tiene como consecuencia que cualquier polinomio simétrico en las raíces de un polinomio P se puede expresar en función de los coeficientes de P, sin necesidad de calcular las raíces.

Supongamos por ejemplo que se desee calcular la suma de los cuadrados de las raíces del polinomio x^3+2x^2-3x+5. Una forma de hacerlo sería hallar primero las raíces x_1, x_2 y x_3 y luego calcular $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Pero aunque hay una fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado, su uso es muy engorroso y poco práctico. Por suerte hay una solución mucho más sencilla:

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3.$$

Y como por las fórmulas de Vieta se tiene que $x_1+x_2+x_3=-2$ y $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-3$, resulta

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) = (-2)^2-2(-3) = 10.$$

2.1.4. Raíces racionales

Sea $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ un polinomio con coeficientes enteros y supongamos que tiene una raíz racional p/q. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que p y q son coprimos (es decir, que la fracción p/q es irreducible). Entonces

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0,$$

y multiplicando por q^n resulta

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0.$$

Escribiendo esta igualdad como $a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}=-a_0q^n$ vemos que p divide al miembro izquierdo, por lo tanto debe dividir al miembro derecho. Pero como p es coprimo con q (y por consiguiente con q^n) debe dividir a a_0. Análogamente se prueba que $q|a_n$. La utilidad de lo anterior es que reduce el problema de hallar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros al examen de un número finito de casos (ya que a_n y a_0 sólo tienen un número finito de divisores). Por ejemplo si $P(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 4$ tiene alguna raíz racional p/q entonces debe cumplirse que $p|4$ y $q|1$. Los valores posibles de p son entonces los divisores enteros de 4, a saber 1, 2, 4, -1, -2 y -4. mientras que los de q son 1 y -1. Por lo tanto los valores posibles de p/q son 1, 2, 4, -1, -2 y -4. Verificando cada uno de estos valores se ve de inmediato que 1, 2 y 4 no son raíces, $P(-1) = -1 + 6 - 10 + 4 = -1$, $P(-2) = -8 + 24 - 20 + 4 = 0$ y $P(-4) = -64 + 96 - 40 + 4 = -4$. Por lo tanto la única raíz racional de P es -2. Las otras raíces pueden hallarse dividiendo P entre $x + 2$:

	1	6	10	4
-2		-2	-8	-4
	1	4	2	0

Por lo tanto $P(x) = (x + 2)(x^2 + 4x + 2)$. Hallando las raíces de $x^2 + 4x + 2$ encontramos que son $2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$, por lo tanto $P(x) = (x+2)(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$.

2.2. Problemas

Problema 2.1. Factorice los siguientes polinomios:
(a) $x^2 + x - 6$, (b) $x^2 + 7x + 10$, (c) $x^2 + 4x + 4$,
(d) $x^2 - 16$, (e) $4x^2 - 25$, (f) $2x^2 - 12x + 18$,
(g) $x^3 - 27$, (h) $x^3 + 8$, (i) $x^3 + x^2 - 6x$,
(j) $x^4 - 81$, (k) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, (l) $x^5 + x + 1$.

Problema 2.2. (Canguro 2003, 5º año) Sea f un polinomio tal que $f(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Determine $f(x^2 - 1)$.

Problema 2.3. Si el término principal de $P(x)$ es ax^n ¿cuál es el término principal de $(P(x))^k$?

Problema 2.4. Si el término principal de $P(x)$ es ax^n y el de $Q(x)$ es bx^k, ¿cuál es el término principal de $P(Q(x))$?

Problema 2.5. Pongamos $P^1(x) = P(x)$ y $P^{n+1}(x) = P(P^n(x))$ para $n > 0$ (es decir $P^2(x) = P(P(x))$, $P^3(x) = P(P(P(x)))$, etc.) Si $P(x) = 2x + 1$ calcule $P^n(x)$.

Problema 2.6. Halle (si existe) un polinomio P tal que $P(P(x)) = 8x^4 + 8x^2 + 3$.

Problema 2.7. ¿Existe algún polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros tal que $P(7) = 11$ y $P(11) = 13$?

Problema 2.8. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $x-2$ y $x+3$ se obtienen los restos 7 y 17, respectivamente. ¿Qué resto deja $P(x)$ si se divide entre $(x-2)(x+3)$?

Problema 2.9. Sea $P(x)$ un polinomio cúbico (es decir, de grado 3) tal que $P(1)=1$, $P(2)=2$, $P(3)=3$ y $P(4)=5$. ¿Cuánto vale $P(5)$?

Problema 2.10. (a) Caracterice los polinomios $P(x)$ tales que $P(x)=P(-x)$ para todo valor real de x.
(b) Caracterice los polinomios $P(x)$ tales que $P(x)=-P(-x)$ para todo valor real de x.

Problema 2.11. Pruebe las siguientes identidades:
(a) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.
(b) $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)+6xyz$.

Problema 2.12. Asumiendo que $x+y+z=0$, pruebe que (a) $x^2+y^2+z^2 = -2(xy+xz+yz)$.
(b) $x^3+y^3+z^3=3xyz$. (c) $x^5+y^5+z^5=-5xyz(xy+xz+yz)$.

Problema 2.13. Si las raíces de x^2+bx+c son $3+\sqrt{2}$ y $3-\sqrt{2}$, ¿qué valores tienen b y c?

Problema 2.14. Se sabe que el polinomio x^3-3x^2-2x+d tiene tres raíces en progresión aritmética. ¿Cuál es el valor de d? ¿Cuáles son las raíces?

Problema 2.15. Sea $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ con $a_0\neq 0$. Si x_1, x_2,..., x_n son las raíces de P muestre que

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=-\frac{a_1}{a_0}.$$

Problema 2.16. Halle una raíz racional de $x^4+2x^3-5x^2+3x-1$.

Problema 2.17. Halle todas las raíces de $2x^3+x^2-2x-1$, buscando primero una raíz racional.

Problema 2.18. Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(0)=2011$. ¿Cuál es el mayor número de raíces enteras que puede tener la ecuación $P(x)=x$?

Problema 2.19. Sea $P(x)=x^5+x^2+1$ y sean x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 sus raíces. Sea $Q(x)=x^2-2$. Calcular el producto $Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5)$.

Problema 2.20. Ana y Bruno juegan de la siguiente manera: Ana dice un número a, luego Bruno dice un número b, luego Ana dice un número c y finalmente Bruno dice un número d. Entonces forman el polinomio $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Si $P(3)=0$ y $P(2)\neq 0$ gana Ana, si $P(3)\neq 0$ y $P(2)=0$ gana Bruno, y en cualquier otro caso es empate. ¿Tiene alguno de los dos una estrategia ganadora?

Problema 2.21. (Cuba, 2011) Sea $P(x) = x^3 + (t-1)x^2 - (t+3)x + 1$. ¿Para qué valores de $t \in \mathbb{R}$ la suma de los cuadrados y de los recíprocos de las raíces de $P(x)$ es mínima?

Problema 2.22. (OMCC 2008) Halle un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales tal que

$$(x+10)P(2x) = (8x-32)P(x+6)$$

para todo x real y $P(1) = 210$. Verifique que el polinomio encontrado cumple las condiciones.

Problema 2.23. (OMCC 2007) Sea S un conjunto finito de números enteros. Suponga que para cualquier par de elementos p, q de S, con $p \neq q$, hay elementos a, b, c de S, no necesariamente diferentes entre sí, con $a \neq 0$, de manera que el polinomio $F(x) = ax^2 + bx + c$ cumple que $F(p) = F(q) = 0$. Determine el máximo número de elementos que puede tener el conjunto S.

Problema 2.24. (Concurso Matemático Nórdico 1992) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros diferentes ($n > 0$). Pruebe que el polinomio $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 1$ no es divisible por ningún polinomio mónico con coeficientes enteros de grado positivo menor que n.

Problema 2.25. (Olimpiada Sueca 1986) P es un polinomio de grado mayor que 2 con coeficientes enteros y tal que $P(2) = 13$ y $P(10) = 5$. Se sabe que P tiene una raíz entera. Hállela.

Problema 2.26. (OMCC 2001) Sean a, b y c números reales tales que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas p_1, p_2 y la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$ tiene dos soluciones reales distintas q_1, q_2. Se sabe que los números p_1, q_1, p_2, q_2, en ese orden, forman una progresión aritmética. Demostrar que $a + c = 0$.

Problema 2.27. (OME 2001) Sean a, b y c números reales. Pruebe que si $x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene tres raíces reales, entonces $a^2 \geq 3b$.

Problema 2.28. El polinomio $P(x)$ tiene coeficientes enteros. Si $P(x)$ tiene al menos seis raíces enteras diferentes, pruebe que $Q(x) = P(x) - 30$ no tiene ninguna raíz entera.

Problema 2.29. (OME 2000) Sean $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$, $Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$. Halle condiciones sobre a, b y c (suponiendo $a \neq c$) para que $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes, y hállelas.

Problema 2.30. Se sabe que todas las raíces del polinomio $x^{2011} - 2011x^{2010} + \cdots - 1$ son reales y positivas, pero se desconocen los coeficientes de x^{2009}, $x^{2008}, \ldots$, x^2 y x. ¿Cuál es el coeficiente de x^2?

Problema 2.31. (I OIM 1985) Halle las raíces r_1, r_2, r_3 y r_4 del polinomio $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5$ sabiendo que son reales positivas y que

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

Problema 2.32. (IMO 2004) Encontrar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que satisfacen la igualdad

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

para todos los números reales a, b, c tales que $ab + bc + ca = 0$.

Capítulo 3

Ecuaciones y Sistemas

UNA *ecuación* es una igualdad en la cual aparecen una o más cantidades desconocidas, llamadas *incógnitas*. *Resolver* la ecuación significa hallar los valores de las incógnitas para los cuales la igualdad es verdadera. Estos valores se llaman *soluciones* o *raíces* de la ecuación.

3.1. Ejemplos

Por ejemplo $2x - 6 = 0$ es una ecuación con incógnita x. En este caso hay un único valor de x para el cual $2x - 6$ es igual a 0, a saber el 3. En efecto $2x - 6 = 0$ si y sólo si $2x = 6$, y esto ocurre si y sólo si $x = 3$. Como segundo ejemplo tomemos la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$. En vez de aplicar la conocida fórmula que da las soluciones, factoricemos el miembro izquierdo para obtener $(x - 2)(x - 3) = 0$. Para que un producto sea nulo, debe serlo alguno de los factores. Por lo tanto $(x - 2)(x - 3) = 0$ se satisface sólo si $x - 2 = 0$ o $x - 3 = 0$. Esto nos da dos soluciones para la ecuación propuesta, a saber $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$. Para cerciorarnos de que no hemos cometido errores podemos verificar las soluciones, sustituyendo en la ecuación original. Así tenemos $x_1^2 - 5x_1 + 6 = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ y $x_2^2 - 5x_2 + 6 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$.

En general la *ecuación de primer grado* $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, tiene una única solución $x_1 = -b/a$.

Para hallar las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, dividamos primero entre a para obtener la ecuación equivalente

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Ahora comparemos el miembro izquierdo de esta ecuación con el miembro derecho de la siguiente:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{(2a)^2}.$$

Como se ve, los dos primeros términos $(x^2 + \frac{b}{a}x)$ son iguales en ambas expresiones. Entonces, como sumar y restar una misma cantidad no altera el resultado, se tiene

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{(2a)^2} - \frac{b^2}{(2a)^2} + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto resolver $ax^2 + bx + c = 0$ equivale a resolver

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

para lo cual basta extraer la raíz cuadrada:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

de donde

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

o bien

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

fórmulas que dan las dos raíces de la ecuación de segundo grado.

La cantidad $\Delta = b^2 - 4ac$ se se conoce como *discriminante* de la ecuación. Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales distintas $\frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{\Delta})$. Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene una raíz real doble, a saber $-b/(2a)$. Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene dos raíces complejas $\frac{1}{2a}(-b \pm i\sqrt{-\Delta})$.

La técnica utilizada para resolver la ecuación de segundo grado se conoce como *completar cuadrados* y tiene muchas aplicaciones.

Ejemplo 3.1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a > 0$. ¿Cuál es el mínimo valor que toma la función $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Solución: Apliquemos la técnica de completar cuadrados:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Como $a(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0$ con igualdad si y sólo si $x = -\frac{b}{2a}$, resulta que el mínimo valor que toma f es $c - \frac{b^2}{4a}$ (y lo toma para $x = -\frac{b}{2a}$).

Observe que si $a < 0$ entonces $c - \frac{b^2}{4a}$ es el *máximo* de f.

Hay muchas ecuaciones que, aunque no parezcan de primero o segundo grado, se pueden reducir a ellas mediante transformaciones algebraicas. Algunas transformaciones válidas son:

- Sumar o restar una misma expresión a ambos miembros de la ecuación.
- Multiplicar ambos miembros por una cantidad diferente de cero.

Ejemplo 3.2. Resolver la ecuación

$$\frac{2}{3} = \frac{2x+5}{x^2+1}.$$

Solución: Luego de multiplicar ambos miembros por $3(x^2+1)$ se convierte en $2(x^2+1) = 3(2x+5)$, o sea $2x^2+2 = 6x+15$. Finalmente restando $6x+15$ a ambos miembros resulta la ecuación de segundo grado $2x^2-6x-13 = 0$.

Ejemplo 3.3. Resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Solución: Si hacemos el *cambio de variable* $u = x^2$ (es decir, si usamos la letra u para referirnos a x^2) la ecuación nos queda $u^2 - 13u + 36 = 0$, que es de segundo grado y tiene raíces $u_1 = 4$ y $u_2 = 9$

Ejemplo 3.4. Resolver la ecuación $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$.

Solución: Con el cambio de variable $u = 3^x$ la ecuación se convierte en $3u^2 - 28u + 9 = 0$, que es de segundo grado. Resolviéndola se obtienen los valores $u_1 = 9$ y $u_2 = 1/3$. Resolviendo ahora $3^x = 9$ resulta $x_1 = 2$, y de $3^x = 1/3$ resulta $x_2 = -1$.

Hay transformaciones que deben ser tratadas con más cuidado, porque no son invertibles. Por ejemplo si se elevan al cuadrado ambos miembros de una ecuación, todas las soluciones de la ecuación original lo serán de la nueva, pero esta última puede tener más soluciones que la ecuación original. En efecto, si $A = B$ entonces $A^2 = B^2$, pero partiendo de $A^2 = B^2$ no se puede afirmar que $A = B$, ya que hay otra posibilidad: $A = -B$.Esto no quiere decir que no se pueda elevar al cuadrado, pero si lo hacemos habrá que verificar si las soluciones de la ecuación resultante son o no soluciones de la ecuación original.

Resolvamos por ejemplo la ecuación $\sqrt{x} = x - 6$. Elevando al cuadrado ambos miembros resulta $x = (x-6)^2$, que se reduce a $x^2 - 13x + 35 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $x_1 = 4$ y $x_2 = 9$. Pero sustituyendo en la ecuación original se ve que únicamente $x_2 = 9$ es solución.

Las ecuaciones de tercer y cuarto grado, como mostraron los algebristas italianos del siglo XVI, pueden ser resueltas por medio de radicales. Sin embargo las fórmulas son complicadas y tienen poca utilidad práctica. Las ecuaciones de grado 5 y superior, como demostraron Abel y Galois en la primera mitad del siglo XIX, no se pueden resolver en general mediante radicales. Sin embargo algunas ecuaciones de tipos especiales sí se pueden resolver.

3.2. Sistemas de ecuaciones

Un *sistema* de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones en las cuales, por lo general, aparecen varias incógnitas. Una solución del sistema es un conjunto de valores numéricos, uno para cada incógnita, que sustituidos en las ecuaciones hacen que todas sean verdaderas simultáneamente. Un sistema puede no tener solución (en ese caso se dice que es incompatible), tener una solución única, tener varias o incluso tener infinitas soluciones.

En general, si en una de las ecuaciones de un sistema se puede despejar una de las incógnitas en función de las demás, al sustituir en las ecuaciones restantes queda un sistema con una ecuación y una incógnita menos que el original. De esta manera se pueden resolver los sistemas de ecuaciones lineales, es decir aquellos donde cada ecuación es de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$.

Los sistemas no lineales pueden ser muy complicados. Sin embargo, si las ecuaciones son simétricas, usando las fórmulas de Vieta a veces se puede reducir el problema a la solución de una única ecuación algebraica.

Ejemplo 3.5. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{3}{10} \\ xy &= -10, \end{aligned}$$

Solución: Multiplicando miembro a miembro la primera ecuación por la segunda se obtiene $x + y = -3$, por lo tanto x e y son las raíces de la ecuación de segundo grado en t

$$t^2 + 3t - 10 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son 2 y -5, por lo tanto el sistema tiene dos soluciones (x, y), a saber $(2, -5)$ y $(-5, 2)$.

