Ejercicios 1 – Yendo en círculos

La mayoría de estos probemas fueron tomados de: http://nrich.maths.org/308 , http://nrich.maths.org/6651 y http://nrich.maths.org/content/id/6651/Going%20Round%20In%20Circles.pdf.

Carlos dijo: "Hoy es domingo, entonces será domingo de nuevo en 7 días…
y en y en 770 días...
y en 140 días...
y en 35035 días...
y en 14000000007 días."

Isabel dijo: "y sera martes en 2 días…
y en 72 días...
y en 702 días...
y en 779 días...
y en 14777002 días."

1) ¿Estás de acuerdo con todo lo que dijeron Carlos e Isabel?

2) Carlos e Isabel escogieron números con los que era fácil trabajar. ¿Puedes ver por qué los eligieron?

3) Si hoy es domingo ¿qué día será en 15 días? ¿y en 26 días? ¿y en 234 días? ¿y en 1000 días?

4) Si tu cumpleaños este año fue un domingo, ¿en qué día de la semana será tu cumpleaños el próximo año?

5) Si actualmente fuera otoño, ¿qué estación sería en 100 estaciones?

6) Si ahora es las 9 am, ¿qué hora será en 50 horas?

7) Supongamos que estamos en noviembre, ¿qué mes será en 1,000 meses?

Ejercicios 2
Restos y congruencias

En lugar de 13 = 1, en aritmética modular escribimos $13 \equiv 1 \pmod{12}$ lo cual se lee "13 es congruente con 1 módulo 12" o, abreviando, "13 es 1 módulo 12".

Ejemplos: $12 \equiv 0 \pmod{12}$ $17 \equiv 5 \pmod{12}$
$37 \equiv 1 \pmod{12}$ $-1 \equiv 11 \pmod{12}$

En general, $a \equiv b \pmod{n}$ si a-b es un múltiplo de n.

Equivalentemente, $a \equiv b \pmod{n}$ si a y b tiene el mismo resto al dividirlos entre n (resto módulo n).

En general, cuando trabajamos módulo n reemplazamos los números por sus restos módulo n: 0, 1, 2,…, n-1.

1) Encuentra los restos módulo 3 de:

   a) 31

   b) 44

2) Encuentra los restos módulo 2 de:

   a) 34 – 15

   b) 141 – 78

3) Encuentra los restos módulo 12 de:

   a) 31 + 28 + 31 + 30

   b) 38 x 4 + 360

4) ¿Cuáles de las siguientes congruencias son verdaderas?

a) $177 \equiv 17 \pmod 2$

b) $1322 \equiv 5294 \pmod{12}$

Ejercicios 3
Tablas de sumar y multiplicar

Recuerden que cuando trabajamos módulo n reemplazamos los números por sus restos módulo n: 0, 1, 2,…, n-1. Por ejemplo, en las tablas módulo 4 no pueden tener el número 4.

Tabla de sumar módulo 4

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

Tabla de multiplicar módulo 4

x	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

Necesitarán esta tabla más adelante.

Tabla de sumar módulo 7

+	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Tabla de multiplicar módulo 7

x	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Las siguientes tablas son opcionales.

Tabla de sumar módulo 5

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Tabla de multiplicar módulo 5

x	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Las siguientes tablas son opcionales.

Tabla de sumar módulo 6

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Tabla de multiplicar módulo 6

x	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Ejercicios 4
Divisibilidad

Algunas preguntas son tomadas o basadas en las de los Desafíos matemáticos (Mathematical Challenges) del Reino Unido organizadas por United Kingdom Mathematics Trust (UKMT).

Recuerden:

- N es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.
- N es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.
- N es divisible entre 11 si y sólo si la suma alternada de sus dígitos es divisible entre 11.

1) ¿Cuál de los siguientes números no es un múltiplo de 3?

   A 87 B 765 C 6543 D 43210

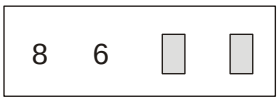
2) El número 1d3456 es un múltiplo de 9. ¿Cuál dígito es d?

3) El número 1234d6 es un múltiplo de 11. ¿Cuál dígito es d?

