Aritmética modular

Gustavo Lau

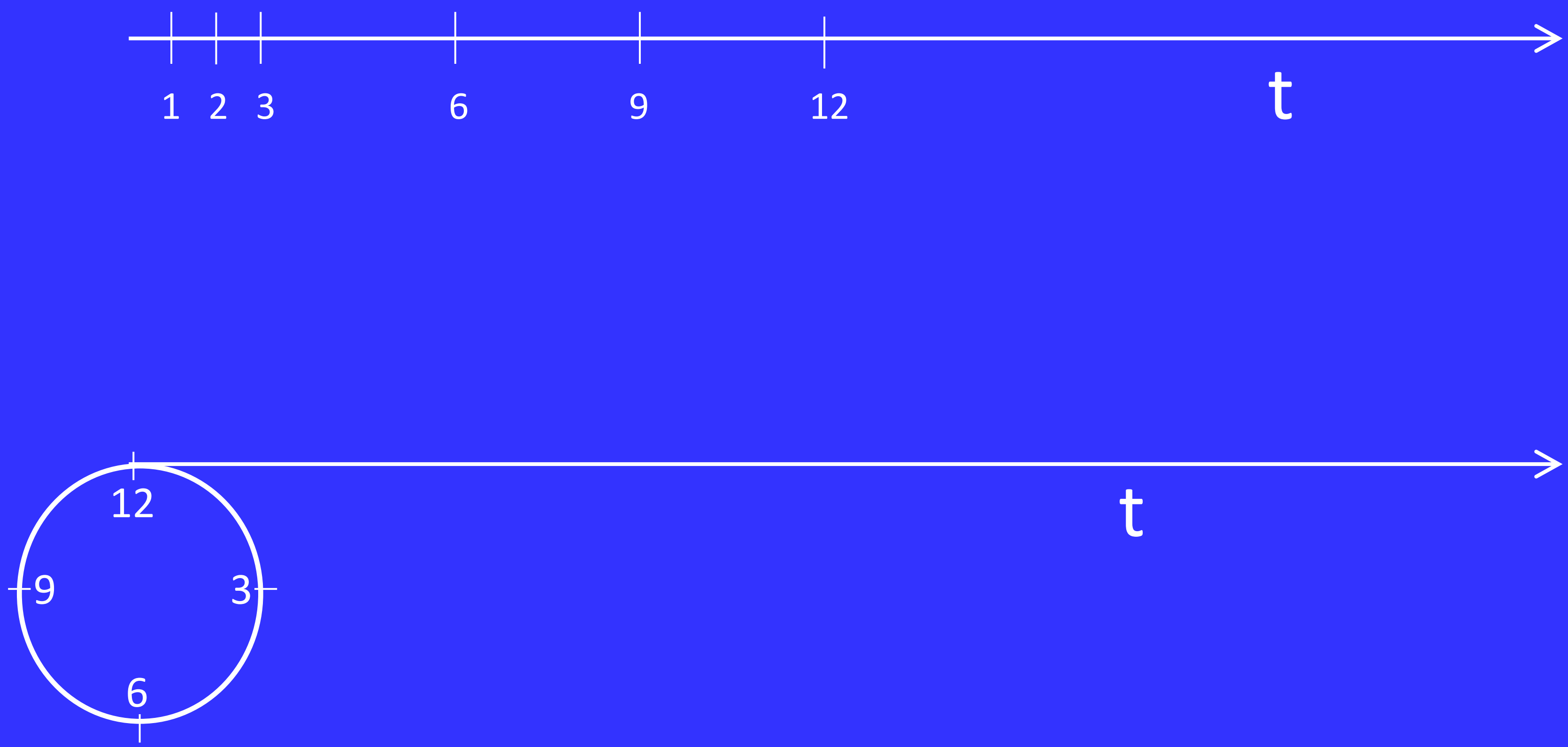
Introducción

¿En qué día naciste?

Ejercicios 1
Yendo en círculos

Módulo 12

¿Cómo representar el tiempo?



Módulo 12

En lugar de 13 = 1, en aritmética modular escribimos 13 ≡ 1 (mod 12) lo cual se lee “13 es congruente con 1 módulo 12” o, abreviando, “13 es 1 módulo 12”.

Ejemplos:	12 ≡ 0 (mod 12)	17 ≡ 5 (mod 12)
	37 ≡ 1 (mod 12)	-1 ≡ 11 (mod 12)

En general, a ≡ b (mod n) si a-b es un múltiplo de n. Equivalentemente, a ≡ b (mod n) si a y b tiene el mismo resto al dividirlos entre n (resto módulo n).

Tabla de sumar del reloj

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Módulo 12

En aritmética modular usamos los números 0-11 en lugar de los números 1-12. La razón es que 0-11 son los restos módulo 12.

En general, cuando trabajamos módulo n reemplazamos los números por sus restos módulo n: 0, 1, 2, ..., n-1.