3.3. Problemas

Problema 3.1. Hallar las raíces de la ecuación $x^2 + 4x - 21 = 0$,

(a) por factorización,

(b) completando cuadrados,

(c) usando la fórmula.

Problema 3.2. ¿Para qué valores de x el polinomio $x^2 + 4x - 21$ toma valores positivos? ¿Y negativos?

Problema 3.3. ¿Cuál es el mínimo valor que puede tomar el polinomio $x^2+6x+10$, y para qué valor de x lo toma? (sugerencia: completar cuadrados).

Problema 3.4. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar el polinomio $-x^2+4x+9$, y para qué valor de x lo toma?

Problema 3.5. Resuelva las ecuaciones siguientes: (a) $3x - 1 = 2x + 4$, (b) $\frac{6}{x} - 2 = 0$
(c) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{3}$, (d) $x^2 - x - 1 = 0$, (e) $x + \frac{1}{x} = 3$, (f) $6x^{-2} - 5x^{-1} + 1 = 0$,

Problema 3.6. Resuelva la ecuación $2^{2x+2} - 17 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Problema 3.7. Resuelva la ecuación $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$ (sugerencia: haga el cambio $u = x^2$).

Problema 3.8. Resuelva la ecuación $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$ (sugerencia: haga el cambio $u = x + \frac{1}{x}$).

Problema 3.9. Resuelva la ecuación $x^5+x^4-15x^3+15x^2-x-1 = 0$ (sugerencia: una ráiz es obvia).

Problema 3.10. Resuelva la ecuación $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1$.

Problema 3.11. Un hombre le dijo a otro: "Cuando yo tenía la edad que tú tienes hoy, nuestras edades sumaban 50 años". A lo que el otro respondió: "Y cuando yo tenga la edad que tú tienes hoy, nuestras edades sumarán 66 años". ¿Qué edad tenía cada uno de ellos en el momento de este diálogo?

Problema 3.12. Halle un polinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $P(-1) = 10$, $P(1) = 6$ y $P(2) = 13$.

Problema 3.13. Halle todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 2, \\ xyz &= 4. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Sucesiones

UNA *sucesión* es una función cuyo dominio son los números naturales, con o sin el cero. Si a es una sucesión, el valor que toma en n se denota $a(n)$ o a_n. En muchos problemas se caracteriza una sucesión mediante algunas propiedades y se pide calcular un término particular, o bien hallar una expresión para el término general.

El término *progresión* se suele usar para referirse a una secuencia finita de términos, a_1, a_2,..., a_n.

Ejemplo 4.1 (OIM 1985)**.**
A cada entero positivo n se le asigna un entero no negativo $f(n)$ de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

(1) $f(rs) = f(r) + f(s)$.

(2) $f(n) = 0$ siempre que la cifra de las unidades de n sea 3.

(3) $f(10) = 0$.

Hallar $f(1985)$.

Solución: Si $f(mn) = 0$ entonces $f(m) + f(n) = 0$ (por (1)), de donde $f(m) = f(n) = 0$ (ya que $f(m)$ y $f(n)$ son no negativos). Entonces de $f(10) = 0$ se sigue que $f(5) = f(2) = 0$, y $f(1985) = f(5 \cdot 397) = f(5) + f(397) = f(397)$. Pero $397 \cdot 9 = 3573$, y $f(3573) = 0$ por (2). Por consiguiente $f(397) = 0$ y $f(1985) = f(397) = 0$. Más en general se puede probar que $f(n) = 0$ para todo entero positivo n.

4.1. Progresiones aritméticas y geométricas

Una secueencia de números se dice que está en *progresión aritmética* si la diferencia entre dos términos sucesivos cualesquiera es una constante, llamada *diferencia común* de la progresión. Por ejemplo 3, 7, 11, 15, 19 es una progresión aritmética con diferencia común 4, ya que $7-3 = 11-7 = 15-11 = 19-15 = 4$. La secuencia 3, 1, -1, -3 es una progresión aritmética con diferencia común -2, ya que $1-3 = -1-1 = -3-(-1) = -2$.

Si a_1, a_2,..., a_n es una progresión aritmética con diferencia común d, entonces $a_2 - a_1 = d$, $a_3 - a_2 = d$,..., $a_n - a_{n-1} = d$, y sumando estas $n-1$ igualdades resulta $a_n - a_1 = (n-1)d$, o sea

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Ejemplo 4.2. Una progresión aritmética comienza en 3, finaliza en 54 y tiene diferencia común 3/4. ¿Cuál es el número de términos?

Solución: Los datos son $a_1 = 3$, $a_n = 54$ y $d = 3/4$. Como $a_n = a_1 + (n-1)d$, resulta $54 = 3 + (n-1)(3/4)$, de donde $n - 1 = 51(4/3) = 68$ y $n = 69$.

Los documentos matemáticos más antiguos que se conservan son dos rollos de papiro egipcios que datan aproximadamente de la XII dinastía (2078 a 1788 a.C.). Uno de ellos, escrito en hierático por Ahmes y conocido como el *papiro Rhind*, consta de unos 85 problemas y ejemplos prácticos. El siguiente es uno de ellos:

Ejemplo 4.3. Dividir cien panes entre cinco hombres, de modo que las porciones que reciban estén en progresión aritmética y que la séptima parte de la suma de las tres mayores sea igual a la suma de las dos porciones menores.

Solución: En algunas ocasiones resulta conveniente representar las progresiones aritméticas de manera simétrica. Si llamamos z al término central y d a la diferencia común, los cinco términos serán $z-2d$, $z-d$, z, $z+d$ y $z+2d$. Ahora la condición de que las partes suman cien se escribe así:

$$(z-2r) + (z-r) + z + (z+r) + (z+2r) = 100,$$

que se reduce a $5z = 100$ y por tanto $z = 20$. Si ahora llamamos S a la suma de los dos términos menores, la otra condición del problema nos dice que $S = (100-S)/7$, de donde $S = 25/2$. Como $S = (20-2d) + (20-d) = 40-3d$, se sigue que $d = (40-S)/3 = 55/6$. Las cinco porciones serán entonces: $20 - 55/3 = 5/3 = 1\frac{2}{3}$, $20 - 55/6 = 65/6 = 10\frac{5}{6}$, 20, $20 + 55/6 = 175/6 = 29\frac{1}{6}$ y $175/6 + 55/6 = 115/3 = 38\frac{1}{3}$.

La suma de n términos de una progresión aritmética, $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, se puede calcular fácilmente observando que

$$a_i + a_{n+1-i} = a_1 + (i-1)d + a_1 + (n-i)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n,$$

Luego

$$2S = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n)n,$$

de donde

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

En particular se tiene

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Una secuencia de números se dice que está en *progresión geométrica* si la razón entre dos términos sucesivos cualesquiera es una constante, llamada *razón* de la progresión. Por ejemplo 3, 6, 12, 24 es una progresión geométrica con razón 2, ya que $6/3 = 12/6 = 24/12 = 2$. La secuencia 81, -27, 9, -3 es una progresión geométrica con razón $-1/3$, ya que $-27/81 = 9/(-27) = -3/9 = -1/3$.

Si a_1, a_2,…, a_n es una progresión geométrica con razón r, entonces $a_2/a_1 = r$, $a_3/a_2 = r$,…, $a_n/a_{n-1} = r$, y multiplicando estas $n-1$ igualdades resulta $a_n/a_1 = r^{n-1}$, o sea

$$a_n = a_1 r^{n-1}.$$

La suma de n términos de una progresión geométrica,

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1},$$

se puede calcular observando que

$$rS = a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n - a_1 = S + a_1(r^n - 1),$$

de donde

$$(r-1)S = a_1(r^n - 1).$$

Ahora, si $r \neq 1$, se tiene

$$S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}.$$

Si $r = 1$ no se puede dividir entre $r-1$, pero en ese caso la progresión es constante y su suma es $a_1 + a_1 + \cdots + a_1 = na_1$.

4.2. Recurrencias

A veces se caracteriza una sucesión mediante una ecuación que relaciona el término general x_n con los anteriores x_0, x_1,…, x_{n-1}. Este tipo de ecuación se denomina *relación de recurrencia* o simplemente *recurrencia*.

Ejemplo 4.4. Hallar la solución general de la recurrencia $x_n = 2x_{n-1}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Solución: Si $x_0 = a$ entonces $x_1 = 2a$, $x_2 = 4a$, $x_3 = 8a$ y por inducción se prueba fácilmente que $x_n = a2^n$. Recíprocamente la sucesión $x_n = a2^n$, para cualquier constante a, satisface la recurrencia $x_n = 2x_{n-1}$. Por lo tanto la solución general es $x_n = a2^n$.

A veces se pide hallar una solución particular de una recurrencia que satisfaga ciertas *condiciones iniciales*. En el ejemplo anterior, si se pide la solución particular tal que $x_0 = 5$, la respuesta sería $x_n = 5 \cdot 2^n$.

Veamos ahora una recurrencia que aparece en una variante del llamado *problema de Josefo*.

Ejemplo 4.5. Los números de 1 a n se escriben en forma consecutiva alrededor de un círculo, en sentido horario. Comenzando por el 1, se recorre el círculo en sentido horario y se va eliminando cada segundo número hasta que quede uno solo. Por ejemplo, para $n = 9$ los números se van eliminando en el orden 2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7 y queda el 3. ¿Cuál es el número que queda, en función de n?

Solución: Llamemos $J(n)$ al número que queda. Si $n = 2k$ es par entonces en la primera vuelta se eliminan todos los pares y quedan los k primeros impares desde 1 hasta $2k - 1$. Entonces el problema se reduce al de comenzar con k números, sólo que en la posición j no está j sino $2j - 1$. Por lo tanto, $J(2k) = 2J(k) - 1$. Si $n = 2k+1$ es impar entonces en la primera vuelta se eliminan todos los pares y luego se elimina el 1, quedando los k números $3, 5, 7, \dots, 2k+1$. Nuevamente el problema se reduce al de tener inicialmente k números, pero con $2j + 1$ en la posición j. Las dos relaciones $J(2k) = 2J(k) - 1$ y $J(2k + 1) = 2J(k) + 1$, junto con la condición inicial $J(1) = 1$, permiten calcular cualquier $J(n)$. Por ejemplo, para $n = 41$ se tiene $J(41) = 2J(20) + 1 = 2(2J(10) - 1) + 1 = 4J(10) - 1 = 4(2J(5) - 1) - 1 = 8J(5) - 5 = 8(2J(2) + 1) - 5 = 16J(2) + 3 = 16(2J(1) - 1) + 3 = 16 + 3 = 19$.

4.2.1. Números de Fibonacci

La siguiente recurrencia es muy famosa:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}. \tag{4.1}$$

Esta recurrencia fue considerada por Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci, en su obra *Liber Abaci* escrita a comienzos del siglo XIII. Fibonacci llega a esa relación estudiando un problema de reproducción de conejos, que se describe en [8]. Pero hay numerosos problemas que conducen a la misma recurrencia. Veamos uno de ellos.

Ejemplo 4.6. Consideremos una escalera de n escalones y supongamos que en un paso podemos subir uno o dos escalones. ¿Cuántas maneras diferentes hay de subir la escalera?

Solución: Sea x_n el número buscado. Si $n = 1$ obviamente hay una sola manera de subir la escalera, a saber en un paso sencillo, es decir que $x_1 = 1$. Si $n = 2$ podemos subirla con dos pasos sencillos o con uno doble, es decir que $x_2 = 2$. Si $n = 3$ se puede subir con 3 pasos sencillos, con uno sencillo seguido de uno doble o con uno doble seguido de uno sencillo, es decir que $x_3 = 3$. Hasta aquí parece haber un patrón sencillo (1, 2, 3,...) pero las cosas se complican pues $x_4 = 5$ y $x_5 = 8$. Sin embargo, al subir la escalera de n escalones o bien pisamos el escalón $n-1$ o no lo pisamos. Hay x_{n-1} maneras de subir hasta el escalón $n-1$, a partir del cual debemos dar un paso sencillo para terminar de subir. Pero si no pisamos el $n-1$ entonces debemos llegar hasta el $n-2$ (lo que puede hacerse de x_{n-2} maneras) y finalizar con un paso doble. En conclusión $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, es decir que la sucesión x_n satisface (4.1).

Esta relación, a partir de las condiciones iniciales x_0 y x_1 permite calcular cualquier término de la sucesión. Como una escalera de 0 escalones sólo se puede subir de una manera, igual que una de un escalón, se tiene $x_0 = x_1 = 1$. A partir de allí se obtiene $x_2 = x_1 + x_0 = 2$, $x_3 = x_2 + x_1 = 3$, $x_4 = x_3 + x_2 = 5$, $x_5 = x_4 + x_3 = 8$, etc.

Ahora bien, sería interesante tener una fórmula explícita para el término general de una solución particular de (4.1), así como una expresión general que permita generar todas las soluciones particulares. Eso se puede conseguir buscando soluciones de la forma $x_n = r^n$. Sustituyendo resulta $r^n = r^{n-2} + r^{n-1}$, de donde $r^2 = 1 + r$. La solución de esta ecuación nos da $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$ o $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Por lo tanto r_1^n y r_2^n son soluciones particulares, y también lo es cualquier combinación lineal de ellas $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$. De hecho ésta es la solución general, ya que se pueden calcular A y B para que coincidan con el x_0 y el x_1 de cualquier solución particular.

En el caso de la solución particular E_n del ejemplo anterior se tiene $E_0 = E_1 = 1$, luego $A + B = 1$, $Ar_1 + Br_2 = 1$, de donde $A = r_1/\sqrt{5}$ y $B = -r_2/\sqrt{5}$, por lo tanto $E_n = (r_1^{n+1} - r_2^{n+1})/\sqrt{5}$.

Los famosos *números de Fibonacci* F_n se obtienen a partir de la misma relación de recurrencia (4.1) pero con condiciones iniciales $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Así resulta el sistema $A + B = 0$, $Ar_1 + Br_2 = 1$, de donde se obtiene $A = 1/\sqrt{5}$ y $B = -1/\sqrt{5}$. Por lo tanto

$$F_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Es claro que esta sucesión difiere de E_n en un paso, es decir que $E_n = F_{n+1}$.

4.2.2. Recurrencias lineales

En general, se llama relación de recurrencia lineal de orden n a cualquier recurrencia de la forma:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k} + f(n).$$

Si no aparece el término funcional $f(n)$, se dice que la recurrencia es *homogénea.*

Las recurrencias lineales homogéneas de segundo orden se pueden resolver con la misma técnica usada para $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Es decir, dada la recurrencia

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2},$$

primero se buscan soluciones de la forma r^n. Esto nos lleva a la ecuación $r^2 = ar+b$. Si esta ecuación tiene dos raíces diferentes r_1 y r_2, entonces r_1^n y r_2^n son soluciones particulares y $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$ es la solución general. Sin embargo si la ecuación $r^2 - ar - b = 0$ tiene una raíz doble r_1 (lo que ocurrirá si $\Delta = a^2 + 4b = 0$), entonces sólo tendremos una solución particular r_1^n. Sin embargo en este caso nr_1^n también es solución particular. En efecto, si $\Delta = a^2 + 4b = 0$ entonces $r_1 = a/2$, de donde $a = 2r_1$ y $b = -a^2/4 = r_1^2$. Luego

$$a(n-1)r_1^{n-1} + b(n-2)r_1^{n-2} = 2(n-1)r_1^n - (n-2)r_1^n = nr_1^n.$$

Las recurrencias lineales de segundo orden no homogéneas

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + f(n) \tag{1}$$

son más complicadas. Pero supongamos que se conoce una solución particular y_n, es decir que

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + f(n) \tag{2}$$

para todo n. Restando (2) de (1) resulta

$$x_n - y_n = a(x_{n-1} - y_{n-1}) + b(x_{n-2} - y_{n-2}),$$

o sea que $z_n = x_n - y_n$ es solución de la ecuación homogénea

$$z_n = az_{n-1} + bz_{n-2}. \tag{3}$$

Como ésta ya la sabemos resolver, resulta que las soluciones de (1) son de la forma $x_n = y_n + z_n$. La solución general de (1) es entonces la suma de una solución particular con la solución general de la recurrencia homogénea asociada (2).

Para hallar una solución particular no hay métodos infalibles, sin embargo suele dar resultado buscar soluciones de forma parecida a la de $f(n)$. Por ejemplo si $f(n)$ es un polinomio, busque soluciones particulares polinómicas.