Las siguientes preguntas son opcionales.

4) El primer y el cuarto dígito del número d63d2 son iguales y dicho número es un múltiplo de 9. ¿Cuál dígito es d?

5) Un número de cuatro dígitos es escrito en un papel. Los dos últimos dígitos son ocultados (como se muestra). Si el número completo es divisible entre 3, 4 y 5 ¿cuál es la suma de los dígitos ocultos?



Las siguientes preguntas son opcionales y difíciles.

6) En base a la siguiente tabla de restos de las potencias de 10:

mod	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1
7	4	6	2	3	1	5	4	6	2	3	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
12	4	4	4	4	4	4	4	4	4	10	1

a) ¿Podrías explicar por qué mirar el último dígito es suficiente para los criterios de divisibilidad entre 2, 5 and 10?

b) ¿Podrías dar una regla para encontrar los restos módulo 4?

c) ¿Podrías dar una regla para encontrar los restos módulo 6?

7) De la igualdad 1,001=7x11x13 podemos concluir que:

$1{,}000 \equiv -1 \pmod 7$
$1{,}000 \equiv -1 \pmod{11}$
$1{,}000 \equiv -1 \pmod{13}$

Por lo tanto tenemos la siguiente tabla de restos para las potencias de 1,000:

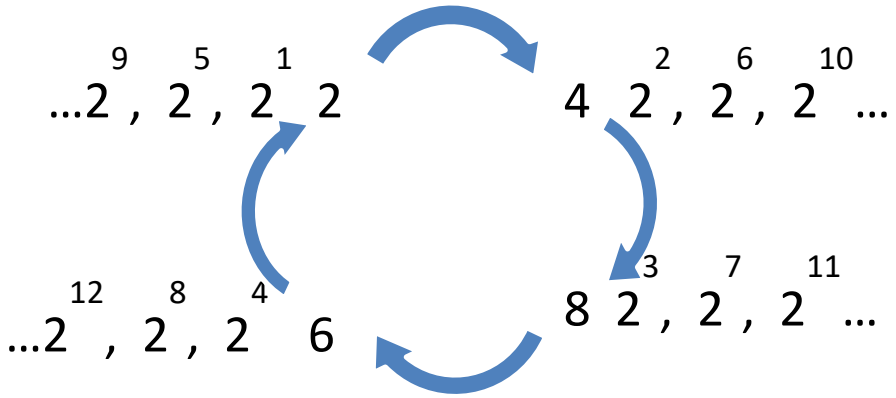
mod	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{0}
7	-1	1	-1	1	-1	1
11	-1	1	-1	1	-1	1
13	-1	1	-1	1	-1	1

En base a esta tabla ¿podrías dar criterios de divisibilidad entre 7, 11 and 13 para números mayores que 1,000?

Ejercicios 5
Potencias

En esta sección no está permitido usar calculadoras.

Ejemplo:



1) Dado que la tabla de multiplicar módulo 10 es:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

¿Cuáles de los siguientes números son cuadrados de números naturales?

a) 6312
b) 4553
c) 9538

2) ¿Cuál es el último dígito de los siguientes números?

a) 12345^3

b) 250^{13}

c) 4^{51}

3) ¿Cuál es el último dígito de los siguientes números?

a) 9^{57}

b) 9^{72}

c) 32^{10}

d) 23^{60}

4) ¿Cuál es el el resto al dividir…

   a) …10^{80} entre 9?

   b) …6^{9770} entre 5?

   c) …5^{84320} entre 4?

   d) …4931^{84} entre 4930?

Las siguientes preguntas son opcionales.

5) ¿Cuál es el el resto al dividir 5^{1001} entre 6? Pista: $5 \equiv -1 \pmod 6$.

6) ¿Cuál es el el resto al dividir $2^{120359812348080931463727896861293867 49}$ entre 3?

7) Inventa un problema del tipo "¿Cuál es el el resto al dividir a^b entre c?" donde b es un número grande.