Tabla de sumar módulo 12

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ejemplos:

$7 + 8 \equiv 3 \pmod{12}$

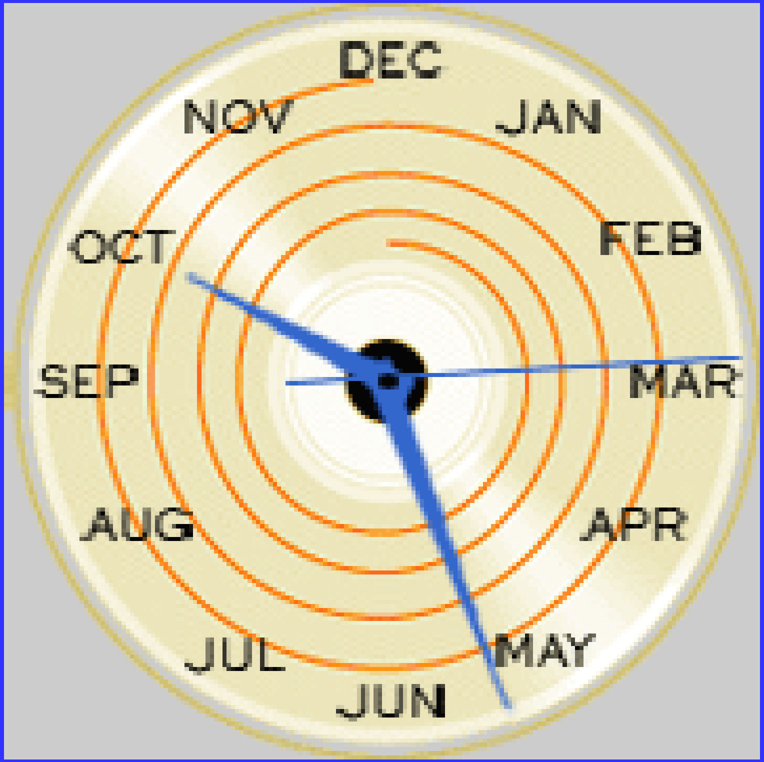
$13 + 2 \equiv 3 \pmod{12}$

$10 + 2 \equiv 0 \pmod{12}$

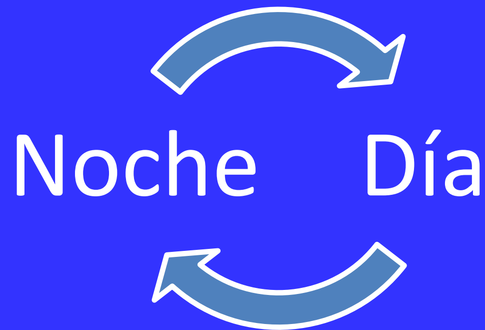
$-1 + 14 \equiv 1 \pmod{12}$

Módulo 12

¿Podemos usar aritmética módulo 12 para representar algo mós?

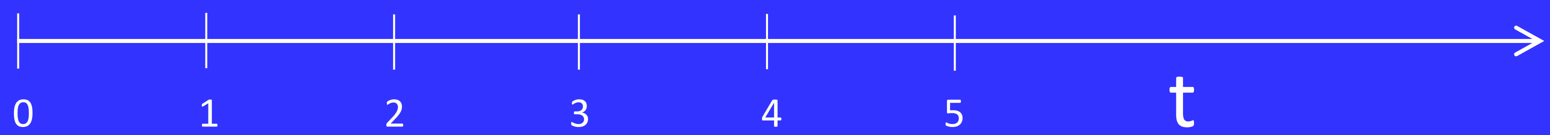


Módulo 2

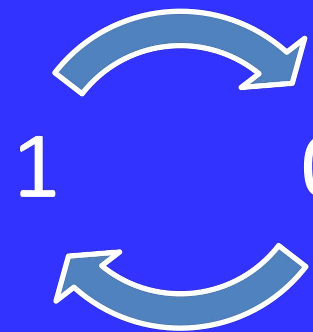


- Podemos usar 0 para representar Día y 1 para representar Noche.

Reloj sólo con dos números



Módulo 2



¿Algebraicamente?

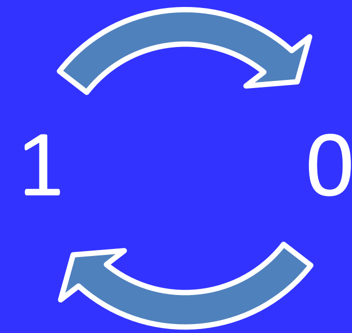
- 0 y 1 son los restos módulo 2
- 0 representa los números pares: 0, 2, 4, 6,… 2n, n entero
- 1 representa los números impares: 1, 3, 5, 7,… 2n+1, n entero

Ejemplos:

$4 \equiv 0 \pmod{2}$ $-6 \equiv 0 \pmod{2}$

$13 \equiv 1 \pmod{2}$ $-1 \equiv 1 \pmod{2}$

Tabla de sumar módulo 2



+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

+	**Par**	**Impar**
Par	Par	Impar
Impar	Impar	Par

Ejemplos:

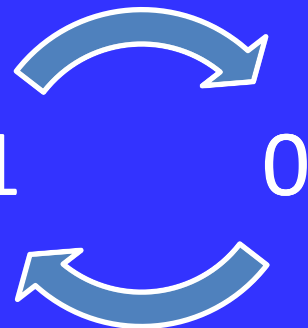
$0 + 1 \equiv 1 \pmod{2}$

$13 + 2 \equiv 1 \pmod{2}$

$1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$

$-1 + 14 \equiv 1 \pmod{2}$

Tabla de multiplicar módulo 2



x	0	1
0	0	0
1	0	1

x	Par	Impar
Par	Par	Par
Impar	Par	Impar

Ejemplos:

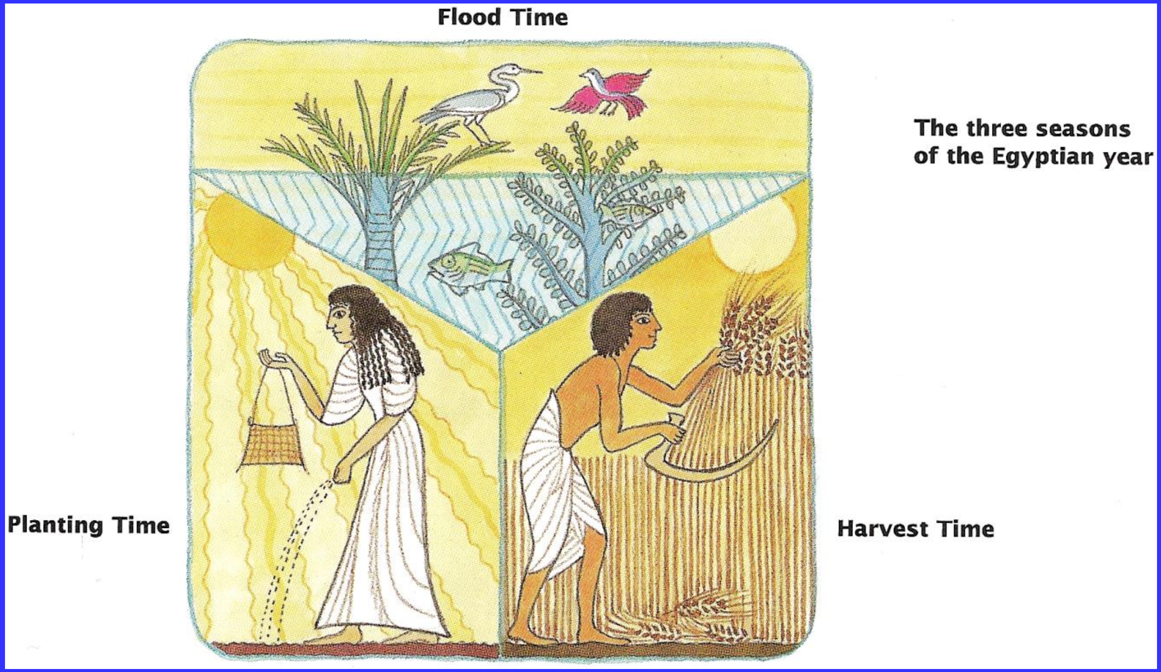
$0 \times 1 \equiv 0 \pmod{2}$

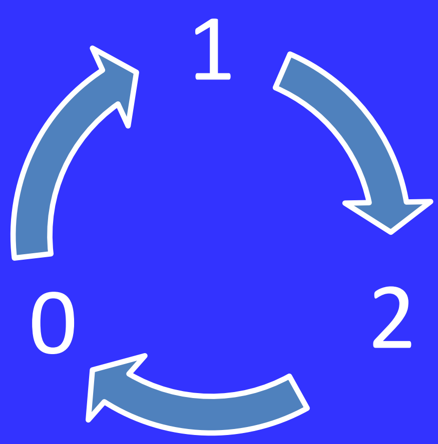
$1 \times 1 \equiv 1 \pmod{2}$

$13 \times 3 \equiv 1 \pmod{2}$

$-1 \times 14 \equiv 0 \pmod{2}$

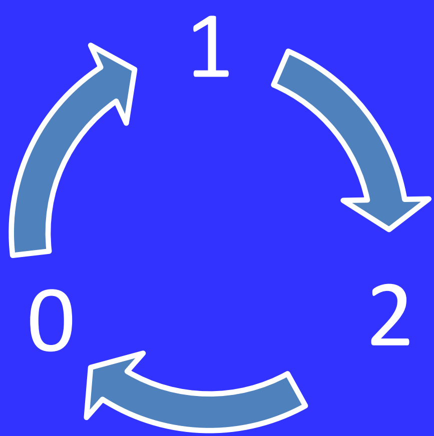
Módulo 3





- 0 representa la estación de siembra
- 1 representa la estación de inundación
- 2 representa la estación de cosecha

Módulo 3



+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

- 0, 1 y 2 son los restos módulo 3
- 0 representa los múltiplos de 3: 0, 3, 6,…
- 1 representa los (múltiplos de 3) + 1: 1, 4, 7,…
- 2 representa los (múltiplos de 3) + 2: 2, 5, 8,…

¿Algebraicamente?

$3n$, n entero

$3n+1$, n entero

$3n+2$, n entero

Ejemplos:

$3 \equiv 0 \pmod 3$ $\quad -2 \equiv 1 \pmod 3$ $\quad 13 \equiv 1 \pmod 3$

$2 + 2 \equiv 1 \pmod 3$ $\quad -1 + 8 \equiv 1 \pmod 3$ $\quad -2 + 7 \equiv 2 \pmod 3$

Tabla de multiplicar módulo 3

X	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Restos

Pensar en módulo n es como tener unas gafas especiales que convierten cada número en su resto módulo n. Por ejemplo, para calcular la siguiente suma módulo 12 (para hallar el resto módulo 12):

19 + 23 + 15

Primero reemplazamos cada número por su resto mod 12:

7 + 11 + 3

Luego hacemos la suma: 21

y reemplazamos la suma por su resto módulo 12: 9

Restos

Si hoy es domingo ¿qué día será en 1000 días?