Ejemplo 4.7. Halle la solución general de la recurrencia

$$x_n = 7x_{n-1} - 10x_{n-2} + 12n^2 - 70n + 53.$$

Solución: Busquemos en primer lugar una solución particular polinómica, digamos $y_n = an^2 + bn + c$. Debe cumplirse $y_n = 7y_{n-1} - 10y_{n-2} + 12n^2 - 70n + 53$, es decir

$$an^2+bn+c = 7(a(n-1)^2+b(n-1)+c)-10(a(n-2)^2+b(n-2)+c)+12n^2-70n+53.$$

Desarrollando y simplificando se llega a

$$(4a-12)n^2+(4b-26a-70)n+4c+33a-13b-53=0.$$

Como esto debe cumplirse para todo $n \geq 0$, por el teorema de identidad de polinomios resulta que

$$\begin{aligned} 4a-12&=0,\\ 4b-26a-70&=0,\\ 4c+33a-13b-53&=0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene $a=3$, $b=2$ y $c=5$. Es decir que $y_n=3n^2+2n+5$ es una solución particular. Para la homogénea $z_n=7z_{n-1}-10z_{n-2}$ resolvemos la ecuación $r^2-7r+10=0$, obteniendo $r_1=2$ y $r_2=5$. Por lo tanto la solución general de la homogénea es $z_n=A2^n+B5^n$ y la solución general de la recurrencia planteada es

$$x_n=y_n+z_n=3n^2+2n+5+A2^n+B5^n.$$

Para las recurrencias de orden superior al 2 valen los mismos principios: la solución general de

$$x_n=c_1x_{n-1}+\cdots+c_kx_{n-k}+f(n)$$

es la suma de una solución particular y_n con la solución general de la recurrencia homogénea asociada

$$z_n=c_1z_{n-1}+\cdots+c_kz_{n-k}. \tag{*}$$

Para resolver esta última es preciso resolver la ecuación característica

$$r^k=c_1r^{k-1}+c_2r^{k-2}+\cdots+c_{k-1}r+c_k.$$

Si esta ecuación tiene raíces distintas $r_1,\ldots,$ r_t con multiplicidades $m_1,\ldots,$ m_t respectivamente, entonces la solución general de (*) es

$$z_n=P_1(n)r_1^n+\cdots+P_t(n)r_t^n,$$

siendo $P_i(n)$ un polinomio en n de grado menor que m_i.

4.3. Problemas

Problema 4.1. Una progresión es aritmético-geométrica si sus términos son de la forma a, $(a+d)r$, $(a+2d)r^2,\ldots$ Calcule la suma de los primeros n términos.

Problema 4.2. (Canguro 2010, 3º) Los tres primeros términos de una sucesión son 1, 2 y 3. A partir del cuarto, cada término se calcula a partir de los tres precedentes, restando el tercero a la suma de los dos primeros: 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7,... ¿Qué número ocupa el lugar 2010 en esta sucesión?

Ⓐ -2006; Ⓑ 2008; Ⓒ -2002; Ⓓ -2004; Ⓔ Otra respuesta.

Problema 4.3. (Canguro 2010, 4º y 5º) Los tres números $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$ y $\sqrt[6]{7}$ son términos consecutivos de una progresión geométrica. El siguiente término de la progresión es:

Ⓐ 1; Ⓑ $\sqrt[12]{7}$; Ⓒ $\sqrt[10]{7}$; Ⓓ $\sqrt[9]{7}$; Ⓔ $\sqrt[5]{7}$.

Problema 4.4. (OJM Regional 2009, 1º y 2º) Simón escribe una lista de números. El primero es 25, y luego cada número es la suma de los cuadrados de los dígitos del anterior. Por ejemplo, el segundo en la lista es $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$, y el tercero es $2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$. ¿Qué número aparece en la posición 2009?

Problema 4.5. (OJM Regional 2010, 3º) En una pecera viven unos pequeños seres llamados *bupis*, y un pez que se alimenta de ellos, comiendo 30 bupis cada día. Al finalizar cada día, si hay menos de 100 bupis éstos se reproducen, engendrando cada uno de ellos otro idéntico, doblando así su número total. Si hay 100 o más bupis no hay reproducción, tal vez por falta de espacio. Suponga que inicialmente hay 97 bupis. Durante el primer día el pez se come 30, dejando 67, que se reproducen y llegan a 134. El segundo día el pez se come 30 y quedan 104 (no se reproducen pues $104 \geq 100$). El tercer día los 104 se reducen a 74, se reproducen y quedan 148. Continuando de esta manera, ¿cuántos bupìs habrá al finalizar el día número 1000?

Problema 4.6. (OJM Final 2009, 4º y 5º) Una sucesión de números reales a_1, a_2, a_3,... satisface la relación $(n+2)a_{n+1} = na_n$ para todo entero positivo n. Si $a_1 = 1005$, ¿cuál es el valor de a_{2009}?

Problema 4.7. (OIM 1989) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

a) $f(1) = 1$,

b) $f(2n+1) = f(2n) + 1$,

c) $f(2n) = 3f(n)$.

Determinar el conjunto de valores que toma f.

Problema 4.8. Considere el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple:

a) $f(f(n)) = n$, para todo n natural,

b) $f(f(n)+1) = \begin{cases} n-1, & \text{si } n \text{ es par} \\ n+3, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Determine el valor de $f(n)$ para cada n natural.

Problema 4.9. Hallar una expresión para el término general de la sucesión x_n tal que $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ y $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ para todo $n \geq 2$.

Problema 4.10. Pruebe que los números E_n del problema de las escaleras satisfacen la relación

$$E_{n+m} = E_n E_m + E_{n-1} E_{m-1}$$

y los números de Fibonacci la relación

$$F_{n+m} = F_{n+1} F_m + F_n F_{m-1},$$

para todos los enteros positivos n y m.

Problema 4.11. ¿De cuántas maneras se puede embaldosar un patio cuadrado de dimensiones $3 \times n$ con baldosas rectangulares de dimensiones 2×1.

Problema 4.12. Pruebe que en la variante del problema de Josefo analizada en el texto $J(n)$ puede calcularse así: si 2^k es la mayor potencia de 2 menor o igual que n, entonces $J(n) = 2(n - 2^k) + 1$.

Problema 4.13. Determinar si existen números enteros positivos a y b tales que todos los términos de la sucesión definida por $x_1 = 2010$, $x_2 = 2011$,

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}, \quad n \geq 1,$$

sean enteros.

Capítulo 5

Desigualdades

Las desigualdades|indexdesigualdad juegan un rol fundamental en matemática. Existen libros completos dedicados a su estudio (ver por ejemplo [3]) y en las competencias matemáticas internacionales aparecen con frecuencia. Todo solucionista experto debe estar familiarizado con varias de ellas y con las técnicas generales para su manejo.

La desigualdad fundamental satisfecha por cualquier número real, y de la cual en cierto sentido se derivan todas las demás, es sencillamente

$$x^2 \geq 0,$$

con igualdad si y sólo si $x = 0$. Más en general

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \geq 0,$$

con igualdad si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

5.1. Algunos ejemplos sencillos

Ejemplo 5.1. (Desigualdad AG) Si $x, y \geq 0$ entonces

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

con igualdad si y sólo si $x = y$.

Prueba: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, de donde $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$ y $(x+y)/2 \geq \sqrt{xy}$.

Esta desigualdad establece que la *media aritmética* $A = (x+y)/2$ de dos reales no negativos x, y es mayor o igual que su *media geométrica* $G = \sqrt{xy}$.

Ejemplo 5.2. Para x, y, z reales cualesquiera se cumple

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$$

con igualdad si y sólo si $x = y = z$.

Prueba: Consideremos la desigualdad

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0,$$

la cual se cumple para reales x, y, z cualesquiera, con igualdad si y sólo si $x = y = z$. Desarrollando se tiene $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$, de donde $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Ejemplo 5.3. Si $x, y, z \geq 0$ entonces

$$(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \leq xyz,$$

con igualdad si y sólo si $x = y = z$.

Prueba: Supongamos en primer lugar que $-x + y + z \geq 0$, $x - y + z \geq 0$, $x + y - z \geq 0$. Entonces por la desigualdad AG se tiene

$$(-x + y + z)(x - y + z) \leq \left(\frac{(-x + y + z) + (x - y + z)}{2}\right)^2 = z^2$$

y análogamente $(x - y + z)(x + y - z) \leq x^2$ y $(-x + y + z)(x + y - z) \leq y^2$. Multiplicando miembro a miembro estas tres desigualdades se tiene

$$(-x + y + z)^2(x - y + z)^2(x + y - z)^2 \leq x^2y^2z^2,$$

de donde se sigue

$$(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \leq xyz.$$

Observemos para finalizar que de las tres cantidades $-x+y+z$, $x-y+z$, $x+y-z$ no puede haber dos negativas. Por ejemplo si $-x + y + z < 0$, $x - y + z < 0$, sumando resultaría $2z < 0$, absurdo pues $x, y, z \geq 0$. Por lo tanto a lo sumo una de ellas puede ser negativa, pero en ese caso el producto de las tres es ≤ 0 y la desigualdad a probar se satisface automáticamente.

Ejemplo 5.4 (IMO 1964)**.**
Sean a, b y c los lados de un triángulo. Pruebe que

$$a^2(-a + b + c) + b^2(a - b + c) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Solución: Puesto que

$$\begin{aligned}
&(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = (-a + b + c)(a^2 - (b - c)^2)\\
&= a^2(-a + b + c) + a(b - c)^2 - (b^2 - c^2)(b - c))\\
&= a^2(-a + b + c) + b^2(a - b + c) + c^2(a + b - c) - 2abc
\end{aligned}$$

la desigualdad propuesta es equivalente a

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc,$$

que ya probamos.

5.2. Desigualdades básicas

5.2.1. Desigualdad triangular

Una desigualdad sencilla pero muy útil cuando se trabaja con números reales de diferentes signos:

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

La prueba es muy sencilla: como $-|x_i| \leq x_i \leq |x_i|$, sumando para $i=1,2,\ldots,n$ se obtiene $-\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$, de donde $|\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$. La igualdad se da si y sólo si todos los x_i no nulos son del mismo signo.

5.2.2. Desigualdad Aritmético-Geométrica (AG)

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, que ya probamos para 2 términos, se puede generalizar al caso de n términos. Es decir:

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales no negativos entonces

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

con igualdad si y solo si $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Prueba: Existen muchas demostraciones de esta importante desigualdad. Una de las más elegantes es la siguiente:

Sean A la media aritmética y G la media geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es claro que si $x_1=x_2=\cdots=x_n$ entonces $A=G$. De lo contrario deben existir x_i, x_j tales que $x_i<A<x_j$. Si sustituímos x_j por A y x_i por x_i+x_j-A es claro que la media aritmética no cambia. En cambio la media geométrica aumenta estrictamente ya que $A(x_i+x_j-A)-x_ix_j=(A-x_i)(x_j-A)>0$. Repitiendo este proceso suficientes veces llegaremos a un conjunto de n números iguales, cuya media aritmética A será igual a su media geométrica. y ésta estrictamente mayor que G.

Las siguientes desigualdades, en las cuales x_1, x_2,…,x_n son reales positivos, son equivalentes a AG:

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n &\geq nx_1x_2\cdots x_n, \\ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} &\geq 1, \\ \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} &\leq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}. \end{aligned}$$

5.2.3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz (CS)

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números reales cualesquiera entonces

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

y la igualdad se da si y sólo si los a_i y los b_i son proporcionales.

Prueba: Partamos de

$$(a_1 - tb_1)^2 + (a_2 - tb_2)^2 + \cdots + (a_n - tb_n)^2 \geq 0,$$

desigualdad válida para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + t^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq 2t(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$$

Si los b_i son todos nulos es claro que se cumple la igualdad. En caso contrario tomamos

$$t = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

y se llega fácilmente a la desigualdad deseada. Obviamente la igualdad se dará si y sólo si $a_i = tb_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

La *forma de Engel* de la desigualdad CS es la siguiente:

$$\frac{y_1^2}{x_1} + \frac{y_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{y_n^2}{x_n} \geq \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n},$$

donde los y_i son números reales cualesquiera y los x_i son reales positivos. La prueba es inmediata poniendo $a_i = y_i/\sqrt{x_i}$, $b_i = \sqrt{x_i}$ en CS. Esta forma de la desigualdad también es llamada *lema de Titu*.

Tomando $b_i = 1$ para $i = 1, \ldots, n$ en CS se tiene

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

Dividiendo entre n^2 y extrayendo la raíz cuadrada resulta

$$\frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

Esta desigualdad nos dice que la media aritmética es menor o igual que la media cuadrática. La igualdad se da si y sólo si los a_i son todos iguales y no negativos.

5.2.4. Desigualdad del reordenamiento

Dados $2n$ números reales positivos $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ y $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ sea σ una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \le a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \cdots + a_nb_{\sigma(n)} \le a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Esta desigualdad tiene una interpretación física: si se tiene una barra OP y se coloca un peso a_i a distancia $b_{\sigma(i)}$ del extremo O, entonces $a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \cdots + a_nb_{\sigma(n)}$ es el momento resultante respecto al punto O. La desigualdad dice que el momento es máximo cuando los pesos mayores se colocan más lejos y los menores más cerca de O, y es mínimo cuando se procede a la inversa.

Esta desigualdad es fácil de probar, para ello pongamos $c_k = b_{\sigma(k)}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, sea $i < j$ y consideremos las sumas

$$\begin{aligned} S &= a_1c_1 + \cdots + a_ic_i + \cdots + a_jc_j + \cdots + a_nc_n \\ S' &= a_1c_1 + \cdots + a_ic_j + \cdots + a_jc_i + \cdots + a_nc_n, \end{aligned}$$

que difieren solamente en que se han transpuesto c_i con c_j. Entonces

$$S' - S = a_ic_j + a_jc_i - a_ic_i - a_jc_j = (a_j - a_i)(c_i - c_j)$$

y se ve que si $c_i > c_j$ entonces $S' \ge S$, mientras que si $c_i < c_j$ entonces $S' \le S$. De aquí se sigue que el valor máximo de la suma se obtiene cuando $c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_n$ y el mínimo cuando $c_1 \ge c_2 \ge \cdots \ge c_n$.

De esta desigualdad se pueden deducir fácilmente muchas otras, en particular AG y CS. Veamos como ejemplo la siguiente:

5.2.5. Desigualdad de Chebyshev

Sean $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ y $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ dos sucesiones de números reales, entonces

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \, \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \le \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}.$$

Demostración. Por la desigualdad del reordenamiento se tiene

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 &\le a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 &\le a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\ \cdots \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1} &\le a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \end{aligned}$$

y sumando resulta

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \le n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n),$$

de donde dividiendo entre n^2 resulta la desigualdad de Chebyshev. $\square$

El mismo argumento sirve para probar la siguiente variante de la desigualdad de Chebyshev:

Si $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ y $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$ son dos sucesiones de números reales, entonces

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \ge \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}.$$

Ejemplo 5.5. (IMO 1995) Sean a, b, c reales positivos con $abc = 1$. Pruebe que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$$

Solución: No se desanime si sus primeros intentos resultan infructuosos, ya que este problema se le puede resistir hasta a un matemático experimentado. Probablemente se le ocurra aplicar la desigualdad AG, por ejemplo

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \ge \frac{9}{2(a+b+c)}$$

y ahora parece que estamos cerca, ya que $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} = 3$. Pero no, de esto solamente se sigue que

$$\frac{9}{2(a+b+c)} \le \frac{3}{2}$$

y no podemos continuar la cadena de desigualdades que habíamos iniciado. Luego de varios intentos fallidos similares nos convencemos de que AG por sí sola no nos conducirá a la solución. Por otra parte la segunda desigualdad importante que hemos visto, CS, no parece que se pueda aplicar en este problema. Si interpretamos el miembro izquierdo como una suma de productos obtendríamos uns desigualdad de tipo contrario al deseado (además de unas indeseables raíces cuadradas). Interpretarlo como una suma de cuadrados tampoco parece factible, en particular por los molestos cubos. Sin embargo hay una condición que no hemos utilizado, a saber que $abc = 1$. Por ejemplo podemos escribir

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{1}{a^2(ab+ac)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Esto nos da la idea de transformar la desigualdad original mediante el cambio de variables $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$, para obtener

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}.$$

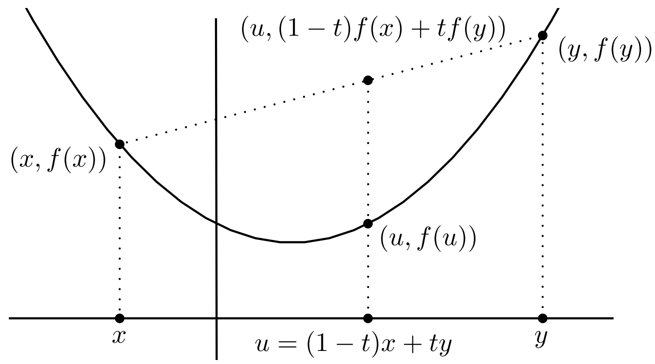


Figura 5.1: Función convexa

Ahora por CS en la forma de Engel

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{1}{2}(x+y+z),$$

y como por AG $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$ terminamos.