Ejercicios 6
Día de la semana

Códigos de los meses

Mes	Número
Enero	6
Febrero	2
Marzo	2
Abril	5
Mayo	0
Junio	3
Julio	5
Agosto	1
Septiembre	4
Octubre	6
Noviembre	2
Diciembre	4

Una manera de memorizar esto es memorizar el siguiente "número de teléfono": 622-503-514-624. Otra manera es memorizar esta tabla:

6	1	Ene	2	2	Feb	2	3	Mar
5	4	Abr	0	5	May	3	6	Jun
5	7	Jul	1	8	Ago	4	9	Sep
6	10	Oct	2	11	Nov	4	12	Dic

Excepción: en un año bisiesto el código de Enero es 5 y el código de Febrero es 1 (ambos son uno menos que en los años no bisiestos).

Años bisiestos:

Necesitamos recordar que los años bisiestos son (usualmente) los años que son múltiplos de 4. Esto debería ser suficiente la gran mayoría de las veces. Podría ayudarnos recordar que los Juegos Olímpicos ocurren en años bisiestos.

Los años no bisiestos que son múltiplos de 4 son los años que son múltiplos de 100 y no son múltiplos de 400. Ejemplos:
1600 bisiesto, 1700 no bisiesto, 1800 no bisiesto, 1900 no bisiesto
2000 bisiesto, 2100 no bisiesto, 2200 no bisiesto, 2300 no bisiesto
2400 bisiesto

Códigos de los años

Necesitamos recordar los años que tienen código 0 (pueden cambiar los eventos históricos con eventos familiares):

Años del siglo XX con código 0:

1911, 22, 33, 44 (primeros cuatro múltiplos de 11)
1916 16 = 4^2
1939 Inicio de la Segunda Guerra Mundial
1950 Maracanazo (Mundial Brasil '50)
1961 Construcción del muro de Berlín
1967 Primer transplante de corazón
1972 Juegos Olímpicos Munich '72
1978 Mundial Argentina '78
1989 Caída del muro de Berlín
1995 Comienzo del boom de internet (Nestscape)

Algunos años del siglo XXI con código 0:
2000, 2006, 2017, 2023

Códigos de los días de la semana

Lunes	1
Martes	2
Miércoles	3
Jueves	4
Viernes	5
Sábado	6
Domingo	0 or 7

Necesitamos usar la tabla de multiplicación módulo 7:

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Recuerden:
Código del día de la semana = código año + código mes + día (mod 7)

Ejemplo

Preguntas: ¿En qué año naciste?
Respuesta: 1992

¿Cómo encontrar el código de 1992?
Recordamos que 1989, el año en que cayó el muro de Berlín, tiene código 0.
Código de 1992 ≡ 92-89 + Número de años bisiestos en 1990-1992 (mod 7)
Código de 1992 ≡ 3 + 1 (mod 7) (solamente 1992 fue bisiesto en 1990-1992)
Código de 1992 = 4

Preguntas: ¿En qué mes naciste?
Respuesta: Diciembre

Recordamos que 2344 son los códigos de Mar-Jun-Sep-Dic (la última columna de la tabla 6556-2012-2344)
Código de diciembre = 4
Sumamos los código de 1992 y de diciembre: 4+4=8 y como 8 ≡ 1 (mod 7) sólo hace falta recordar 1 ("llevamos 1").

Preguntas: ¿En qué día naciste?
Respuesta: 25

Calculamos 1+25=26 y 26 ≡ 5 (mod 7) lo cual significa viernes.

Referencias:

-Arthur Benjamin and Michael Shermer, Secrets of Mental Math.
-http://plus.maths.org/content/what-day-week-were-you-born .
-Un método similar aparece en http://gmmentalgym.blogspot.com/2011/03/day-of-week-for-any-date-revised.html

1) ¿Cuáles son los días de la semana de las siguientes fechas?

   a) 23/Abr/1999

   b) 14/May/1989

   c) 1/Ene/1999

   d) 1/Ene/2000

   e) 3/Feb/1999

   f) 3/Feb/2000

Agradecimientos
y más cosas para mirar

Pueden leer acerca de las “masterclasses” de la “Royal Institution of Great Britain” en http://www.rigb.org/education/masterclasses.