Necesitamos encontrar el resto que obtenemos al dividir 1000 entre 7.

Como no necesitamos el cociente, no necesitamos hacer la división. Basta con buscar múltiplos de 7 menores que 1000:

$1000 = 700+300 = 700+280+20 = 700+280+14+6$

En 6 días, y en 1000 días, será Sábado.

Ejercicios 2
Restos y congruencias

Recuerden:

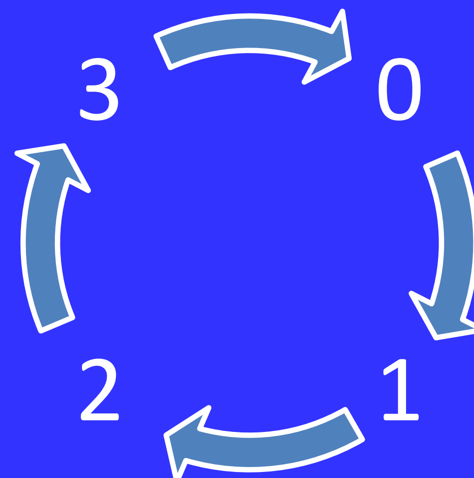
$a \equiv b \pmod{n}$ si $a-b$ es un múltiplo de n. Equivalentemente,

$a \equiv b \pmod{n}$ si a y b tienen el mismo resto módulo n.

Cuando trabajamos módulo n reemplazamos todos los números por sus restos módulo n: $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Módulo 4

¿Qué podemos representar con módulo 4?



- 0 representa primavera
- 1 representa verano
- 2 representa otoño
- 3 representa invierno

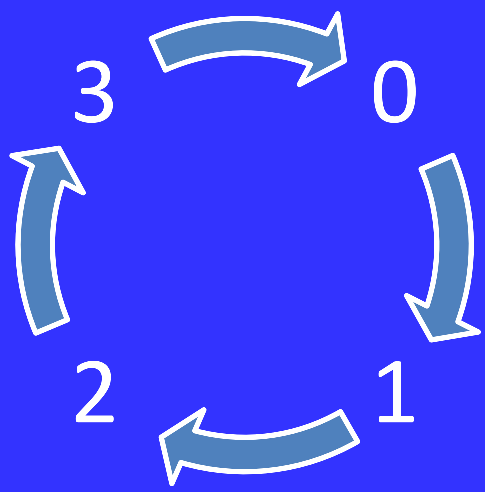
Ejercicios 3
Tablas de sumar

Recuerden:

Cuando trabajamos módulo n reemplazamos los números por sus restos módulo n:

$$0, 1, 2, \dots, n-1$$

Tabla de sumar módulo 4



+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

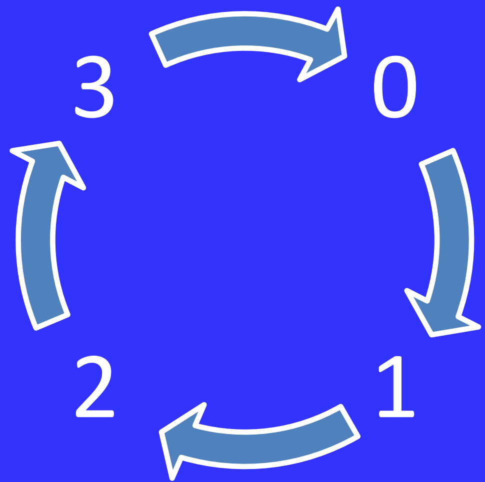
- 0 representa 4n: 0, 4, 8, 12,…
- 1 representa 4n+1: 1, 5, 9, 13,…
- 2 representa 4n+2: 2, 6, 10, 14,…
- 3 representa 4n+3: 3, 7, 11, 15,…

Ejemplos:

$4 \equiv 0 \pmod 4$ $\quad -2 \equiv 2 \pmod 4$ $\quad 13 \equiv 1 \pmod 4$

$3 + 2 \equiv 1 \pmod 4$ $\quad -1 + 8 \equiv 3 \pmod 4$ $\quad -2 + 7 \equiv 1 \pmod 4$

Tabla de multiplicar módulo 4



x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

- 0 representa 4n: 0, 4, 8, 12,…
- 1 representa 4n+1: 1, 5, 9, 13,…
- 2 representa 4n+2: 2, 6, 10, 14,…
- 3 representa 4n+3: 3, 7, 11, 15,…

Ejemplos:

$4 \equiv 0 \pmod 4$ $-2 \equiv 2 \pmod 4$ $13 \equiv 1 \pmod 4$

$2 \times 2 \equiv 0 \pmod 4$ $3 \times 2 \equiv 2 \pmod 4$ $3 \times 3 \equiv 1 \pmod 4$

Arimética del último dígito

¿Cuál es el último dígito de 285714 + 571428?

- Basta mirar a los último dígitos: 4 + 8 = 12
- Luego mirar al último dígito de su suma: 2

¿Cuál es el último dígito de 142857 x 34745?