5.3. Funciones convexas

Una función $f:D\to\mathbb{R}$ (donde D es $\mathbb{R}$ o un intervalo de números reales) se dice que es *convexa* si para cualquier par de puntos $x,y\in D$ y cualquier real t tal que $0<t<1$ se cumple

$$f((1-t)x+ty)\leq(1-t)f(x)+tf(y).$$

Si la desigualdad es estricta se dice que la función es estrictamente convexa. Geométricamente la convexidad significa que en cada intervalo $[x,y]\subset D$ la gráfica de f queda por debajo del segmento que va de $(x,f(x))$ a $(y,f(y))$.

Algunas funciones convexas importantes son $f(x)=x^n$ con n natural par, para todo $x\in\mathbb{R}$; $f(x)=e^{kx}$, con $k\in\mathbb{R}$ constante, para todo $x\in\mathbb{R}$; $f(x)=x^a$, con $a>1$, para $x>0$; $f(x)=\log_a x$ con base $0<a<1$, para $x>0$; $f(x)=x\log_a x$ con base $a>1$, para $x>0$; $f(x)=\tan x$, para $0\leq x<\pi/2$.

Una función f es *cóncava* si $-f$ es convexa. Algunas funciones cóncavas importantes son: $f(x)=x^a$ con $0<a<1$, para $x>0$; $f(x)=\log_a x$ con base $a>1$, para $x>0$; $f(x)=\arctan x$, para $x>0$.

Para quienes conozcan el cálculo diferencial, si f es una función derivable entonces f es convexa en D si y sólo si su derivada f' es creciente en D. Si f es derivable dos veces entonces f es convexa en D si y sólo si su derivada segunda f'' es no negativa en D.

5.3.1. Desigualdad de Jensen

Si f es una función convexa en D, x_1, x_2,...,$x_n \in D$, r_1,r_2,...,r_n son reales positivos y $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = 1$, entonces

$$f(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i).$$

Si f es estrictamente convexa entonces la desigualdad anterior es estricta. Para funciones cóncavas se invierte el sentido de la desigualdad.

La desigualdad de Jensen se prueba fácilmente por inducción en n. Para $n = 2$ es la propia definición de convexidad. Si $n > 2$ y suponemos que es cierta para $n - 1$, entonces

$$\begin{aligned}
f(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) &= f((1 - r_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_i}{1 - r_n} x_i + r_n x_n) \\
&\leq (1 - r_n) f(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_i}{1 - r_n} x_i) + r_n f(x_n) \\
&\leq (1 - r_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_i}{1 - r_n} f(x_i) + r_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i).
\end{aligned}$$

La desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, probada más arriba, se obtiene de inmediato aplicando la desigualdad de Jensen con $r_i = 1/n$ y $f(x) = x^2$. Más en general si $b > a > 0$, usando la convexidad de $f(x) = x^{b/a}$ resulta que

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^a \right)^{b/a} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^a)^{b/a}$$

o sea

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^a \right)^{1/a} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^b \right)^{1/b}.$$

Esta desigualdad puede interpretarse así: si $a < b$ entonces la media de orden a de n reales positivos es menor o igual que la media de orden b.

Si a_1, a_2,...,a_n son números reales no negativos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ y x_1, x_2,...,x_n son números reales positivos, se define la *media aritmética pesada* de los x_i con pesos a_i como $A = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$. Análogamente se define la *media geométrica pesada* como $G = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ y la *media armónica pesada* como

$$H = \frac{1}{\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n}}.$$

Entonces la desigualdad aritmético-geométrica-armónica con pesos afirma que $A \geq G \geq H$. La parte $A \geq G$ se puede probar aplicando la desigualdad de Jensen a la función cóncava $f(x) = \log(x)$:

$$\log(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \geq a_1 \log(x_1) + a_2 \log(x_2) + \cdots + a_n \log(x_n),$$

y tomando la exponencial de ambos miembros queda

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \leq a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

La parte $G \geq H$ se obtiene aplicando la desigualdad $A \geq G$ a los recíprocos de los x_i.

Si $a, b, p, q > 0$ y $\frac{1}{p}\frac{1}{q} = 1$ entonces la *desigualdad de Young* afirma que

$$ab \leq \frac{a^p}{p}\frac{b^q}{q}.$$

La prueba consiste en aplicar la desigualdad de Jensen a la función cóncava $f(x) = \log x$:

$$\log(ab) = \frac{log(a^p)}{p} + \frac{\log(b^q)}{q} \leq \log(\frac{a^p}{p}\frac{b^q}{q}),$$

y aplicando la exponencial se completa la demostración.

A partir de esta desigualdad es fácil establecer las desigualdades de Hölder y Minkowski (ver Problemas).

5.4. Desigualdades homogéneas

Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se dice que es *homogénea* de grado r si

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^r f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Por ejemplo $f(x, y, z) = x^2 + yz$ es homogénea de grado 2, pues $(tx)^2 + (ty)(tz) = t^2(x^2+yz)$. Observe que si f es homogénea de grado $r > 0$ entonces $f(0, 0, \ldots, 0) = f(0 \cdot 0, 0 \cdot 0, \ldots, 0 \cdot 0) = 0^r f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Una desigualdad $A(x_1, \ldots, x_n) \leq B(x_1, \ldots, x_n)$ se dice que es homogénea si tanto A como B lo son, y del mismo grado.

5.4.1. Normalización

Para probar una desigualdad homogénea generalmente es suficiente restringirse a los valores de las variables que cumplen una cierta condición. Por ejemplo para probar que $f(x, y, z) > 0$ para todos los $x, y, z > 0$, siendo f homogénea de grado r, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x + y + z = 1$. ¿Porqué? Bueno, supongamos que ya hemos probado la desigualdad para los $x, y, z > 0$ tales que

$x+y+z = 1$. Dados ahora x, y, z cualesquiera, sea $a = x+y+z$. Como $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a} = 1$, se cumple $f(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}) > 0$ y por lo tanto $f(x, y, z) = a^r f(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}) > 0$.

También podríamos haber supuesto condiciones como $xyz = 1$, $xy+yz+zx = 3$, etc. En general se pueden asumir condiciones del tipo $g(x, y, z) = a$, donde g es homogénea y positiva para $x, y, z > 0$. Este proceso se denomina *normalización*. Una de las posibilidades que ofrece es la de reducir el número de variables.

Ejemplo 5.6. Probar que

$$\frac{x^2 + 2y^2}{(2x + y)^2} \geq \frac{2}{9}$$

para todos los reales positivos x, y.

Solución: como la desigualdad es homogénea (de grado 0) podemos asumir $2x+y = 1$, de donde $y = 1 - 2x$. Entonces

$$\frac{x^2 + 2y^2}{(2x + y)^2} = x^2 + 2(1 - 2x)^2 = 9x^2 - 8x + 2$$

y la desigualdad a probar se reduce a $9x^2 - 8x + 2 \geq \frac{2}{9}$, o sea $9x^2 - 8x + \frac{16}{9} \geq 0$. Pero esto es cierto ya que

$$9x^2 - 8x + \frac{16}{9} = 9\left(x - \frac{4}{9}\right)^2 \geq 0.$$

5.4.2. Desigualdad de Muirhead

Recordemos que una *permutación* de $\{1, 2, \ldots, n\}$ es una biyección de este conjunto en sí mismo. Al conjunto de todas las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ lo denotamos S_n. S_n tiene $n!$ elementos. Si f es una función de n variables, la *suma simétrica* se define como

$$\sum_{\text{sim}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Por ejemplo para una función de tres variables $f(x, y, z)$ se tiene

$$\sum_{\text{sim}} f(x, y, z) = f(x, y, z) + f(x, z, y) + f(y, x, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) + f(z, y, x).$$

Algunos ejemplos concretos son

$$\sum_{\text{sim}} x^2y = x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y,$$

$$\sum_{\text{sim}} xy = 2(xy + xz + yz),$$

$$\sum_{\text{sim}} xyz = 6xyz.$$

Sea ahora n un número natural y consideremos las secuencias decrecientes de n números reales. Se dice que una de estas secuencias $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ *mayoriza* a otra $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1) $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$.
2) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

En este caso escribiremos $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \succcurlyeq (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Por ejemplo si $n = 3$ se tiene $(4, 2, 1) \succcurlyeq (3, 2, 2)$, $(2, 1, 0) \succcurlyeq (1, 1, 1)$ y $(1, 0, 0) \succcurlyeq (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

El teorema de Muirhead afirma que, si $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \succcurlyeq (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, entonces

$$\sum_{\text{sim}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \geq \sum_{\text{sim}} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n}$$

para todos los $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, con igualdad si $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ o si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

El lector puede ver una demostración en [3], aquí nos limitaremos a dar algunos ejemplos.

Ejemplo 5.7. Como para $n = 3$ se tiene $(2, 0, 0) \succcurlyeq (1, 1, 0)$, entonces $\sum_{\text{sim}} x_1^2 \geq \sum_{\text{sim}} x_1 x_2$, o sea $2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$, o $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ que ya habíamos probado en el Ejemplo 5.2 para reales cualesquiera.

Ejemplo 5.8. Como $(1, 0, 0, \ldots, 0) \succcurlyeq (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$, entonces

$$\sum_{\text{sim}} x_1 \geq \sum_{\text{sim}} x_1 x_2 \cdots x_n,$$

o sea

$$x_1 + x_2 + \cdots x_n \geq n x_1^{\frac{1}{n}} x_2^{\frac{1}{n}} \cdots x_n^{\frac{1}{n}},$$

que no es otra cosa que la desigualdad AG.

Ejemplo 5.9. Pruebe que para $x, y, z > 0$ se cumple

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz \geq \frac{1}{7}(x + y + z)^3.$$

Solución: multiplicando ambos miembros por 7 se tiene

$$7(x^3 + y^3 + z^3 + xyz) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3\sum_{\text{sim}} x^2 y,$$

o sea

$$6(x^3 + y^3 + z^3) + xyz \geq 3\sum_{\text{sim}} x^2 y.$$

Pero $(3, 0, 0) \succcurlyeq (2, 1, 0)$, luego $\sum_{\text{sim}} x^3 \geq \sum_{\text{sim}} x^2 y$, y se sigue que

$$6(x^3 + y^3 + z^3) + xyz = 3\sum_{\text{sim}} x^3 + xyz \geq 3\sum_{\text{sim}} x^3 \geq 3\sum_{\text{sim}} x^2 y.$$

5.4.3. Desigualdad de Schur

Definamos una permutación $c \in S_n$ así: $c(1) = 2$, $c(2) = 3, \ldots, c(n-1) = n$ y $c(n) = 1$. Este tipo de permutación se denomina *ciclo*. Observe que c^n es la identidad. La *suma cíclica* de una función f de n variables se define como

$$\sum_{\text{cicl}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{c^k(1)}, x_{c^k(2)}, \ldots, x_{c^k(n)}).$$

Por ejemplo para $n = 3$ y variables x, y, z se tiene $\sum_{\text{cicl}} x = x+y+z$, $\sum_{\text{cicl}} x^2y = x^2y+y^2z+z^2x$. Es importante no confundir estas sumas con las sumas simétricas. Estas últimas tienen $n!$ términos, mientras que las sumas cíclicas tienen solo n.

La desigualdad de Schur afirma que si $r > 0$ entonces

$$\sum_{\text{cicl}} x^r(x-y)(x-z) \geq 0,$$

para todos los $x, y, z \geq 0$.

Prueba: Como la desigualdad es simétrica en x, y, z, podemos asumir que $x \geq y \geq z \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cicl}} x^r(x-y)(x-z) &= x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y)\\ &= (x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(z-x)(z-y) \geq 0.\end{aligned}$$

Si se desarrolla completamente, la desigualdad de Schur se puede expresar en la forma equivalente

$$\sum_{\text{cicl}} x^{r+2} + \sum_{\text{cicl}} x^r yz \geq \sum_{\text{sim}} x^{r+1}y.$$

Para $r = 1$ nos queda

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq \sum_{\text{sim}} x^2y,$$

5.4.4. Homogeneización

Para tratar desigualdades homogéneas existen poderosas técnicas. Por esa razón se suele intentar convertir las desigualdades no homogéneas en otras equivalentes pero homogéneas. Esto se aplica especialmente a desigualdades en que las variables están sujetas a una restricción homogénea $g(x_1, \ldots, x_n) = a$. En ese caso, g/a o a/g se pueden introducir como factores unitarios en la desigualdad original, para lograr la *homogeneización*. Observe que este proceso es el inverso de la normalización.

Ejemplo 5.10. (TT 1997) Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Pruebe que

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

Solución: Primero homogeneizamos:

$$\frac{1}{a+b+(abc)^{1/3}} + \frac{1}{b+c+(abc)^{1/3}} + \frac{1}{c+a+(abc)^{1/3}} \leq \frac{1}{(abc)^{1/3}}.$$

A continuación eliminamos los exponentes fraccionarios con el cambio de variables $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$:

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz} + \frac{1}{y^3+z^3+xyz} + \frac{1}{z^3+x^3+xyz} \leq \frac{1}{xyz},$$

y eliminando denominadores:

$$xyz \sum_{\text{cicl}} (x^3+y^3+xyz)(y^3+z^3+xyz) \leq (x^3+y^3+xyz)(y^3+z^3+xyz)(z^3+x^3+xyz),$$

que después de desarrollar y simplificar se reduce a

$$\sum_{\text{sim}} x^5y^2z^2 \leq \sum_{\text{sim}} x^6y^3$$

que, como $(5,2,2) \succcurlyeq (6,3,0)$, es consecuencia del teorema de Muirhead.

5.5. Desigualdades geométricas

Se llama así a las desigualdades que involucran elementos geométricos, tales como los lados de un triángulo, su circunradio, su área, etc. Para resolver problemas de este tipo hay que combinar conocimientos sobre desigualdades con conocimientos geométricos.

A continuación enunciamos sin demostración algunos de los resultados geométricos más utilizados para este tipo de desigualdades. Sean a, b y c los lados de un triángulo, α, β y γ los ángulos opuestos respectivamente a a, b y c, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ su semiperímetro, R su circunradio, r su inradio y Δ su área. Entonces:

1. Desigualdad triangular: Los reales positivos a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y sólo si

$$a < b + c, \qquad b < a + c, \qquad c < a + b.$$

2. Fórmulas para el área.

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = sr = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \alpha.$$

3. Teorema de los senos.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Ejemplo 5.11. Pruebe que si R es el circunradio y r el inradio de un triángulo, entonces $R \geq 2r$.

Solución: De las fórmulas del área se deduce que $R = abc/(4\Delta)$ y $r = 2\Delta/(a+b+c)$, luego

$$\frac{R}{r} = \frac{abc(a+b+c)}{8\Delta^2}.$$

Pero

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

luego

$$\frac{R}{r} = \frac{2abc)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Como ya sabemos que $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc$, se sigue $R \geq 2r$.

Esta desigualdad es inmediata si se conoce el Teorema de Euler que afirma que el cuadrado de la distancia del circuncentro al incentro de un triábgulo es $R(R-2r)$. Otra prueba ingeniosa consiste en observar que la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados tiene radio $R/2$ y a partir de ella, mediante tres homotecias de centro en los vértices y razón ≤ 1, se puede obtener el incírculo.

5.6. Problemas

Problema 5.1. Si x, y son reales positivos se define su *media cuadrática* como $C = \sqrt{(x^2+y^2)/2}$ y su *media armónica* como $H = 2xy/(x+y)$. Si $A = (x+y)/2$ y $G = \sqrt{xy}$ pruebe que $C \geq A \geq G \geq H$ y que una cualquiera de las igualdades (y por lo tanto todas) se da si y sólo si $x = y$.

Problema 5.2. Si se sabe que la ecuación $x^3 + mx^2 + x + n = 0$ tiene raíces reales positivas cuyos cuadrados suman 1, ¿cuánto valen m, n y las raíces?

Problema 5.3. Si $x, y, z \geq 0$ pruebe que

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \leq x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y),$$

con igualdad si y sólo si $x = y = z$.

Problema 5.4. Si a, b, c son reales posiyivos, pruebe la desigualdad de Nesbitt:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 5.5. (Desigualdad de Hölder)
Si $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ son reales cualesquiera y $p, q > 0$ son tales que $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Problema 5.6. (Desigualdad de Minkowski)
Si $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ son reales cualesquiera y $p \geq 1$ entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Problema 5.7.
Sean a, b, c reales positivos. Pruebe que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Problema 5.8. [OIM 1985]
Halle las raíces r_1, r_2, r_3 y r_4 de la ecuación:

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$$

sabiendo que son reales, positivas y que

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

Problema 5.9 (OMCC 2003)**.**
Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a+1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

Problema 5.10. [CMO 1995]
Sean a, b y c reales positivos. Pruebe que

$$a^a b^b c^c \leq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

Problema 5.11. (IMO 2005)
Sean x, y, z números reales positivos tales que $xyz \geq 1$. Pruebe que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{y^5 + z^2 + x^2} \geq 0.$$

Problema 5.12. [Olimpiada Asia Pacífico (APMO) 1996]
Sean a, b y c los lados de un triángulo. Pruebe que

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

y determine cuándo se da la igualdad.