Quiero agradecer a Samantha Durbin y Diane Crann de la “Royal Institution of Great Britain” por todas sus sugerencias que me permitieron mejorar esta presentación. También quiero agradecer a mi amigo Iván Rodríguez por darme la oportunidad de dar esta clase.

También quiero agradecer a Jim Bumgardner por proveerme el vídeo “60 puntos yendo en círculos”. En su página web http://whitneymusicbox.org pueden ver otros vídeos similares. Una descripción de su Caja de Música Whitney está en http://krazydad.com/pubs/whitney_paper.pdf. Los vídeos se basan en la idea visual de “desplazamiento incremental” (“incremental drift”) de John Whitney. Otros vídeos relacionados son:

-Desplazamiento incremental en la Esfera de Riemann: http://vimeo.com/2063601
-“TransTower” incremental: http://vimeo.com/channels/kineticartprojects/20824416

Finalmente quiero agradecer a Charlie Gilderdale y Alison Kiddle de NRICH por su ayuda y en general a NRICH por las actividades en su página web. Aquí está una lista de actividades de NRICH relacionadas con la aritmética modular:

-Shifting Times Tables: http://nrich.maths.org/6713
-Days and Dates: http://nrich.maths.org/308
-Going Round in Circles: http://nrich.maths.org/6651
-GOT IT: http://nrich.maths.org/1272
-What Numbers Can We Make? http://nrich.maths.org/7405
-What Numbers Can We Make Now? http://nrich.maths.org/8280
-Remainders: http://nrich.maths.org/1783
-A Little Light Thinking: http://nrich.maths.org/7016
-The Remainders Game: http://nrich.maths.org/6402
-Charlie's Delightful Machine: http://nrich.maths.org/7024

Si quieren aprender aún más acerca de aritmética modular pueden ver en YouTube los vídeos de aritmética modular de “TheMathsters”.

Pueden enviarme cualquier pregunta o comentario a gustavolau@gmail.com

Gracias,
Gustavo Lau

Respuestas

Ejercicios 1 – Yendo en círculos

Carlos dijo: "Hoy es domingo, entonces será domingo de nuevo en 7 días…
y en y en 770 días...
y en 140 días...
y en 35035 días...
y en 14000000007 días."

Isabel dijo: "y sera martes en 2 días…
y en 72 días...
y en 702 días...
y en 779 días...
y en 14777002 días."

1) ¿Estás de acuerdo con todo lo que dijeron Carlos e Isabel?
   Sí.

2) Carlos e Isabel escogieron números con los que era fácil trabajar. ¿Puedes ver por qué los eligieron?
   Los números de Carlos son múltiplos de 7.
   Los de Isabel son (múltiplos of 7) + 2.

3) Si hoy es domingo ¿qué día será en 15 días? ¿y en 26 días? ¿y en 234 días? ¿y en 1000 días?
   Necesitamos encontrar los restos de 15, 26, 234 y 1000 al dividirlos entre 7.
   Como no necesitamos el cociente no necesitamos realizar la división.
   Podemos encontrar los restos de esta manera:
   En 15=14+1 días será lunes.
   En 26=21+5 días será viernes.
   En 234=210+21+3 días será miércoles.
   En 1000=700+280+14+6 days días será sabado.

4) Si tu cumpleaños este año fue un domingo, ¿en qué día de la semana será tu cumpleaños el próximo año?
   Si los próximos 365 días no incluyen 29/Febrero será lunes.
   Si los próximos 365 días incluyen 29/Febrero será martes.
   Si tu cumpleaños es 29/Febrero…?

5) Si actualmente fuera otoño, ¿qué estación sería en 100 estaciones?
   Otoño pues 100 es un múltiplo of 4.

6) Si ahora es las 9 am, ¿qué hora será en 50 horas?
   11 am pues 50 es un (múltiplo of 12) + 2.

7) Supongamos que estamos en noviembre, ¿qué mes será en 1,000 meses?
Necesitamos encontrar el resto de 1,000 al dividirlo entre 12. Nuevamente como no necesitamos el cociente no necesitamos realizar la división. Podemos encontrar el resto de esta manera:
1000 = 600 + 400 = 600 + 360 + 40 = 600 + 360 + 36 + 4
Por lo tanto el resto es 4. Noviembre + 4 meses es marzo, por tanto la respuesta es marzo.