- Basta mirar a los último dígitos: 7 x 5 = 35
- Luego mirar al último dígito de su producto: 5

¿Cómo está esto relacionado con aritmética modular?

Módulo 10

Reloj de la Revolución Francesa

- 0 representa 10n: 0, 10, 20,…
- 1 representa 10n+1: 1, 11, 21,…
- 2 representa 10n+2: 2, 12, 22,…
- 3 representa 10n+3: 3, 13, 23,…
- 4 representa 10n+4: 4, 14, 24,…
- 5 representa 10n+5: 5, 15, 25,…
- 6 representa 10n+6: 6, 16, 26,…
- 7 representa 10n+7: 7, 17, 27,…
- 8 representa 10n+8: 8, 18, 28,…
- 9 representa 10n+9: 9, 19, 29,…

En general: $N \equiv$ último dígito de $N \pmod{10}$

Tabla de sumar módulo 10

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Ejemplos:

$7 + 4 \equiv 1 \pmod{10}$ $19 + 28 \equiv 7 \pmod{10}$ $-2 + 6 \equiv 4 \pmod{10}$

Tabla de multiplicar módulo 10

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Ejemplos:

$7 \times 4 \equiv 8 \pmod{10}$ $\quad 19 \times 28 \equiv 2 \pmod{10}$ $\quad -2 \times 6 \equiv 8 \pmod{10}$

Criterio de divisibilidad entre 9

Sabemos que

$$10 \equiv 1 \pmod 9$$

Entonces $10^2 \equiv 1 \pmod 9$, $10^3 \equiv 1 \pmod 9$, etc.

En general:

$$10^n \equiv 1 \pmod 9 \text{ para cualquier } n$$

Tomemos cualquier número, digamos 8794, entonces tenemos:

$$8794 = 8x1000 + 7x100 + 9x10 + 4$$

$$\equiv 8 + 7 + 9 + 4 \pmod 9$$

Criterio de divisibilidad entre 9

- En general tenemos:

  $$N \equiv \text{suma de los dígitos de } N \pmod 9$$

- En particular, N es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 9.

- Dado que $10 \equiv 1 \pmod 3$ el mismo argumento prueba que $N \equiv$ suma de dígitos de $N \pmod 3$.

Criterio de divisibilidad entre 11

Sabemos que $10 \equiv -1 \pmod{11}$

Entonces $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$, $10^3 \equiv -1 \pmod{11}$, etc.

En general:

$$10^n \equiv 1 \pmod{11} \text{ si } n \text{ es par}$$

$$10^n \equiv -1 \pmod{11} \text{ si } n \text{ es impar}$$

Tomemos cualquier número, digamos 38,794, entonces tenemos:

$$38{,}794 = 3\text{x}10{,}000 + 8\text{x}1{,}000 + 7\text{x}100 + 9\text{x}10 + 4$$

$$\equiv 3 - 8 + 7 - 9 + 4 \pmod{11}$$

Criterio de divisibilidad entre 11

- En general tenemos:

  $N \equiv$ suma alternada de dígitos de N (mod 11)

- En particular, N es divisible por 11 si y sólo si la suma alternada de sus dígitos es divisible por 11.

Ejercicios 4
Divisibilidad

- Recuerden:
- N es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.
- N es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.
- N es divisible entre 11 si y sólo si la suma alternada de sus dígitos es divisible entre 11.

Potencias

¿Cuál es el último dígito de:

a) 310^{56} 0

b) 11^{550} 1

c) $45^{3687682346878922211555 5657}$ 5

d) 7185787346^{3586} 6

Potencias

¿Cuál es el último dígito de:

a) 4^{13} $\ldots 4^5,\ 4^3,\ 4^1$ 4 6 $4^2, 4^4, 4^6\ldots$

b) 9^{58} $\ldots 9^5,\ 9^3,\ 9^1$ 9 1 $9^2, 9^4, 9^6\ldots$

Potencias

¿Cuál es el último dígito de:

a) 2^{13}

$\ldots 2^9,\ 2^5,\ 2^1\ \ 2 \qquad 4\ \ 2^2, 2^6, 2^{10}\ldots$

$\ldots 2^{12},\ 2^8,\ 2^4\ \ 6 \qquad 8\ \ 2^3\ , 2^7, 2^{11}\ldots$

b) 3^{58}

$\ldots 3^9,\ 3^5,\ 3^1\ \ 3 \qquad 9\ \ 3^2, 3^6, 3^{10}\ldots$

$\ldots 3^{12},\ 3^8,\ 3^4\ \ 1 \qquad 7\ \ 3^3\ , 3^7, 3^{11}\ldots$

Ejercicios 5
Potencias

5

$\ldots 9^5, \; 9^3, \; 9^1 \; 9 \quad 1 \; 9^2, 9^4, 9^6 \ldots$

6

$\ldots 2^9, \; 2^5, 2^1 \; 2 \quad 4 \; 2^2, 2^6, 2^{10} \ldots$

$\ldots 2^{12}, \; 2^8, \; 2^4 \; 6 \quad 8 \; 2^3 \; , 2^7, 2^{11} \ldots$

Tabla de multiplicar módulo 10

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

¿Son 6312, 4553, 9538 números cuadrados?