Problema 5.13. (IMO 1961) Sean a, b y c los lados de un triángulo y Δ su área. Probar que

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta.$$

Capítulo 6

Ecuaciones funcionales

Una *ecuación funcional* es una ecuación en la que la incógnita es una función. En este tipo de ecuaciones suele aparecer una función y una o más variables, y se deben hallar las funciones para las cuales se satisface la igualdad, sean cuales sean los valores de las variables dentro de cierto dominio. La técnica de resolución consiste por lo general en darles valores particulares a las variables, o en suponer relaciones entre ellas, que permitan obtener información sobre las funciones buscadas.

6.1. Ejemplos

Comencemos por un ejemplo sencillo:

Ejemplo 6.1. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(1-x) + 2f(x) = 3x^2. \tag{6.1}$$

Solución: Observe en primer lugar que no hay manera de despejar la f, ya que se encuentra evaluada en valores diferentes. Pero sustituyendo x por $1-x$ en 6.1 resulta

$$f(x) + 2f(1-x) = 3(1-x)^2, \tag{6.2}$$

De estas dos igualdades se puede eliminar $f(1-x)$, multiplicando 6.1 por 2 y restando 6.2. Así nos queda $3f(x) = 6x^2 - 3(1-x)^2$, de donde se obtiene la solución (única en este caso) $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

Ejemplo 6.2. Hallar todas las funciones $f(x)$ que satisfacen

$$f(\frac{x-3}{x+1}) + f(\frac{3+x}{1-x}) = x$$

para todo real x con $|x| \neq 1$.

Solución: Sea $h(x) = (x-3)/(x+1)$. Entonces

$$h(h(x)) = \frac{h(x)-3}{h(x)+1} = \frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1} = \frac{x-3-3(x+1)}{x-3+(x+1)} = \frac{x+3}{x-1}.$$

Análogamente

$$h(h(h(x))) = \frac{h(h(x))-3}{h(h(x))+1} = \frac{\frac{x+3}{1-x}-3}{\frac{x+3}{1-x}+1} = \frac{x+3-3(1-x)}{x+3+(1-x)} = x$$

y la ecuación propuesta se puede escribir como

$$f(h(x)) + f(h(h(x))) = x.$$

Sustituyendo x por $h(x)$, resulta

$$f(h(h(x))) + f(x) = h(x),$$

y sustituyendo x por $h(x)$ una vez más queda

$$f(x) + f(h(x)) = h(h(x)).$$

Sumando las dos últimas igualdades y restando la primera queda

$$2f(x) = h(h(x)) + h(x) - x,$$

o bien

$$f(x) = \frac{3+x}{2(1-x)} + \frac{x-3}{2(x+1)} - \frac{x}{2} = \frac{x(x^2+7)}{2(1-x^2)}.$$

Una ecuación funcional muy famosa es la de Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

la cual obviamente tiene como soluciones a todas las funciones de la forma $f(x) = ax$, donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante. Si nos restringimos al cuerpo de los números racionales, éstas son todas las soluciones (con a racional). Pero en el cuerpo de los números reales hay muchas más. Sin embargo, con algunas restricciones de regularidad (por ejemplo que f sea monótona, o continua, o polinomialmente acotada) se puede probar que las del tipo $f(x) = ax$ son todas las soluciones.

6.2. Problemas

Problema 6.1. (Canguro 2010, 4º y 5º) La función f está definida para todos los reales positivos y cumple

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x,$$

para todo $x > 0$. ¿Cuál es el valor de $f(6)$?

(A) 923; (B) 1; (C) 1013; (D) 2009; (E) 993.

Problema 6.2. Resolver

$$f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x^3, \quad x \neq 0.$$

Problema 6.3. Resolver

$$f(\frac{1+x}{1-x}) + f(-\frac{1}{x}) + f(\frac{x-1}{1+x}) = x.$$

Problema 6.4. Probar que las únicas soluciones de la ecuación $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para todos los x, y racionales, son las de la forma $f(x) = ax$ con a racional.

Problema 6.5. (IMO 1981) La función $f(x, y)$ satisface $f(0, y) = y + 1$, $f(x+1, 0) = f(x, 1)$, $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$ para todos los enteros $x, y \geq 0$. Halle $f(4, 1981)$.

Problema 6.6. (IMO 1992) Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$.

Problema 6.7. (IMO 1999) Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$.

Problema 6.8. (IMO 2010) Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \left\lfloor f(y) \right\rfloor$$

para todos los $x, y \in \mathbb{R}$.

Capítulo 7

Soluciones a los problemas

Capítulo 1

1.1 Como $125 = 5^3$ se tiene $N = 2^{2010} \cdot 5^{3\cdot 671} = 2^{2010} \cdot 5^{2013} = 5^3 \cdot 10^{2010}$. Por lo tanto N se escribe como 125 seguido de 2010 ceros. Su número de cifras es 2013 y la suma de todas ellas es 8.

1.2 $(121)_b = b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$.

1.3 El cuadrado grande se divide en $3^2 = 9$ cuadrados, de ellos el central se divide en 4, y uno de esos en $5^2 = 25$, luego la respuesta es $\frac{1}{9\cdot 4\cdot 25} = \frac{1}{900}$.

1.4

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot 1000 = \frac{1000}{10} = 100.$$

1.5 La respuesta correcta es la (A). Si escribimos $\frac{1}{3} = \frac{24}{120}$, $\frac{1}{4} = \frac{30}{120}$ y $\frac{1}{5} = \frac{40}{120}$, tendremos que las marcas de la recta numérica que siguen después de $\frac{1}{5}$ corresponden perfectamente con las fracciones $\frac{25}{120}, \frac{26}{120}, \frac{27}{120}, \dots$ y, justamente, la marca indicada con la letra **a** es la que corresponde a la fracción $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$.

1.6 Como

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

1.7 Como
$$\frac{1}{a\cdot(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1},$$
se tiene
$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2014\cdot 2015}&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\\&=1-\frac{1}{2015}=\frac{2014}{2015}.\end{aligned}$$

1.8 (a) Comenzando por la derecha,
$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)&=1+\frac{1}{2}\frac{(n+1)-(n-1)}{n^2-1}=1+\frac{1}{n^2-1}\\&=\frac{(n^2-1)+1}{n^2-1}=\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}.\end{aligned}$$

(b) La suma pedida es igual a
$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2009}-\frac{1}{2011}\right)\\&=2009+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2010}+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2011}\right)\\&=2009+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)\\&=2009+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)=2009+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{4021}{2010\cdot 2011}\right)\\&=2009+\frac{1}{2}\left(\frac{3\cdot 1005\cdot 2011-4021}{2010\cdot 2011}\right)=2009+\frac{3029572}{4042110}=2009+\frac{1514786}{2021055}.\end{aligned}$$

1.9 La respuesta correcta es la (A). Como $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, se tiene $(3-2)(2+3)=3^2-2^2$, $(3^2-2^2)(2^2+3^2)=3^4-2^4$, $(3^4-2^4)(2^4+3^4)=3^8-2^8,\ldots,$ $(3^{2048}-2^{2048})(2^{2048}+3^{2048})=3^{4096}-2^{4096}$, por lo tanto si E es el valor de la expresión dada, entonces
$$E=(3-2)E=\frac{3^{4096}-2^{4096}+(3-2)2^{4096}}{3^{2048}}=\frac{3^{4096}}{3^{2048}}=3^{2048}.$$

1.10 Si Juan tenía inicialmente x naranjas, a Pedro le regaló $(x+1)/2$ y le quedaron $(x-1)/2$. A Luis le regaló $(x-1)/6+1/3=(x+1)/6$ y le quedaron $(x-1)/2-(x+1)/6=(2x-4)/6=(x-2)/3$. A Armando le regaló $(x-2)/12+1/4=(x+1)/12$ y le quedaron $(x-2)/3-(x+1)/12=(3x-9)/12=(x-3)/4=8$. Por lo tanto Juan tenía inicialmente $4\cdot 8+3=35$ naranjas, a Pedro le regaló $(35+1)/2=18$, a Luis $(17+1)/3=6$ y a Armando $(11+1)/4=3$.

1.11 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ y bd es impar, por ser producto de dos impares. Si se expresa en forma reducida el denominador será un divisor de bd, que también debe ser impar.

1.12 Supongamos que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = m$ entero. Sea 2^k la mayor potencia de 2 que no supere a n. Multiplicando ambos miembros de la igualdad por 2^{k-1}, nos queda

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{i} = 2^{k-1}m.$$

Ahora bien, una de las fracciones del miembro izquierdo es $\frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$. Todas las demás, al expresarlas en forma reducida, tienen denominador impar (posiblemente 1, si son enteros). Pero entonces se podría expresar $\frac{1}{2}$ como una suma de fracciones con denominador impar, que por el problema anterior debería tener también denominador impar, absurdo.

1.13 La respuesta correcta es la (E). Como

$$\frac{20009}{20008} = 1 + \frac{1}{20008} < 1 + \frac{1}{10000} = 1{,}0001$$

y

$$\frac{2009}{2008} = 1 + \frac{1}{2008} > 1 + \frac{1}{10000} = 1{,}0001,$$

se tiene

$$\frac{20009}{20008} < 1{,}0001 < \frac{2009}{2008}.$$

1.14 El cálculo de los primeros a_n nos da 1, 4, 3, 4, 1, 0, 1, 4, 3, 4, 1, 9, 1,... lo cual nos hace sospechar que la sucesión es periódica. En efecto $(n+6)^2 = n^2 + 12n + 36 = n^2 + 6(2n+6)$. Por lo tanto n^2 y $(n+6)^2$ dejan el mismo resto al dividirlos entre 6. Así

$$0.a_1a_2a_3a_4 \cdots = 0.\widehat{143410} = \frac{143410}{999999}.$$

1.15 Sean r racional, α irracional y $s = r + \alpha$. Si s fuese racional entonces $\alpha = s - r$ también lo sería, absurdo. Por lo tanto s es irracional.

En cuanto a la suma de dos irracionales, $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ es racional y $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ es irracional.

1.16 Se puede hacer de manera análoga a la prueba de irracionalidad de $\sqrt{2}$, o bien proceder de la manera siguiente: si $\sqrt[3]{2} = a/b$ con a, b naturales, entonces $2 = a^3/b^3$, de donde $a^3 = 2b^3$. Si en las descomposiciones en factores primos de a y b el 2 aparece con exponentes r y s, respectivamente, entonces en la descomposición de a^3 el 2 aparece con exponente $3r$, mientras que en la descomposición de $2b^3$ el 2 aparece con exponente $1 + 3s$, y se llega a que $3r = 1 + 3s$, absurdo.

1.17 Si n y k son números naturales, pruebe que $\sqrt[k]{n}$ es racional si y sólo si $n = m^k$ para algún natural m.

Si $n = m^k$ entonces es claro que $\sqrt[k]{n} = m$ es racional.

recíprocamente, supongamos que $\sqrt[k]{n} = a/b$ con a, b naturales. Entonces $a^k = nb^k$. Sea $n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} p_t^{\nu_t}$ la descomposición en factores primos de n. Sean α_i y β_i los exponentes con los que aparece p_i en las descomposiciones en factores primos de a y b, respectivamente. Entonces el exponente de p_i en a^k es $k\alpha_i$, y en nb^k es $\nu_i + k\beta_i$. Por lo tanto $k\alpha_i = \nu_i + k\beta_i$, de donde $\nu_i = k(\alpha_i - \beta_i)$. Como los exponentes de cada factor primo de n son múltiplos de k, se tiene $n = m^k$ para algún natural m.

1.18 Es falso, por ejemplo 0 es racional, $\sqrt{2}$ es irracional y $0 \cdot \sqrt{2} = 0$ es racional. Lo que sí es cierto es que: El producto de un irracional por un racional no nulo es irracional.

En efecto, sean $r \neq 0$ racional, α irracional y $p = r\alpha$. Si p fuese racional entonces $\alpha = p/r$ también lo sería, absurdo. Por lo tanto p es irracional.

El producto de dos irracionales puede ser tanto racional como irracional. Por ejemplo $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ es racional, pero $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ es irracional.

1.19 Supongamos que $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ fuese racional. Entonces $r^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$, de donde $\sqrt{6} = (r^2 - 5)/3$ también sería racional. Pero $\sqrt{6}$ es irracional, luego r debe ser irracional.

1.20 Como

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} = \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{(a+1) - a} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$$

se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1 = 9. \end{aligned}$$

1.21 La última raíz es $\sqrt{1} = 1$. Continuando de adentro hacia afuera, la segunda es $\sqrt{1 + 3 \cdot 1} = \sqrt{4} = 2$. La tercera es $\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 3\sqrt{1}}} = \sqrt{1 + 4 \cdot 2} = 3$. Asumiendo inductivamente que la $k-1$-ésima raíz es $k-1$, entonces la k-ésima será $\sqrt{1 + (k+1)(k-1)} = \sqrt{1 + k^2 - 1} = \sqrt{k^2} = k$. Por lo tanto el valor de la expresión a calcular es 2014.

1.22 Aquí usaremos la identidad $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$. Entonces

$$(\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a(a+1)} + \sqrt[3]{(a+1)^2}) = (a+1) - a = 1$$

y

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a(a+1)} + \sqrt[3]{(a+1)^2}} = \sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a}.$$

Por lo tanto la suma a calcular se reduce a

$$(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}) + (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) + \cdots + (\sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{728}) = \sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{1} = 9 - 1 = 8.$$

1.23 Sean $a = \sqrt[3]{pq^2}$, $b = \sqrt[3]{qr^2}$ y $c = \sqrt[3]{rp^2}$. Se debe probar que $1/a + 1/b + 1/c$ es racional. Pero como $abc = \sqrt[3]{p^3q^3r^3} = pqr$ es racional, y

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc},$$

basta probar que $ab + bc + ca$ es racional. Ahora bien,

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc$$

y

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) + 6abc,$$

por lo tanto

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) + 3abc = 3(a + b + c)(ab + bc + ca),$$

y como $a + b + c$, a^3, b^3, c^3 y abc son todos racionales, resulta que $ab + bc + ca$ es racional.

1.24

$$a = \log_{\frac{1}{9}}(27) = \frac{\log_3(27)}{\log_3(\frac{1}{9})} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2},$$

$$b = \log_{\sqrt{8}}\left(\sqrt[7]{\frac{1}{32}}\right) = \frac{\log_2\left(\sqrt[7]{\frac{1}{32}}\right)}{\log_2(\sqrt{8})} = \frac{\frac{-5}{7}}{\frac{3}{2}} = -\frac{10}{21},$$

$$c = \left(\sqrt[3]{9}\right)^{\log_{\sqrt[9]{3}}(\sqrt[6]{3})} = \left(9^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3.$$

Capítulo 2

2.1 (a) $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$, (b) $x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$,
(c) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, (d) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$,
(e) $4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$, (f) $2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x - 3)^2$,
(g) $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9))$, (h) $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$,
(i) $x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = xx + 3)(x - 2)$, (j) $x^4 - 81 = (x - 3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$,
(k) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$, (l) $x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$.

2.2 Como $x^4+4x^2=(x^2+2)^2-4$, poniendo $u=x^2+1$ se tiene $f(u)=(u+1)^2-4$ y $f(x^2-1)=(x^2-1+1)^2-4=x^4-4$.

2.3 $a^k x^{nk}$.

2.4 $ab^k x^{nk}$.

2.5 $P(x)=2x+1$, $P^2(x)=2(2x+1)+1=4x+3$, $P^3(x)=2(4x+3)+1=8x+7$ y en general $P^n(x)=2^n x+2^n-1$.

2.6 P debe ser de grado 2, digamos $P(x)=ax^2+bx+c$. El término principal de $P(P(x))$ será $a(ax^2)^2=a^3x^4$, de donde $a=2$. además debe ser $b=0$, pues de lo contrario en $P(P(x))$ aparecería un término en x^3. Ahora si $P(x)=2x^2+c$ entonces $8x^4+8x^2+3=P(P(x))=2(2x^2+c)^2+c=8x^4+8cx^2+2c^2+c$, que se cumple para $c=1$. Por lo tanto la respuesta es $P(x)=2x^2+1$.

2.7 Si $P(7)=11$ y $P(11)=13$ entonces $P(11)-P(7)=13-11=2$, pero $P(11)-P(7)$ debe ser divisible entre $11-7=4$, y se llega a una contradicción.