Ejercicios 2 - Restos y congruencias

1) Encuentra los restos módulo 3 de:

   a) 31
      31= 30 + 1
      1 pues 31 es (múltiplo of 3) + 1

   b) 44
      44 = 30 + 12 + 2
      2 pues 44 es (múltiplo of 3) + 2

2) Encuentra los restos módulo 2 de:

   a) 34 – 15
      mod 2: 0 – 1 = 1

   b) 141 – 78
      mod 2: 1 – 0 = 1

3) Encuentra los restos módulo 12 de:

   a) 31 + 28 + 31 + 30
      mod 12: 7 + 4 + 7 + 6 = 24 = 0

   b) 38 x 4 + 360
      mod 12: 2 x 4 + 0 = 8

4) ¿Cuáles de las siguientes congruencias son verdaderas?

   a) $177 \equiv 17 \pmod 2$
      Sí, porque cuyo reemplazamos los números por sus restos módulo 2: $1 \equiv 1 \pmod 2$
      Otra manera: 177 – 17 = 160 es par, luego $177 \equiv 17 \pmod 2$

   b) $1322 \equiv 5294 \pmod{12}$
      5294 – 1322 = 3972
      3972 = 3600 + 360 +12
      Dado que $3600 \equiv 360 \equiv 12 \equiv 0 \pmod{12}$ tenemos:
      $3972 \equiv 0 \pmod{12}$
      Por tanto $1322 \equiv 5294 \pmod{12}$

Ejercicios 3 - Tablas de sumar y multiplicar

Tabla de sumar módulo 4

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabla de multiplicar módulo 4

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Tabla de sumar módulo 7

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Tabla de multiplicar módulo 7

x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Tabla de sumar módulo 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Tabla de multiplicar módulo 5

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Tabla de sumar módulo 6

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Tabla de multiplicar módulo 6

x	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Ejercicios 4 - Divisibilidad

1) ¿Cuál de los siguientes números no es un múltiplo de 3?

   A 87 B 765 C 6543 D 43210

   87: 8+7=15 es un múltiplo de 3.

   765: 6 es un múltiplo de 3 entonces lo podemos ignorar, 7+5=12 es un múltiplo de 3.

   6543: Podemos ignorar 6 y 3 ya que son múltiplos de 3, 5+4=9 es un múltiplo de 3.

   43210: Ignoramos 3 y 0, 4+2+1=7 no es un múltiplo de 3.

2) El número 1d3456 es un múltiplo de 9. ¿Cuál dígito es d?

   6+3=9 y 5+4=9, por lo tanto 1+d es un múltiplo de 9, por ello d = 8.

3) El número 1234d6 es un múltiplo de 11. ¿Cuál dígito es d?

   -1 + 2 - 3 + 4 - d + 6 = 8 - d es un múltiplo de 11, por lo tanto d = 8 (recuerden que 0 es un múltiplo de cualquier número entero).

4) El primer y el cuarto dígito del número d63d2 son iguales y dicho número es un múltiplo de 9. ¿Cuál dígito es d?

   6+3=9, por lo tanto d + d + 2 es un múltiplo de 9, por lo tanto d = 8.

5) Un número de cuatro dígitos es escrito en un papel. Los dos últimos dígitos son ocultados (como se muestra). Si el número completo es divisible entre 3, 4 y 5 ¿cuál es la suma de los dígitos ocultos?

   8 6 ▯ ▯

   Dado que el número es múltiplo de 4 y 5 tiene que ser a múltiplo de 20. Por lo tanto termina en 00, 20, 40, 60 or 80. Si llamamos x al tercer dígito entonces tenemos que
   8+6+x+0 = x + 14 tiene que ser un múltiplo de 3.
   De las cinco posibilidades para x (0, 2, 4, 6 y 8) sólo x=4 satisface que (x+14 es un múltiplo de 3). Entonces los dos últimos dígitos son 4 y 0 y su suma es 4.