¿Dónde están los números cuadrados en la tabla?

Tabla de multiplicar módulo 10

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

¿Son 6312, 4553, 9538 números cuadrados?

¿Dónde están los números cuadrados en la tabla?

Tabla de multiplicar módulo 10

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

¿Dónde están los números cuadrados en la tabla?

¿Por qué esta simetría?

Tabla de multiplicar módulo 10

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
-1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

¿Dónde están los números cuadrados en la tabla?

¿Por qué esta simetría? $1^2=(-1)^2$

Tabla de multiplicar módulo 10

x	0	1	2	3	4	5	6	7	-2	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
-2	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
-1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

¿Dónde están los números cuadrados en la tabla?

¿Por qué esta simetría? $1^2=(-1)^2$, $2^2=(-2)^2$

Tabla de multiplicar módulo 10

x	0	1	2	3	4	5	6	-3	-2	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
-3	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
-2	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
-1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

¿Dónde están los números cuadrados en la tabla?

¿Por qué esta simetría? $1^2=(-1)^2$, $2^2=(-2)^2$, $3^2=(-3)^2$

Tabla de multiplicar módulo 10

x	0	1	2	3	4	5	-4	-3	-2	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
-4	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
-3	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
-2	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
-1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

¿Dónde están los números cuadrados en la tabla?

¿Por qué esta simetría? $1^2=(-1)^2$, $2^2=(-2)^2$, $3^2=(-3)^2$, $4^2=(-4)^2$

Abstracción

¿Qué es abstracción?

Perro

Abstracción

3

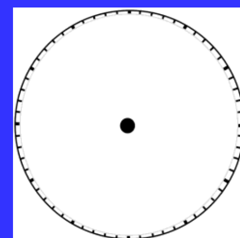
Abstracción

$$a + b = b + a$$

$$\boxed{1 + 2 = 2 + 1} \quad \boxed{3 + 4 = 4 + 3} \quad \boxed{5 + 7 = 7 + 5}$$

Abstracción

Módulo n



En general, a ≡ b (mod n) si a-b es un múltiplo de n.

Módulo 12

Módulo 4

Módulo 10

Abstracción

¿De qué se tratan las matemáticas?

Las matemáticas no sólo se tratan de números y figuras, se tratan de patrones, generalizaciones y abstracciones.

http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics: Las matemáticas son el estudio abstracto de temas como cantidad (números), estructura, espacio y cambio.

Abstracción

Teoría de la medida

Area | Volumen | Probabilidad

Este es un ejemplo de matemáticas puras.

Abstracción

Modelos matemáticos

Física

Biología

Economía

A veces más abstracto es más útil.

Abstracción

Aritmética modular

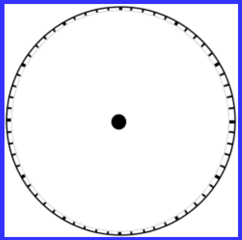
Criptografía

Música

Videojuegos

La abstracción ayuda a la unificación

Módulo n



Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, 1801

Módulo 12

Módulo 2

+	Par	Impar
Par	Par	Impar
Impar	Impar	Par

Módulo 10

Arimética del último dígito

La unificación en Física

Principia de Newton

Mecánica terrestre (Galileo)

Mecánica celestial (Kepler)

Experimento mental: ¿Saben cómo ver que la luna está cayendo como una manzana?

La unificación en Física

Electromagnetismo de Maxwell

Electricidad

Magnetismo

La unificación en Física

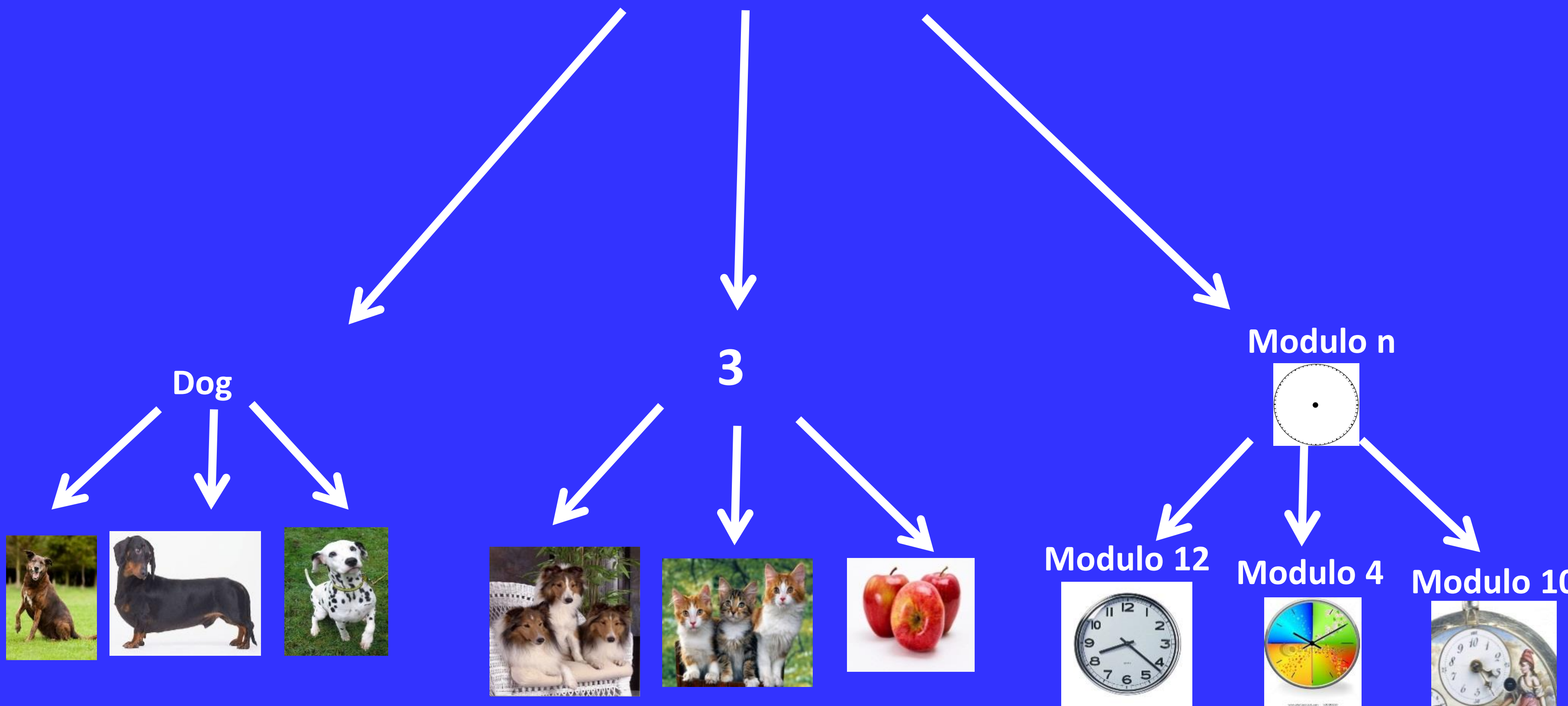
?