2.8 Pongamos $P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$. Haciendo $x=2$ y $x=-3$ se obtienen, respectivamente, $7=2a+b$ y $17=-3a+b$. Restando miembro a miembro las dos igualdades resulta $-10=5a$, de donde $a=-2$, y entonces $b=7-2a=11$. El resto pedido es $-2x+11$.

2.9 Observe que el polinomio $P(x)-x$ tiene grado 3 y se anula para $x=1$, 2 y 3, por lo tanto $P(x)-x=a(x-1)(x-2)(x-3)$ para cierta constante a. Haciendo $x=4$ resulta $5-4=a(4-1)(4-2)(4-3)$ o sea $1=6a$, de donde $a=1/6$, $P(x)=x+(1/6)(x-1)(x-2)(x-3)$ y $P(5)=5+(1/6)(5-1)(5-2)(5-3)=9$.

2.10 (a) Si $P(x)=\sum_{k=0}^n a_k x^k$ entonces $P(-x)=\sum_{k=0}^n a_k(-x)^k=\sum_{k=0}^n(-1)^k a_k x^k$, por lo tanto $P(x)=P(-x)$ si y sólo si $a_k=(-1)^k a_k$ para $k=0,1,\dots,n$. Esto ocurre automáticamente si$k$ es par, pero para k impar sólo ocurre si $a_k=0$. Por lo tanto $P(x)=P(-x)$ si y sólo si los coeficientes de todas las potencias impares de x son nulos.
(b) Análogamente $P(x)=-P(-x)$ si y sólo si los coeficientes de todas las potencias pares de x son nulos.

2.11 Desarrolle el miembro izquierdo y agrupe términos semejantes.

2.12 Asumiendo $x+y+z=0$ se tiene
(a) $0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, de donde $x^2+y^2+z^2=-2(xy+xz+yz)$.
(b) $0=(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)+6xyz$ de donde $x^3+y^3+z^3=-3xy(x+y)-3xz(x+z)-3yz(y+z)-6xyz$. Pero como $x+y=-z$, $x+z=-y$, $y+z=-x$, resulta $x^3+y^3+z^3=3xyz+3xyz+3xyz-6xyz=3xyz$.
(c) Por (a) y (b) se tiene $(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)=-6xyz(xy+xz+yz)$, pero $(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)=x^5+y^5+z^5+x^2y^3+x^2z^3+y^2x^3+y^2z^3+z^2x^3+z^2y^3$

$= x^5 + y^5 + z^5 + x^2y^2(x+y) + x^2z^2(x+z+y^2z^2(y+z)$
$= x^5 + y^5 + z^5 - x^2y^2z - x^2yz^2 - xy^2z^2 = x^5 + y^5 + z^5 - xyz(xy+xz+yz)$,
Entonces $-6xyz(x^2+y^2+z^2) = x^5 + y^5 + z^5 - xyz(xy+xz+yz)$, de donde
$x^5 + y^5 + z^5 = -5xyz(xy+xz+yz)$.

2.13 $b = -6$, $c = 5$.

2.14 Sean $u-r$, u y $u+r$ las raíces. Entonces $(u-r)+u+(u+r) = 3$, de donde $u = 1$. Además $(u-r)u + (u-r)(u+r) + u(u+r) = -2$, de donde $(1-r)+(1-r)(1+r)+(1+r) = -2$, o sea $3-r^2 = -2$ y $r^2 = 5$. Los dos valores posibles para r ($\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$) dan lugar a las mismas tres raíces $1-\sqrt{5}$, 1 y $1+\sqrt{5}$. Finalmente, como $(u-r)u(u+r) = -d$, resulta $d = -(1-r)(1+r) = r^2 - 1 = 4$.

2.15 por las fórmulas de Vieta se tiene

$$x_2x_3\cdots x_n + x_1x_3\cdots x_n + \cdots + x_1x_2\cdots x_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}$$

y

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Dividiendo miembro a miembro resulta

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Otra forma de verlo es observar que $1/x_1, 1/x_2,\ldots, 1/x_n$ son las raíces de $x^nP(1/x) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n$.

2.16 Los candidatos son 1 y -1. $1+2-5+3-1 = 0$ por lo tanto 1 es raíz.

2.17 Los candidatos a raíz racional son 1, -1, $1/2$ y $-1/2$, de los cuales 1, -1, y $-1/2$ son raíces, y como son tres esas son todas.

2.18 Si a es una raíz entera de $P(x) - x$ entonces $P(x) - x = (x-a)Q(x)$, donde Q también tiene coeficientes enteros. Evaluando en 0 resulta $2011 = -aQ(0)$, y como 2011 es primo, a sólo puede ser 1, -1, 2011 ó -2011. Por lo tanto la respuesta es 4. Un ejemplo de polinomio para el cual se alcanza ese máximo es $x + (x+1)(x-1)(x+2011)(x-2011)$.

2.19 $P(x) = x^5+x^2+1 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$ y $Q(x) = x^2-2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$, de donde se sigue fácilmente que $Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5) = P(\sqrt{2})P(-\sqrt{2}) = (3+4\sqrt{2})(3-4\sqrt{2}) = -23$.

2.20 Ana no tiene estrategia ganadora, ya que Bruno puede escoger $d = -8a - 4b - 2c$ en su última jugada, haciendo que $P(2) = 0$ (esta jugada es obligada si Bruno quiere ganar). Para evitar perder, Ana debe asegurarse de que $P(3) \neq 0$. Pero $P(3) = 27a + 9b + 3c - 8a - 4b - 2c = 19a + 5b + c$, por lo tanto Ana puede evitar perder si en su segunda jugada escoge cualquier c diferente de $-19a - 5b$. En conclusión, ninguno de los dos tiene estrategia ganadora.

2.21 Sean a, b y c las raíces de P. Entonces
$a+b+c=-(t-1)$,
$ab+ac+bc=-(t+3)$,
$abc=-1$.
Se sigue que $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=(t-1)^2+2(t+3)$,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+ac+bc}{abc}=t+3,$$

Por lo tanto hay que minimizar

$$(t-1)^2+3(t+3)=t^2+t+4=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4},$$

lo cual ocurre para $t=-1/2$.

2.22 Poniendo $x=4$ en $(x+10)P(2x)=(8x-32)P(x+6)$ resulta $14P(8)=0$, es decir que $P(8)=0$. Poniendo $x=-10$ resulta $0=-112P(-4)$, es decir que $P(-4)=0$. Y poniendo $x=2$ resulta $12P(4)=-16P(8)=0$, de donde $P(4)=0$.

Ahora bien, P debe ser de tercer grado, ya que si ax^n es el término de mayor grado de $P(x)$ entonces, comparando los términos de mayor grado en ambos miembros de la igualdad $(x+10)P(2x)=(8x-32)P(x+6)$ resulta $xa(2x)^n=8xax^n$, de donde $2^n=8$ y por tanto $n=3$.

Y como sabemos que -4, 4 y 8 son raíces de P, debe ser $P(x)=a(x+4)(x-4)(x-8)$. Finalmente para que $P(1)=210$ debe ser $210=a(1+4)(1-4)(1-8)=105a$, de donde $a=2$ y $P(x)=2(x+4)(x-4)(x-8)$.

Verificación: $P(1)=2(1+4)(1-4)(1-8)=2\cdot 5(-3)(-7)=210$.

$(x+10)P(2x)=2(x+10)(2x+4)(2x-4)(2x-8)=16(x+10)(x+2)(x-2)(x-4)$,

$(8x-32)P(x+6)=8(x-4)2(x+6+4)(x+6-4)(x+6-8)=16(x-4)(x+10)(x+2)(x-2)$.

2.23 Se mostrará que el máximo número de elementos que puede tener S es tres. En primer lugar, veamos que el conjunto $S=\{-1,\,0,\,1\}$ tiene la propiedad pedida. En efecto, $1x^2+0x+(-1)$ tiene coeficientes en S y raíces -1, 1; $1x^2+(-1)x+0$ tiene coeficientes en S y raíces 0, 1; $1x^2+1x+0$ tiene coeficientes en S y raíces -1, 0.

Ahora veamos que el conjunto S no puede tener más de tres elementos. Procediendo por contradicción, supóngase que S tiene al menos dos elementos con valor absoluto mayor que 1, y sean p, q los dos elementos con mayor valor absoluto en el conjunto (con $|p|\geq|q|$). Según las condiciones del problema, existen A, B, C en S, con $A\neq 0$, tales que el polinomio Ax^2+Bx+C tiene raíces p, q. Según las fórmulas de Vieta, debe cumplirse que $Apq=C$, de donde $|C|=|A||p||q|\geq 2|p|>|p|$, lo que contradice la hipótesis de que p y q son los elementos con mayor valor absoluto en el conjunto. De esta forma, solamente podría encontrarse un elemento en el conjunto con valor absoluto mayor que 1, de donde la mayor cantidad de elementos que podría tener el conjunto será cuatro, siendo éstos -1, 0, 1, n, para algún n

entero con valor absoluto mayor que 1. Si n es positivo, el coeficiente del término lineal en el polinomio que tenga raíces 1 y n debe tener valor absoluto mayor o igual que $n+1$, contradicción. Lo mismo sucederá si n es negativo, considerando el coeficiente del término lineal en el polinomio con raíces -1 y n. De esta forma, no es posible que el conjunto buscado tenga cuatro elementos.

2.24 Supongamos por absurdo que $P(x) = Q(x)R(x)$ con Q mónico de coeficientes enteros y $0 < \mathrm{gr}(Q) < n$. Como P y Q tienen coeficientes enteros y Q es mónico, R también tiene coeficientes enteros y $0 < \mathrm{gr}(R) < n$. Ahora bien, $Q(a_i)R(a_i) = -1$ para $i = 1, \ldots, n$, lo cual implica que para cada i o bien $Q(a_i) = 1$ y $R(a_i) = -1$ o bien $Q(a_i) = -1$ y $R(a_i) = 1$. En ambos casos $Q(a_i) + R(a_i) = 0$, es decir que $Q + P$ se anula en n valores diferentes. Pero esto es imposible, pues $Q + P$ no es idénticamente nulo y $\mathrm{gr}(Q + P) \leq \mathrm{máx}(\mathrm{gr}(Q), \mathrm{gr}(R)) < n$.

2.25 Observemos que $2+13 = 15 = 10+5$. Esto nos lleva a considerar el polinomio $P(x) + x - 15$, que tiene a 2 y 10 como raíces. Ppor lo tanto $P(x) + x - 15 = (x-2)(x-10)Q(x)$ con $\mathrm{gr}(Q) > 0$. Si k es una raíz entera de P entonces

$$k - 15 = (k-2)(k-10)Q(k), \qquad (*)$$

es decir que $k-2$ y $k-10$ son divisores de $k-15$.

Obviamente no puede ser $k > 15$ pues entonces $k-15$ tendría divisores positivos mayores que él. Tampoco puede ser k par, pues $k-15$ sería impar y el miembro derecho de (*) par.

No puede ser $k < 0$ pues poniendo $m = -k$ nos quedaría $m+15 = (m+2)(m+10)|Q(-m)|$, lo cual es imposible pues $0 < m+10 < m+15 < 2(m+10)$.

Quedan los casos $k = 1$, 3, 5, 7, 9, 11, 13 y 15. Para $k = 9$, 11 y 13 es $|k-15| \leq 6 < k-2$, imposible.

$k = 3$: $-12 = -7Q(3)$, imposible. $k = 5$: $-10 = -15Q(5)$, imposible. $k = 7$: $-8 = -15Q(7)$, imposible.

La única posibilidad que queda es $k = 15$, que efectivamente puede darse si $Q(15) = 0$. Por lo tanto la raíz entera es 15.

2.26 Es claro que a y c deben ser distintos de 0, y por tanto 0 no es raíz de ninguna de ambas ecuaciones. Además r es raíz de $ax^2 + bx + c = 0$ si y sólo si $1/r$ lo es de $cx^2 + bx + a = 0$. Por lo tanto q_1 y q_2 son p_1 y p_2, en algún orden. Si p_1, q_1, p_2, q_2 están en progresión aritmética entonces $|p_2 - p_1| = |q_2 - q_1| = |1/p_2 - 1/p_1| = |(p_1 - p_2)/(p_1p_2)|$. Se sigue que $|c/a| = |p_1p_2| = 1$ y por lo tanto $c = a$ o $c = -a$. Pero $c = a$ es imposible pues entonces ambas ecuaciones serían iguales, la progresión aritmética tendría razón 0 y resultaría $p_1 = p_2$. Por lo tanto $c = -a$ y $a + c = 0$.

2.27 Si x_1, x_2 y x_3 son las raíces de $x^3 + ax^2 + bx + c$ entonces $a^2 - 3b = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \geq 0$.

2.28 Si x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 son raíces enteras de P entonces $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)A(x)$ donde $A(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros. Si Q tuviese alguna raíz entera u entonces $Q(u) = P(u) - 30 = 0$ y $(u - x_1)(u - x_2)(u - x_3)(u - x_4)(u - x_5)(u - x_6)$ sería un divisor de 30. Pero como las x_i son diferentes el producto anterior, en valor absoluto es al menos $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$, absurdo.

2.29 Las raíces comunes de P y Q también deben ser raíces de la diferencia $P(x) - Q(x) = (a - c)(x^3 - x)$, por lo tanto sólo pueden ser 0, 1 y -1. Pero 0 no es raíz de P ni de Q, y las condiciones para que 1 y -1 lo sean son $a + b + c + 2 = 0$ y $-a + b - c + 2 = 0$, o sea $b = -2$ y $a + c = 0$.

2.30 Si x_1, x_2,…, x_{2011} son las raíces, entonces por Vieta se tiene

$$\sum_{i=1}^{2011} x_i = 2011, \qquad \prod_{i=1}^{2011} x_i = 1,$$

de donde las medias aritmética y geométrica de las raíces son iguales. Esto sólo es posible si $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2011}$, y todas las raíces deben ser 1. Por lo tanto el polinomio es $(x - 1)^{2011}$ y el coeficiente de x^2 es $\binom{2011}{2} = 2021055$.

2.31 Por Vieta se tiene $r_1 r_2 r_3 r_4 = 5/4$, y por la desigualdad media aritmética - media geométrica:

$$1 = \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} \geq 4\sqrt[4]{\frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8}} = 4\sqrt[4]{\frac{1}{2^8}} = 1.$$

Al darse la igualdad debe ser

$$\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{4} = \frac{r_3}{5} = \frac{r_4}{8} = \frac{1}{4}$$

y por tanto $r_1 = 1/2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 5/4$, $r_4 = 2$.

2.32 Poniendo $a = b = c = 0$ resulta $P(0) = 0$. Poniendo $a = b = 0$ resulta $P(0) + P(-c) + P(c) = 2P(c)$, de donde $P(c) = P(-c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$. De aquí se sigue que en $P(x)$ sólo aparecen potencias pares de x. Poniendo ahora $a = -2x$, $b = 3x$ y $c = 6x$ se cumple que $ab + bc + ca = 0$, y por consiguiente

$$P(-5x) + P(-3x) + P(8x) = 2P(7x).$$

Si n es el grado de $P(x)$ entonces de la igualdad anterior se sigue que

$$3^n + 5^n + 8^n = 2 \cdot 7^n,$$

igualdad que se verifica para $n = 2$ y $n = 4$, y para ningún otro n par, ya que si $n \geq 6$ entonces $(8/7)^n \geq (8/7)^6 > 2$ y $8^n > 2 \cdot 7^n$. Tanto x^2 como x^4 satisfacen la condición del problema, ya que si $ab + bc + ca = 0$ entonces

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 - 2(a + b + c)^2 = -2(ab + bc + ca) = 0$$

y

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a + b + c)^4 = -6(ab + bc + ca)(ab + bc + ca + 2(a^2 + b^2 + c^2)) = 0.$$

Obviamente, cualquier combinación lineal de x^2 y x^4 satisface la condición del problema, y por lo tanto los polinomios buscados son todos los de la forma $P(x) = Ax^4 + Bx^2$, con $A, B \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

3.1 (a) $x^2 + 4x - 21 = (x + 7)(x - 3)$, raíces -7 y 3.
(b) $x^2 + 4x - 21 = (x + 2)^2 - 25$ es 0 si y sólo si $(x + 2)^2 = 25$, es decir si $x + 2 = \pm 5$ de donde salen $x_1 = -2 + 5 = 3$, $x_2 = -2 - 5 = -7$.
(c) $(-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-21)})/2 = (-4 \pm \sqrt{100}))/2 = -2 \pm \sqrt{25} = 3, -7$.

3.2 $x^2 + 4x - 21 = (x + 7)(x - 3)$, por lo tanto toma valores positivos en $(-\infty, -7) \cup (3, +\infty)$ y negativos en $(-7, 3)$.