6) En base a la siguiente tabla de restos de las potencias de 10:

mod	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1
7	4	6	2	3	1	5	4	6	2	3	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
12	4	4	4	4	4	4	4	4	4	10	1

a) ¿Podrías explicar por qué mirar el último dígito es suficiente para los criterios de divisibilidad entre 2, 5 y 10?

Todas las potencias de 10, excepto 10^0, son múltiplos de 2 (son 0 módulo 2). Por lo tanto para todo número natural N:

N ≡ último dígito de N (mod 2)

En particular, N es divisible entre 2 si y sólo si its último dígito es divisible entre 2.

El mismo argumento muestra que N es divisible entre 5 si y sólo si su último dígito es divisible entre 5 (esto es si es 0 o 5) y que N es divisible entre 10 si y sólo si su último dígito es divisible entre 10 (esto es si es 0).

b) ¿Podrías dar una regla para encontrar los restos módulo 4?

Todas las potencias de 10, excepto 10^0 y 10^1, son múltiplos de 4, esto es son 0 módulo 4. 10^1 es 2 módulo 4 y 10^0 es 1 módulo 4. Por lo tanto para todos los números naturales N:

*N ≡ 2*dígito de las decenas de N + último dígito de N (mod 4)*

c) ¿Podrías dar una regla para encontrar los restos módulo 6?

Todas las potencias de 10, excepto 10^0, son 4 módulo 6 mientras que 10^0 es 1 módulo 6. Por lo tanto para todos los números naturales N:

N ≡ 4x(suma de dígitos de N excepto el último) + último dígito de N (mod 6)

Ejemplo: 461 ≡ 4x(4+6)+1 = 41 = 36+5 ≡ 5 (mod 6)

7) De la igualdad 1,001=7x11x13 podemos concluir que:

1,000 ≡ –1 (mod 7)
1,000 ≡ –1 (mod 11)
1,000 ≡ –1 (mod 13)

Por lo tanto tenemos la siguiente tabla de restos para las potencias de 1,000:

mod	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{0}
7	-1	1	-1	1	-1	1
11	-1	1	-1	1	-1	1
13	-1	1	-1	1	-1	1

En base a esta tabla ¿podrías dar criterios de divisibilidad entre 7, 11 y 13 para números mayores que 1,000?

Tomemos cualquier número mayor que 1,000, digamos 3,918,915, entonces tenemos:

$3{,}918{,}915 = 3x10^6 + 918x10^3 + 915$

$\equiv 3 - 918 + 915 \equiv 0 \pmod 7$

En general tenemos:

N ≡ suma alternada de grupos de 3 dígitos de N (mod 7)

donde los grupos tienen que ser tomados empezando por la derecha. En particular, N es divisible entre 7 si y sólo si la suma alternada de sus grupos de 3 dígitos es divisible entre 7. Esto también es verdad módulo 11 y módulo 13.

Más ejemplos:
243,543,348. Dado que 243 – 543 + 348 = 48 tenemos
243,543,348 ≡ 48 ≡ 6 (mod 7)
243,543,348 ≡ 48 ≡ 4 (mod 11)
243,543,348 ≡ 48 ≡ 9 (mod 13)

315,535,220. Dado que 315 – 535 + 220 = 0 concluimos que 315,535,214 es un múltiplo de 7, 11 y 13.

45,032. Dado que -45 +32 =-13 concluimos que
45,032 ≡ -6 ≡ 1 (mod 7)
45,032 ≡ -2 ≡ 9 (mod 11)
45,032 ≡ 0 (mod 13)

Ejercicios 5 - Potencias

1) Dado que la tabla de multiplicar módulo 10 es:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

¿Cuáles de los siguientes números son cuadrados de números naturales?

a) 6312
b) 4553
c) 9538

Ninguno. Los números cuadrados sólo pueden tener 0, 1, 4, 5, 6 o 9 como último dígito (los números en la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha).