Relatividad de Einstein

Mecánica cuántica

Abstracción

Concepto de abstracción

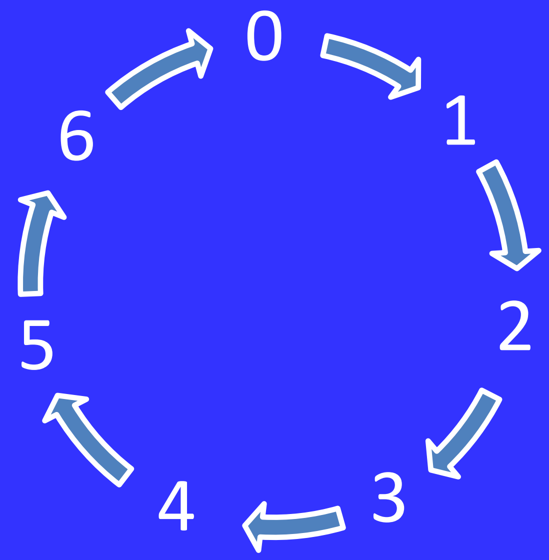


Los conceptos son importantes, p.j. <u>ajedrez</u>, <u>programación</u>.

¿En qué día naciste?

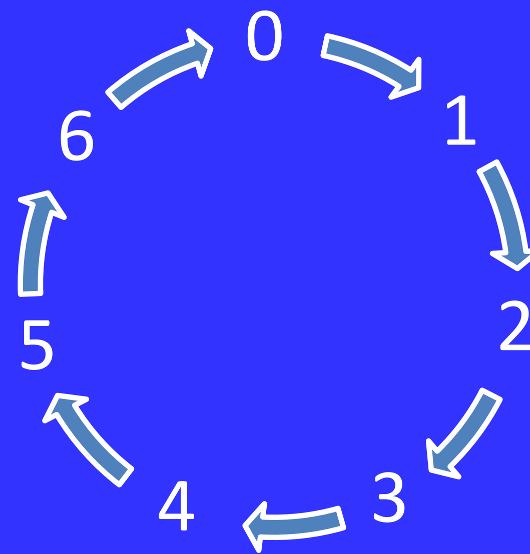
¿Qué módulo vamos a usar?

Módulo 7



- 0 representa domingo
- 2 representa martes
- 4 representa jueves
- 6 representa sábado
- 1 representa lunes
- 3 representa miércoles
- 5 representa viernes

Módulo 7



- 0 representa 7n: 0, 7, 14, 21,…
- 1 representa 7n+1: 1, 8, 15, 22,…
- 2 representa 7n+2: 2, 9, 16, 23,…
- 3 representa 7n+3: 3, 10, 17, 24,…
- 4 representa 7n+4: 4, 11, 18, 25,…
- 5 representa 7n+5: 5, 12, 19, 26,…
- 6 representa 7n+6: 6, 13, 20, 27,…

Tabla de sumar módulo 7

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Ejemplos:

$1 + 4 \equiv 5 \pmod 7$ | $2 + 5 \equiv 0 \pmod 7$ | $6 + 2 \equiv 1 \pmod 7$

lunes + 4 = viernes | martes + 5 = domingo | sábado + 2 = lunes

Día de la semana

- Una manera de determinar el día de la semana de una fecha dada es asignar códigos a los años, meses y días de tal manera que:

$$\begin{aligned}\text{Día de la semana} \equiv\ & \text{código del año} \\ & + \text{código del mes} \\ & + \text{día} \pmod 7\end{aligned}$$

Día de la semana

- Por simplicidad escogemos 1 como el código del año 2001. Como 1/Enero/2001 fue lunes necesitamos:

  $1 \equiv 1 + \text{Código de enero} + 1 \pmod 7$

  Entonces, ¿cuál es el código de enero?