3.3 $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$, por lo tanto el mínimo valor es 1 y lo toma para $x = -3$.

3.4 $-x^2 + 4x + 9 = -(x - 2)^2 + 13$, por lo tanto el máximo valor es 13 y lo toma para $x = 2$.

3.5 (a) $x = 5$; (b) $x = 3$; (c) $x = 5$, (d) $(1 + \sqrt{5})/2$ y $(1 - \sqrt{5})/2$; (e) $(3 + \sqrt{5})/2$ y $(3 - \sqrt{5})/2$; (f) 2 y 3.

3.6 Poniendo $u = 2^x$ nos queda $4u^2 - 17u + 4 = 0$, que tiene raíces $u_1 = (17 + \sqrt{225})/8 = 4$, $u_2 = (17 - 15)/8 = 1/4$. Los valores correspondientes de x son $x_1 = \log_2 4 = 2$, $x_2 = \log_2 1/4 = -2$.

3.7 Con el cambio $u = x^2$ la ecuación se convierte en $u^2 - 7u + 10 = 0$, que tiene raíces $u_1 = 2$ y $u_2 = 5$, por lo tanto las raíces de la ecuación propuesta son $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{5}$, $x_3 = -\sqrt{5}$.

3.8 Como 0 no es solución, dividiendo entre x^2 se obtiene la ecuación equivalente $x^2 + 2x - 13 + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Con el cambio $u = x + \frac{1}{x}$ se tiene $u^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, de donde $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$. Sustituyendo resulta $u^2 + 2u - 15 = 0$, cuyas raíces son $u_1 = 3$ y $u_2 = -5$. De $u = x + \frac{1}{x}$ se tiene $x^2 - ux + 1 = 0$ y $x = (u \pm \sqrt{u^2 - 4})/2$, y sustituyendo u por u_1 y u_2 se obtienen $x_1 = (3 + \sqrt{5})/2$, $x_2 = (3 - \sqrt{5})/2$, $x_3 = (-5 + \sqrt{21})/2$, $x_3 = (-5 - \sqrt{21})/2$.

3.9 $x_1 = 1$ es solución. Dividiendo entre $x - 1$ se obtiene $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$, que es la ecuación del ejemlo anterior. por lo tanto las otras cuatro raíces son $x_2 = (3 + \sqrt{5})/2$, $x_3 = (3 - \sqrt{5})/2$, $x_4 = (-5 + \sqrt{21})/2$, $x_5 = (-5 - \sqrt{21})/2$.

3.10 Elevando al cuadrado resulta $2x^2+3x-5=(x+1)^2=x^2+2x+1$, o sea $x^2+x-6=0$, que tiene raíces -3 y 2. Pero sustituyendo en la ecuación original sólo 2 verifica, la otra (-3) se introdujo al elevar al cuadrado.

3.11 Sean $x>y$ las edades de los hombres en el momento de la conversación. El que tiene x años tenía y hace $x-y$ años, luego la primera afirmación se traduce en $y+(y-(x-y))=50$, o sea $3y-x=50$. Análogamente el que tiene y años tendrá x dentro de $x-y$ años, y la segunda afirmación se traduce en $x+(x+(x-y))=66$, o sea $3x-y=66$. Entonces $3(3y-x)+(3x-y)=3\cdot 50+66=216$, es decir $8y=216$, de donde $y=27$ y $x=3y-50=31$.

Otra solución: la suma de ambas edades aumenta 2 cada año. Como hace $x-y$ años era 50 y dentro de $x-y$ años será 66, en $2(x-y)$ años aumentó 16, es decir que $2(x-y)=8$ y $x-y=4$. En el momento de la conversación debe ser $50+2\cdot 4=58$, luego $x+y=58$. De aquí se deduce $x=31$, $y=27$.

3.12 Este problema equivale a resolver el sistema $a-b+c=10$, $a+b+c=6$, $4a+2b+c=13$. Sumando las dos primeras resulta $2a+2c=16$, o sea $a+c=8$. Multiplicando la primera por 2 y sumándole la tercera resulta $6a+3c=33$, o sea $2a+c=11$. Entonces $a=(2a+c)-(a+c)=11-8=3$, $c=8-a=5$, $b=6-a-c=-2$ y $P(x)=3x^2-2x+5$.

3.13 Multiplicando la segunda ecuación por xyz resulta $yz+xz+xy=8$. Luego

$$(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(yz+xz+xy)t-xyz=t^3-5t^2+8t-4,$$

t resulta que x, y, z son, en algún orden, las raíces de $t^3-5t^2+8t-4=0$. Como $t_1=1$ es una raíz obvia, dividiendo se tiene $t^3-5t^2+8t-4=(t-1)(t^2-4t+4)$, y como $t^2-4t+4=(t-2)^2$, las raíces son 1, 2, 2. Las soluciones del sistema son $(1,2,2)$, $(2,1,2)$ y $(2,2,1)$.

Capítulo 4

4.1 Sea $S=a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots+(a+(n-1)d)r^{n-1}$. Si $r=1$ entonces se tiene simplemente una progresión aritmética y la suma es $(a+nd)n/2$. Si $r\neq 1$ observamos que

$$rS=ra+(a+d)r^2+(a+2d)r^3+\cdots+(a+(n-2)d)r^{n-1}+(a+(n-1)d)r^n,$$

de donde

$$\begin{aligned} S-rS &= a+dr+dr^2+\cdots+dr^{n-1}-(a+(n-1)d)r^n \\ &= d\frac{1-r^{n-1}}{1-r}+a-(a+(n-1)d)r^n \end{aligned}$$

y finalmente

$$S = d\frac{1 - r^{n-1}}{(1-r)^2} + \frac{a - (a + (n-1)d)r^n}{1-r}.$$

4.2 La respuesta correcta es la (A). Al escribir los primeros términos de la sucesión 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, $-6, \ldots$, se ve que en las posiciones impares van los impares del 1 en adelante, mientras que en las posiciones impares van enteros pares, comenzando por el 2 y decreciendo de 2 en 2. Por lo tanto en la posición 2010 estará el -2006. Esto se puede probar rigurosamente por inducción, observando que $a_{2k-1} = 2k-1$ y $a_{2k} = 4 - 2k$ se cumplen para $k = 1$ y $k = 2$, y suponiendo que se cumplen para $k = 1, \ldots, n-1$ se tiene $a_{2n-1} = a_{2n-4} + a_{2n-3} - a_{2n-2} = 4 - (2n-4) + (2n-3) - (4 - (2n-2)) = 2n-1$ y $a_{2n} = a_{2n-3} + a_{2n-2} - a_{2n-1} = 2n - 3 + 4 - (2n-2) - (2n-1) = 4 - 2n$. Por lo tanto $a_{2010} = 4 - 2010 = -2006$.

4.3 La respuesta correcta es la (A). La razón de la progresión es $\sqrt[3]{7}/\sqrt{7} = \sqrt[6]{7^2}/\sqrt[6]{7^3} = 1/\sqrt[6]{7}$, por lo tanto el cuarto término es $\sqrt[6]{7}/\sqrt[6]{7} = 1$.

4.4 Los primeros números de la lista son 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, 145,... El 89 aparece en cuarto lugar y también en la posición 12, por lo tanto, la sucesión es periódica de período 8: los números del cuarto al undécimo (89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58) se repiten a partir de la posición 12, y luego a partir de las posiciones 20, 28, 36,... Como en las posiciones divisibles entre 8 siempre va un 4, en la posición 2008 va un 4 y en la 2009 va el 16.

4.5 El número de bupis al final de cada uno de los primeros doce días es: 134, 104, 148, 118, 176, 146, 116, 172, 142, 112, 164, 134. A partir de este punto la sucesión se repite periódicamente, con período 11. Como $1000 = 90 \cdot 11 + 10$, resulta entonces que al finalizar el día 1000 habrá tantos bupis como al fin del día 10, es decir 112.

4.6 De la condición $(n+2)a_{n+1} = na_n$ se obtiene $a_{n+1} = \frac{n}{n+2}a_n$, por lo tanto

$$\begin{aligned} a_{2009} &= \frac{2008}{2010}a_{2008} = \frac{2008}{2010} \cdot \frac{2007}{2009}a_{2007} = \frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006}{2010 \cdot 2009 \cdot 2008}a_{2006} = \cdots \\ &= \frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2010 \cdot 2009 \cdot 2008 \cdots 5 \cdot 4 \cdot 3}a_1 = \frac{2 \cdot 1}{2010 \cdot 2009}1005 = \frac{1}{2009}. \end{aligned}$$

4.7 La función f transforma el entero n en la interpretación en base 3 de su representación binaria. Por lo tanto, la respuesta es el conjunto de los enteros positivos que se pueden escribir en base 3 sin utilizar el dígito 2.

4.8 Si $f(1) = a$ entonces $f(a) = f(f(1)) = 1$. Pero si $k \geq 1$ entonces $f(f(2k)+1) = 2k-1$ y por tanto $f(2k-1) = f(2k)+1 \geq 2$. Y si $k \geq 2$ entonces $f(f(2k-3)+1) = 2k$ y por tanto $f(2k) = f(2k-3)+1 \geq 2$. Por lo tanto a sólo puede ser 2. Entonces $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ y para $k \geq 2$

$$f(2k-1) = f(2k)+1 = f(2k-3)+2 = f(2k-5)+4 = \cdots = f(1)+2k-2 = 2k.$$

y por lo tanto $f(2k) = f(2k-3)+1 = 2k-2+1 = 2k-1$. En definitiva $f(n)$ es $n+1$ si n es impar y $n-1$ si n es par.

4.9 $r^2-5r+6=0$ tiene raíces 2 y 3, por lo tanto $x_n = A2^n+B3^n$. Las condiciones iniciales dan $A+B = x_0 = 3$ y $2A+3B = x_1 = 4$, de donde $A = 5$, $B = -2$ y $x_n = 5\cdot 2^n - 2\cdot 3^n$.

4.10 Una escalera de $n+m$ escalones puede subirse pisando el escalón n de E_nE_m maneras, y sin pisar el n de $E_{n-1}E_{m-1}$ maneras. Como $E_n = F_{n+1}$, $F_{n+m} = E_{n+m-1} = E_nE_{m-1}+E_{n-1}E_{m-2} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$.

4.11: $E_n = F_{n+1}$.

4.12 Haga inducción en n, aprovechando las recurrencias $J(2k) = 2J(k)-1$ y $J(2k+1) = 2J(k)+1$.

4.13 La respuesta es *sí*. Un ejemplo puede ser obtenido con $a = 2$ y $b = 2011$. Obtenemos la sucesión $x_1 = 2010, x_2 = 2011$,

$$x_{n+2} = x_n + n_{n+1} + 2\sqrt{x_nx_{n+1}+2011}, n \geq 1.$$

Probaremos que todo x_n es entero. Para ello, probaremos por inducción en n que x_{n+1} y $\sqrt{x_nx_{n+1}+2011}$ son ambos enteros.

La base de la inducción, $n = 1$, es inmediata. Supongamos que el resultado es válido para $n \geq k$. Entonces, como $\sqrt{x_kx_{k+1}+2011}$ es entero, x_{k+2} es claramente entero. Además,

$$\begin{aligned} x_{k+1}x_{k+2}+2011 &= x_{k+1}(x_k+k_{k+1}+2\sqrt{x_kx_{k+1}+2011})+2011 \\ &= x_{k+1}^2+2x_{k+1}\sqrt{x_kx_{k+1}+2011}+x_kx_{k+1}+2011 \\ &= (x_{k+1}+\sqrt{x_kx_{k+1}+2011})^2, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

Capítulo 5

5.1 $A \leq G$ fue probada en el Ejemplo 5.1. Como $(x-y)^2 \geq 0$ se tiene $x^2+y^2 \geq 2xy$, $2(x^2+y^2) \geq x^2+y*2+2xy = (x+y)^2$, $(x^2+y^2)/2 \geq (x+y)^2/4$ o sea $C^2 \geq A^2$, y entonces $C \geq A$. Finalmente de $(x+y)/2 \geq \sqrt{xy}$ resulta $1 \geq 2\sqrt{xy}/(x+y)$ y $\sqrt{xy} \geq 2xy/(x+y)$, es decir $G \geq H$. Em todos los casos hay igualdad si y sólo si $x = y$.

5.2 Si las raíces son α, β y γ, entonces $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$ y $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 1$ (Vieta), entonces por la desigualdad del Ejemplo 5.2 resulta $\alpha = \beta = \gamma$. Entonces $3\alpha^2 = 1$ de donde $\alpha = \sqrt{3}/3$, $m = -3\alpha = -\sqrt{3}$ y $n = -\alpha^3 = -\sqrt{3}/9$.

5.3 Si $x,y,z\ge 0$ pruebe que

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\le x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y),$$

con igualdad si y sólo si $x=y=z$.

5.4

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{b+c}-1+\frac{b+c+a}{c+a}-1+\frac{c+a+b}{a+b}-1\\&=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\&=\frac{1}{2}\left((b+c)+(c+a)+(a+b)\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

5.5 Sea

$$\|x\|_p=\left(\sum|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

entonces

$$\frac{\left|\sum_k x_ky_k\right|}{\|x\|_p\cdot\|y\|_q}\le\sum_k\frac{|x_k|}{\|x\|_p}\frac{|y_k|}{\|y\|_q}\le\frac{1}{p}\sum_k\frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\sum_k\frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

5.6 Para $p=1$ se reduce a la desigualdad triangular. Si $p>1$ sea $q=p/(p-1)$. Entonces por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\sum_{k=0}^n|a_k||a_k+b_k|^{p-1}\le\left(\sum_{k=0}^n|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^n|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

y

$$\sum_{k=0}^n|b_k||a_k+b_k|^{p-1}\le\left(\sum_{k=0}^n|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^n|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sumando miembro a miembro, dividiendo por el factor común de ambos miembros derechos y observando que $(p-1)q=p$ resulta

$$\left(\sum_{k=0}^n|a_k+b_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}}\le\left(\sum_{k=0}^n|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=0}^n|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

5.7 Desarrollando el miembro izquierdo y simplificando la desigualdad queda

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\ge\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Escribiendo $(a+b)/c$ como $(a+b+c)/c-1$, y procediendo análogamente con los otros dos términos del miembro izquierdo, esta desigualdad se puede escribir como

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3 \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Pero aplñicando AG se tiene

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &\geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \\ &\geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} + 3.\end{aligned}$$

5.8 Como $r_1 r_2 r_3 r_4 = 5/4$ se sigue que

$$\frac{r_1}{2}\frac{r_2}{4}\frac{r_3}{5}\frac{r_4}{8} = \frac{1}{256}$$

y entonces

$$\frac{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}+\frac{r_3}{5}+\frac{r_4}{8}}{4} = \frac{1}{4} = \sqrt[4]{\frac{r_1}{2}\frac{r_2}{4}\frac{r_3}{5}\frac{r_4}{8}}$$

y por darse la igualdad en la desigualdad aritmético-geoétrica debe ser

$$\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{4} = \frac{r_3}{5} = \frac{r_4}{8} = \frac{1}{4},$$

de donde $r_1 = 172$, $r_2 = 1$ $r_3 = 5/4$, $r_4 = 2$.

5.9 Se procederá por inducción sobre b. Para $b=3$, se tiene que $a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$. Para mostrar que esta expresión es mayor que $3(a+1)$ es suficiente demostrar que $(a^2-a+1) \geq 3$, lo cual es cierto pues $a^2-a+1 > a(a-1) \geq 2$.

Ahora supóngase que la expresión es cierta para algún valor de b, es decir, se cumple que $a^b+1 \geq b(a+1)$. Se demostrará ahora para $b+1$. Nótese que

$$a^{b+1}+1 = a(a^b+1)-(a+1)+2 \geq ab(a+1)-(a+1)+2,$$

donde la última desigualdad se tiene por la hipótesis de inducción. La última expresión se puede reescribir como

$$ab(a+1)-(a+1)+2 = (a+1)(ab-1)+2 > (ab-1)(a+1).$$

Finalmente, $ab-1 \geq 2b-1 = (b+1)+(b-2) > b+1$, lo cual es cierto. Por tanto, la desigualdad se vuelve estricta después de $b=3$. Retomando el caso $b=3$, se observa que $a(a-1)=2$ únicamente cuando $a=2$. Por tanto, se ha demostrado por inducción que la desigualdad siempre se tiene, y que la igualdad se da únicamente en el caso $a=2$, $b=3$.