2) ¿Cuál es el último dígito de los siguientes números?

a. 12345^3*: 5*

b. 250^{13}*: 0*

c. 4^{51}*: 4 (51 es impar, sería 6 para una potencia par)*

3) ¿Cuál es el último dígito de los siguientes números?

a) 9^{57}
9 (57 es impar)

b) 9^{72}
1 (72 es par)

c) 32^{10}

Es suficiente mirar el último dígito de 32: 2.
Para n>0, el último dígito de 2^n es:

2 si n es (múltiplo de 4) + 1
4 si n es (múltiplo de 4) + 2
8 si n es (múltiplo de 4) + 3
6 si n es múltiplo de 4

10 es un (múltiplo de 4) + 2, por lo tanto la respuesta es 4.

d) 23^{60}

Basta mirar el último dígito de 23: 3.
For n>0, the último dígito de 3^n es:

3 si n es (múltiplo de 4) + 1
9 si n es (múltiplo de 4) + 2
7 si n es (múltiplo de 4) + 3
1 si n es múltiplo de 4

60 es un múltiplo de 4, por lo tanto la respuesta es 1.

4) ¿Cuál es el el resto al dividir…

d. …10^{80} entre 9?

1 ya que $10 \equiv 1 \pmod 9$

c) …6^{9770} entre 5?

1 pues $6 \equiv 1 \pmod 5$

d) …5^{84320} entre 4?

1 ya que $5 \equiv 1 \pmod 4$

e) …4931^{84} entre 4930?

1 pues $4931 \equiv 1 \pmod{4930}$

5) ¿Cuál es el el resto al dividir 5^{1001} entre 6? Pista: $5 \equiv -1 \pmod 6$.

Dado que $5 \equiv -1 \pmod 6$ tenemos que

$5^n \equiv 1 \pmod 6$ si n es par
$5^n \equiv -1 \equiv 5 \pmod 6$ si n es impar

1001 es impar, por tanto $5^{1001} \equiv 5 \pmod 6$ y el resto al dividir 5^{1001} entre 6 es 5.

6) ¿Cuál es el el resto al dividir $2^{120359812348080931463727896861293867 49}$ entre 3?

Dado que $2 \equiv -1 \pmod 3$ tenemos que

$2^n \equiv 1 \pmod 3$ si n es par
$2^n \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$ si n es impar

El exponente 120359812348080931463727896861293867 49 es impar, por lo tanto $2^{120359812348080931463727896861293867 49} \equiv 2 \pmod 3$, por lo tanto el resto al dividir $2^{120359812348080931463727896861293867 49}$ entre 3 es 2.

Ejercicios 6 - Día de la semana

1) ¿Cuáles son los días de la semana de las siguientes fechas?

   a. 23/Abr/1999

      Recordamos que 1995 tiene código 0.
      Código de 1999 ≡ 99-95 + número de bisiestos en 1996-1999 (mod 7)
      Código de 1999 ≡ 4 + 1 (mod 7) (sólo 1996 fue bisiesto en 1996-1999)
      Código de 1999 = 5

      Abril tiene código 5 y 5+5+23=33 ≡ 5 (mod 7), por tanto 23/Apr/1999 fue un viernes.

   b. 14/May/1989

      Recordamos que 1989 tiene código 0.
      Mayo tiene código 0 y 0+0+14 ≡ 0 (mod 7), por tanto 14/May/1989 fue un domingo.

   c. 1/Ene/1999

      1999 code = 5 (ver el problema a)
      1999 no fue bisiesto, entonces el código de Enero es 6,
      5+6+1=12≡ 5 (mod 7), por tanto 1/Jan/1999 fue un viernes.

   d. 1/Ene/2000

      2000 code = 0
      2000 fue bisiesto, entonces el código de Enero es 5,
      0+5+1=6≡ 5 (mod 7), por tanto 1/Jan/2000 fue un sábado.

   e. 3/Feb/1999

      1999 code = 5 (see a. above)
      1999 no fue bisiesto, entonces el código de Febrero es 2,
      5+2+3=10≡ 3 (mod 7), por tanto 3/Feb/1999 fue un miércoles.

   f. 3/Feb/2000

      2000 code = 0
      2000 fue bisiesto, entonces el código de Febrero es 1,
      0+1+3=4, por tanto 3/Feb/2000 fue un jueves.