  $0 \equiv \text{Código de enero} + 1 \pmod 7$

  $\text{Código de enero} \equiv -1 \pmod 7$

  $\text{Código de enero} \equiv 6 \pmod 7$

Este es el código de enero en años no bisiestos.

Códigos de los meses

¿Cómo encontrar el código de febrero?

Código de febrero $\equiv$ Código de enero

+ número de días en enero (mod 7)

Código de febrero $\equiv 6 + 31 \pmod 7$

Código de febrero $\equiv 37 \pmod 7$

Código de febrero $\equiv 2 \pmod 7$

Este es el código de febrero para años no bisiestos.

Códigos de los meses

En general, para encontrar los códigos de los meses hacemos una lista de los números de días de los meses en un año no bisiesto:

Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Los miramos módulo 7:

3 0 3 2 3 2 3 3 2 3 2 3

Comenzando con Ene sumamos los números mod 7:

6 2 2 5 0 3 5 1 4 6 2 4

Códigos de los meses

¿Cómo recordar los códigos de los meses?

Pueden recordar este número: 622-503-514-624

O esta tabla:

6	1	Ene	2	2	Feb	2	3	Mar
5	4	Abr	0	5	May	3	6	Jun
5	7	Jul	1	8	Ago	4	9	Sep
6	10	Oct	2	11	Nov	4	12	Dic

Excepción: en un año bisiesto el código de enero es 5 y el código de febrero es 1.

Recuerden que los años bisiestos (usualmente) son los años que son múltiplos de 4.

Códigos de los años

- *Si tu cumpleaños este año fue un domingo, ¿en qué día de la semana será tu cumpleaños el próximo año?*

¿Cómo encontrar el código de 2002?

Código de 2002 ≡ Código de 2001

+ número de días en 2002 (mod 7)

Código de 2002 ≡ 1 + 365 (mod 7)

Código de 2002 ≡ 1 + 1 (mod 7)

Código de 2002 ≡ 2 (mod 7)

Códigos de los años

En general, para encontrar los códigos de los años hacemos una lista de los números de días de los años:

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
365	365	365	366	365	365	365	366	365	365

Los miramos módulo 7:

1 1 1 2 1 1 1 2 1 1

y calculamos los subtotales módulo 7:

1 2 3 5 6 0 1 3 4 5

Códigos de los años

¿Y los años del siglo XX?

- Los códigos son como los del siglo XXI excepto que le sumamos 1 al código. Por ejemplo, dado que 2001 tiene código 1, 1901 tiene código 2.
- Códigos para años previos al 2000:

1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
365	366	365	365	365	366	365
1	2	1	1	1	2	1
0	2	3	4	5	0	1

Códigos de los años

- Es útil recordar los años con código 0:

• 1905	Año milagroso de Albert Einstein
• 1911, 22, 33, 44	Primeros cuatro múltiplos de 11
• 1916	4^2
• 1939	Inicio de la Segunda Guerra Mundial
• 1950	Maracanazo (Mundial Brasil ’50)
• 1961	Construcción del muro de Berlín
• 1967	Primer transplante de corazón
• 1972	Juegos Olímpicos Munich ’72
• 1978	Mundial Argentina ’78
• 1989	Caída del muro de Berlín
• 1995	Comienzo del boom de internet (Nestscape)

Códigos de los años

¿Cómo encontrar el código de 1991?

Recordamos que 1989, el año que cayó el Muro de Berlín, tiene código 0.

Código de 1991 $\equiv$ 91-89 + número de años bisiestos en 1990-1991 (mod 7)

Código de 1991 $\equiv$ 2 + 0 (mod 7)

Código de 1991 $\equiv$ 2 (mod 7)

Códigos de los años

- También ayuda recordar los años con código igual a su último dígito:

  1964-1966

  2000-2003

- Códigos de los años en Excel

- Ejemplos pensando en voz alta

Ejercicios 6
Día de la semana

Encuentren el día de la semana en que un compañero de clase nació.

Recuerden:

Día de la semana ≡ código del año
+ código del mes
+ día (mod 7)

60 puntos yendo en círculos

- Imagínense 60 puntos yendo en círculos concéntricos en el sentido de las agujas del reloj y comenzando a las 3pm.
- El primer punto, el más alejado del centro, va a 1 rpm, el segundo a 2 rpm y así hasta el sexagésimo que va a 60 rpm.
- *¿Dónde estarán luego de 1 minuto?*
- *¿Dónde estarán luego de 1/2 minuto?*
- *¿Dónde estarán luego de 1/3 minuto?*
- *¿Dónde estarán luego de 1/4 minuto?*

60 puntos yendo en círculos

http://whitneymusicbox.org/whitneyMinute.swf

Ondas de péndulos

- Algo similar se puede hacer con péndulos.
- Cada sucesivo péndulo es más corto y ajustado de manera tal que realiza una oscilación adicional en un período 1 minuto.
- http://www.youtube.com/watch?v=yVkdfJ9PkRQ