5.10 Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \le b \le c$. Entonces

$$\log a \le \log b \le \log c$$

y por la desigualdad de Chebyshev

$$\frac{a+b+c}{3}\,\frac{\log a+\log b+\log c}{3} \le \frac{a\log a+b\log b+c\log c}{3}$$

de donde

$$a\log a+b\log b+c\log c \ge \frac{a+b+c}{3}(\log a+\log b+\log c),$$

y por lo tanto

$$a^a b^b c^c \le (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

5.11 La siguiente solución, dada por un estudiante de Moldavia, mereció un premio especial por su sencillez y belleza:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(y^2+z^2)(x^3-1)^2}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\ge 0,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cíclica}}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} &\ge \sum_{\text{cíclica}}\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum_{\text{cíclica}}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\\ &\ge \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum_{\text{cíclica}}(x^2-yz)\ge 0.\end{aligned}$$

5.12 Sean $p=(a+b+c)/2$, $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$ (note que $x,y,z>0$ por la desigualdad triangular). Entonces $a=y+z$, $b=z+x$ y $c=x+y$ y la desigualdad propuesta se convierte en

$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\le\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}.$$

Pero

$$\begin{aligned}\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} &= \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2}+\frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2}+\frac{\sqrt{2z}+\sqrt{2x}}{2}\\ &\le \sqrt{\frac{2x+2y}{2}}+\sqrt{\frac{2y+2z}{2}}\le\sqrt{\frac{2z+2x}{2}} \qquad \text{(por AC)}\\ &= \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}.\end{aligned}$$

5.13 Este problema admite varias soluciones, pero veremos que se puede resolver con los recursos más elementales. Si el triángulo fuese equilátero entonces su altura sería $a\sqrt{3}/2$ y su área $a^2\sqrt{3}/4$, por lo tanto se cumpliría la igualdad. Para un triángulo cualquiera supongamos que a sea el lado mayor y sea P el pie de la altura trazada desde el vértice A. Sea $x = BP - a/2$ (por lo tanto $BP = a/2 + x$ y $PC = a/2 - x$). Sea $y = h_a - a\sqrt{3}/2$ (de donde $h_a = y + a\sqrt{3}/2$). La idea para introducir x e y es que estas cantidades representan la desviación del triángulo respecto a uno equilátero. Entonces, por el Teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos ABP y APC se tiene

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2-4\Delta\sqrt{3} &= a^2+(\frac{a}{2}+x)^2+(\frac{a}{2}-x)^2+2h_a^2-2a\sqrt{3}h_a \\
&= \frac{3}{2}a^2+2x^2+2h_a(h_a-a\sqrt{3}) \\
&= \frac{3}{2}a^2+2x^2+2(a\sqrt{3}/2+y)(-a\sqrt{3}/2+y) \\
&= \frac{3}{2}a^2+2x^2+2y^2-\frac{3}{2}a^2 = 2(x^2+y^2) \geq 0.
\end{aligned}$$

Esto prueba la desigualdad y de paso muestra que hay igualdad si y sólo si $x = y = 0$, lo que equivale a que el triángulo sea equilátero.

Capítulo 6

6.1 La respuesta correcta es la (E). Sustituyendo x por $2010/x$ en

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$$

resulta

$$2f\left(\frac{2010}{x}\right) + 3f(x) = 5\frac{2010}{x}.$$

Multiplicando la primera igualdad por 2 y la segunda por 3, y restando miembro a miembro la primera de la segunda, resulta

$$5f(x) = 15\frac{2010}{x} - 10x,$$

de donde

$$f(x) = \frac{6030}{x} - 2x$$

y en particular $f(6) = 6030/6 - 2 \cdot 6 = 1005 - 12 = 993$.

6.2 Sustituyendo x por $1/x$ queda

$$f(\frac{1}{x}) + 2f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Multiplicando esta igualdad por 2 y restándole

$$f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x^3$$

queda

$$3f(x) = \frac{2}{x^3} - x^3,$$

de donde $f(x) = (2/x^3 - x^3)/3$.

6.3 Sea $h(x) = (1+x)(1-x)$. Entonces $h^2(x) = -1/x$, $h^3(x) = (x-1)(x+1)$ y $h^4(x) = x$. Si I denota la función identidad ($I(x) = x$) entonces la ecuación propuesta se puede escribir como

$$fh + fh^2 + fh^3 = I$$

(donde fh denota composición, no producto) y componiendo a la derecha con h se obtiene sucesivamente

$$\begin{aligned} fh^2 + fh^3 + f &= h, \\ fh^3 + f + fh &= h^2, \\ f + fh + fh^2 &= h^3. \end{aligned}$$

Sumando estas tres identidades funcionales y restando el doble de la primera, se obtiene $3f = h + h^2 + h^3 - 2I$, o bien

$$f(x) = -\frac{2x^4 + 3x^2 - 1}{3x^3 - 3x}.$$

6.4 Poniendo $x = y = 0$ se ve que debe ser $f(0) = 0$. Poniendo $y = -x$ resulta $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ y por lo tanto $f(-x) = -f(x)$. Podemos entonces restringirnos a considerar los $x > 0$. Sea $a = f(1)$. A partir de $f(x+y) = f(x)+f(y)$ se prueba fácilmente por inducción que

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$

En particular $f(n) = nf(1) = na$ para todo n natural. Análogamente $f(n) = f(m(n/m)) = m(f(n/m))$, de donde $f(n/m) = f(n)/m = a(n/m)$.

6.5 $f(1,n) = f(0, f(1, n-1)) = 1 + f(1, n-1)$. De aquí se deduce que $f(1,n) = n + f(1,0) = n + f(0,1) = n+2$. Ahora $f(2,n) = f(1, f(2, n-1)) = f(2, n-1) + 2$, de donde $f(2,n) = 2n + f(2,0) = 2n + f(1,1) = 2n+3$. Análogamente $f(3,n) = f(2, f(3, n-1)) = 2f(3, n-1) + 3$. Sea $u_n = f(3,n) + 3$. Entonces $u_n = 2u_{n-1}$ y $u_0 = f(3,0) + 3 = f(2,1) + 3 = 8$. Por lo tanto $u_n = 2^{n+3}$ y $f(3,n) = 2^{n+3} - 3$. Ahora

$f(4,n) = f(3, f(4, n-1)) = 2^{f(4,n-1)+3} - 3,$

$$f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3 = 13,$$

$$f(4,1) = 2^{2^4} - 3 = 2^{2^{2^2}}, \quad f(4,2) = 2^{2^{2^{2^2}}} - 3, \ldots$$

En general, $f(4,n)$ es una torre de $n+3$ doses menos 3.

6.6 Probemos primero que $f(0) = 0$. Poniendo $x = y = 0$ y $f(0) = t$ queda $f(t) = t^2$. Además $f(x^2+t) = f(x)^2$ y $f(f(x)) = x+t^2$. Ahora evaluemos $f(t^2+f(1)^2)$ de dos maneras. Primero, $f(f(1)^2+f(t)) = t+f(f(1))^2 = t+(1+t^2)^2 = 1+t+2t^2+t^4$. Segundo $f(t^2+f(1+t)) = 1+t+f(t)^2 = 1+t+t^4$. Por lo tanto $f(0) = t = 0$.

Se deduce que $f(f(x)) = x$ y $f(x^2) = f(x)^2$. Dado cualquier y sea $z = f(y)$. Entonces $y = f(z)$, de modo que $f(x^2+y) = z + f(x)^2 = f(y) + f(x)^2$. Ahora, para cualquier x positivo, tomemos z tal que $x = z^2$. Entonces $f(x+y) = f(z^2 + y) = f(y) + f(z)^2 = f(y) + f(z^2) = f(x) + f(y)$. Poniendo $y = -x$ tenemos $0 = f(0) = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$. Por lo tanto $f(-x) = -f(x)$. Entonces $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(x-y) = f(x) - f(y)$ para todo x, y.

Tomemos ahora un x arbitrario y sea $y = f(x)$. Si $y > x$ entonces sea $z = y-x$. Se tiene $f(z) = f(y-x) = f(y) - f(x) = x - y = -z$. Si $y < x$, entonces sea $z = x - y$. Se tiene $f(z) = f(x-y) = f(x) - f(y) = y - x$. En cualquier caso se consigue un $z > 0$ con $f(z) = -z < 0$. Pero entonces, tomando w tal que $w^2 = z$, se tiene $f(z) = f(w^2) = f(w)^2 \geq 0$, absurdo. Por lo tanto debe ser $f(x) = x$.

6.7 Sea $c = f(0)$ y $A = f(\mathbb{R})$. Poniendo $x = f(y)$ resulta $f(0) = f(x)+x^2+f(x)-1$, por lo tanto

$$f(x) = (1+c)/2 - x^2/2 \qquad \text{si} \;\; x \in A \tag{7.1}$$

Poniendo $y = 0$ resulta

$$f(x-c) = f(c) + xc + f(x) - 1. \tag{7.2}$$

De aquí se sigue que $c \neq 0$, ya que si fuese $c = 0$ entonces poniendo $x = 0$ resultaría $c = 1$, absurdo. Al ser $c \neq 0$ resulta que $f(x-c) - f(x) = xc + f(c) - 1$ toma todos los valores reales al variar x, y en particular cualquier $x \in \mathbb{R}$ puede escribirse en la forma $x = a - b$, para ciertos $a, b \in A$. por lo tanto $f(x) = f(a-b) = f(b) + ab + f(a) - 1$ y usando (7.1) resulta

$$f(x) = c - b^2/2 + ab - a^2/2 = c - x^2/2.$$

En particular, si $x \in A$ y se compara con (7.1) se deduce que $c = 1$. Por lo tanto, la única solución posible es $f(x) = 1 - x^2/2$, y verificando en la ecuación original se comprueba que efectivamente es solución.

6.8 Supongamos primero que $\lfloor f(y) \rfloor = 0$ para algún y. Entonces haciendo $x = 1$ en $f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$ nos queda $f(y) = f(1)\lfloor f(y) \rfloor = 0$. Por lo tanto si para todo y, $\lfloor f(y) \rfloor = 0$, entonces $f(y) = 0$ para todo y. Además un simple cálculo demuestra que la función nula $f(x) = 0$ para todo x, satisface las condiciones del problema.

Supongamos ahora que exista un número real a tal que $\lfloor f(a) \rfloor \neq 0$. En este caso

$$f(x\lfloor a \rfloor) = f(x)\lfloor f(a) \rfloor,$$

o bien

$$f(x) = \frac{f(x\lfloor a \rfloor)}{\lfloor f(a) \rfloor}.$$

En consecuencia, si $\lfloor x_1 \rfloor = \lfloor x_2 \rfloor$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$. Por lo tanto $f(x) = f(\lfloor x \rfloor)$ para todo x, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que a es un número entero. Ahora tenemos:

$$f(a) = f(2a.\frac{1}{2}) = f(2a)\lfloor f(\frac{1}{2}) \rfloor = f(2a)\lfloor f(0) \rfloor,$$

y por lo tanto $\lfloor f(0) \rfloor \neq 0$. Esto nos permite suponer que $a = 0$ y entonces la ecuación $f(x) = \frac{f(x\lfloor a \rfloor)}{\lfloor f(a) \rfloor}$ nos da:

$$f(x) = \frac{f(0)}{\lfloor f(0) \rfloor} = C \neq 0$$

para todo x. Pero por la ecuación que satisface la función f tenemos que $C = C\lfloor C \rfloor$, y entonces $\lfloor C \rfloor = 1$, es decir $1 \leq C < 2$.

Un simple cáculo muestra que la función $f(x) = C$ con $1 \leq C < 2$, para todo x, satisface las condiciones del problema. Por lo tanto las soluciones son $f(x) = C$ para todo x, con $C = 0$ o $1 \leq C < 2$.

Identificación de algunas competencias matemáticas mencionadas en esta obra.

AIME Examen Invitacional de Matemática (USA)

Canguro Canguro Matemático

CMO Olimpiada Matemática del Canada

IMO Olimpiada Internacional de Matemática

OBM Olimpiada Brasilera de Matemática

OIM Olimpiada Iberoamericana de Matemática

OJM Olimpiada Juvenil de Matemáticas (Venezuela)

OM Olimpiada de Mayo

OMA Olimpiada Matemática Argentina

OMCC Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

ORP Olimpíada Rioplatense

TT Torneo de las Ciudades

Bibliografía

[1] Andreescu, T., Andrica, D., *Complex numbers from A to Z*, Birkhauser, Boston, 2006.

[2] Bulajich, R., Gómez, J. A., Valdez, R., *Algebra*, UNAM, México DF, 2014.

[3] Bulajich, R., Gómez, J. A., Valdez, R., *Desigualdades*, UNAM, México DF, 2007.

[4] Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.

[5] Halmos, P. R., *The Heart of Mathematics*, American Mathematical Monthly, **87**(7), 1980, 519–524.

[6] Hahn, Liang-shin, *Complex numbers and geometry*, MAA, 1994.

[7] Nieto, J. H., *Teoría de Números para Olimpiadas Matemáticas*, Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, 2015. Hay versión electrónica en `http://www.acm.ciens.ucv.ve/material.php`

[8] Nieto, J. H., *Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas*, Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, 2014. Hay versión electrónica en `http://www.acm.ciens.ucv.ve`

[9] Nieto, J. H., Sánchez, R., Ordaz, E., Taylor, S., Vielma, L., *Olimpiada Juvenil de Matemática 2013*, Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Caracas, 2014. Hay versión electrónica en `http://www.acm.ciens.ucv.ve`

[10] Nieto, J. H., Sánchez, R., Vielma, L., *Olimpiada Juvenil de Matemática 2012*, Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Caracas, 2013. Hay versión electrónica en `http://www.acm.ciens.ucv.ve`

[11] Nieto, J. H., Sánchez, R., Vielma, L., *Olimpiada Juvenil de Matemática 2011*, Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Caracas, 2012. Hay versión electrónica en `http://www.acm.ciens.ucv.ve`

[12] Nieto, J. H., Sánchez, R., Vielma, L., *Olimpiada Juvenil de Matemática 2010*, Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Caracas, 2011. Hay versión electrónica en `http://www.acm.ciens.ucv.ve`

[13] Martínez, H., Nieto, J. H., Sánchez L., R., Sarabia, E., Vielma, L., *Olimpiada Juvenil de Matemática 2009*, Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Caracas, 2010. Hay versión electrónica en `http://www.acm.ciens.ucv.ve`

Índice alfabético

acotado, 15
antisimetría, 5
argumento, 18

base, 5
binario, 5

cambio de variable, 38
cociente, 7
coeficiente, 24
completar cuadrados, 37
conjugado, 18
cota
    inferior, 15
    superior, 15

denominador, 8
densidad, 11
desigualdad
    aritmético-geométrica, 52
    de Cauchy-Schwarz, 53
        forma de Engel, 53
    de Chebyshev, 54
    de Hölder, 64
    de Jensen, 57
    de Minkowski, 64
    de Muirhead, 59
    de Nesbitt, 63
    de Schur, 61
    de Young, 58
    del reordenamiento, 54
    geométrica, 62
    homogénea, 58
    triangular, 52
discriminante, 37
división entera, 6

ecuación, 36
    funcional, 66
ejercicio, 1

fórmulas
    de Vieta, 30
Fibonacci, 44
forma
    binómica, 18
    polar, 19
    trigonométrica, 19
fracción, 8
    decimal, 10
    reducida, 9
función
    cóncava, 56
    convexa, 56
    homogénea, 58

Germain, Sophie, 27
grado, 24

Halmos, P. R., 1
hexadecimal, 5
homogeneización, 61

identidad
    de polinomios, 25, 29
    de Sophie Germain, 27
incógnita, 36
ínfimo, 15

lema de Titu, 53
Leonardo de Pisa, 44

máximo, 15
módulo, 18
mónico, 28
mínimo, 15
media
  aritmética, 50, 52, 53
  armónica, 63
  cuadrática, 53, 63
  geométrica, 50, 52
monomio, 24
monotonía, 5
multiplicidad, 29

normalización, 59
numerador, 8
número
  complejo, 16
  entero, 6
  imaginario puro, 16
  impar, 6
  irracional, 13
  natural, 3
  par, 6
  racional, 8
  real, 12
números
  de Fibonacci, 45

olimpiadas matemáticas, 1

parte
  entera, 15
  fraccionaria, 15
  imaginaria, 16
  real, 16
período, 10
permutación, 59
piso, 15
polinomio, 24
  simétrico, 31
potencia, 4
Principio
  del ínfimo, 16
  del supremo, 16
problema, 1
producto, 4
  notable, 26
progresión, 41
  aritmética, 41
  geométrica, 43
propiedad
  asociativa, 3
  conmutativa, 4
  distributiva, 4

raíz, 29
recurrencia, 43
resto, 7
Ruffini, P., 28

signo, 6
sistema, 39
sucesión, 41
suma, 3
  cíclica, 61
  simétrica, 59
supremo, 15

teorema
  de identidad de polinomios, 29
  del binomio, 26
  fundamental del álgebra, 29
transitividad, 4
tricotomía, 5

unidad imaginaria, 17

valor absoluto, 6
Vieta, F., 30