Números Complejos

Rafael Sánchez Lamoneda   José Heber Nieto Said

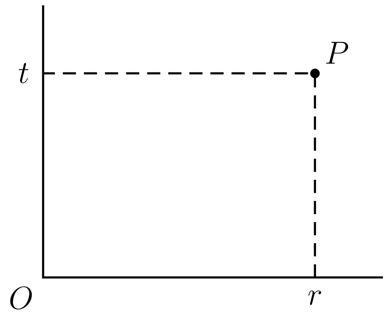
Marzo de 2016

1. Introducción

Los números complejos surgen de la necesidad de resolver ecuaciones polinómicas, cuyos ceros requieren el cálculo de raíces de índice par de números negativos, como por ejemplo $x^2 + 1 = 0$. Ya en trabajos del siglo XVI se consiguen expresiones que involucran este tipo de raíces. Por ejemplo, la solución de Bombelli (1526-1572) de la ecuación cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$, utilizando la fórmula que su maestro Girolamo Cardano (1501-1576) publicó en su libro Ars Magna (el Gran Arte), en 1545, para resolver estas ecuaciones, y que se conoce desde entonces con el nombre de *Fórmula de Cardano*. Al resolver la ecuación mencionada se obtiene $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$. Sin embargo, el uso de estas raíces extrañas, molestaba a los matemáticos de la época. Esta incomodidad perduró hasta que en el siglo XIX, el gran matemático alemán Karl F. Gauss (1787-1855) introdujo la representación geométrica de estos números, a los cuales conocemos hoy en día con el nombre de números complejos.

2. Definiciones y Representación Geométrica

Un número complejo es un par ordenado (a, b) de números reales. Como tal, puede identificarse con el punto de coordenadas (a, b) en el plano cartesiano. Sin embargo es más común representar el complejo (a, b) en la forma $a + bi$, donde i es un símbolo llamado *unidad imaginaria*. A este tipo de representación se le llama *forma binómica*. El conjunto de todos los números complejos se denota $\mathbb{C}$. El plano en el cual representamos los números complejos se conoce con el nombre de *plano de Argand-Gauss*, por el matemático francés J. R. Argand (1768-1822).



En el plano de Argand-Gauss, los números representados en el eje de las x tienen la forma $a + 0i = r$, pues corresponden a los puntos de coordenadas $(r, 0)$, es decir, son números reales y por este motivo al eje de las x se le llama *eje real*. El eje de las y recibe el nombre de *eje imaginario*, en él se representan los números complejos de la forma $0 + bi = ti$, que se conocen como números *imaginarios puros*.

Las coordenadas a y b del número complejo $z = a + bi$ son llamadas, respectivamente, la *parte real* y la *parte imaginaria* de z y a veces se escribe $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i$, donde $\mathrm{Re}(z) = a$ e $\mathrm{Im}(z) = b$.

Dos números complejos son iguales si sus partes reales e imaginarias son respectivamente iguales, es decir:

Definición 1. Dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ son iguales si y solo si $a = c$ y $b = d$. En particular $a + bi = 0$ si y solo si $a = 0$ y $b = 0$.

Definición 2. El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es el número $\overline{z} = a - bi$.

3. Operaciones con Números Complejos

La *suma* de números complejos se realiza componente a componente, es decir

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Observe que eso es lo mismo que aplicar las reglas básicas del álgebra. Es claro que la suma de complejos es asociativa y conmutativa, que el complejo 0 es neutro para la suma y que el opuesto de $a + bi$ es $-a - bi$.

El producto también se realiza de la manera usual, pero usando la convención de que $i^2 = -1$. Es decir:

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Es fácil ver que el producto de complejos es asociativa y conmutativa y que el complejo 1 es neutro para el producto.

Obsérvese que si $z = a + bi$ entonces

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Esta igualdad es muy importante. Como el número complejo $z = a + bi$ se identifica con el punto $P = (a, b)$ del plano, entonces podemos definir la longitud o módulo de z, en símbolos $|z|$, como la distancia del punto $O = (0, 0)$ al punto $P = (a, b)$, la cual es $d(O, P) = \sqrt{a^2 + b^2}$. Obsérvese que tenemos entonces la fórmula

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Si $z \neq 0$ entonces $|z|^2 \neq 0$ y podemos escribir

$$z\frac{\overline{z}}{|w|^2} = 1,$$

es decir que $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ es inverso multiplicativo de z.

Si $z = a + bi$ y $w = c + di \neq 0$, es ahora obvio como definir el cociente $\frac{w}{z}$:

$$\frac{w}{z} = w\frac{1}{z} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}.$$

En forma desarrollada,

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{a^2 + b^2}.$$

Un cálculo interesante de hacer es el de las potencias de i: i^0, i^1, i^2, i^3, etc. Como $i^2 = -1$, entonces

$$\begin{aligned} &i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \\ &i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = i, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Se observa que las potencias de i se van repitiendo con un período de longitud 4, de esta manera si queremos calcular i^n para un entero positivo n, simplemente dividimos n entre 4, obteniendo $n = 4q + r$ y calculamos $i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$, siendo r el resto de dividir n entre 4. Así por ejemplo $i^{2015} = i^3 = -i$, pues $2015 = 503 \times 4 + 3$.

3.1. Ejercicios

1. Si $z = 2 + 3i$, $w = 5 - 7i$ y $u = -3 - 8i$, calcule:
(a) $z + w$; (b) $z + \overline{w}$; (c) $[(z + w)u] - \overline{z}$; (d) $\dfrac{z}{u} + \dfrac{\overline{u}}{z}$;
(e) $(\overline{z + u})$; (f) $(\overline{z \cdot u})$; (g) $(\overline{\overline{z}})$.

2. Si z y w son números complejos cualesquiera y r es un número real, demuestre que:
(a) $(\overline{z + w}) = \overline{z} + \overline{w}$; (b) $(\overline{z \cdot w}) = \overline{z} \cdot \overline{w}$; (c) $(\overline{\overline{z}}) = z$;
(d) z es un número real si y solo si $\overline{z} = z$;
(e) $\overline{rz} = r\overline{z}$;
(f)] $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, para todo entero n.
(g)] $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z + \overline{z})$.

3. Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ es un polinomio cuyos coeficientes son números reales, entonces para todo número complejo z, $\overline{p(z)} = a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots a_1\overline{z} + a_0$.

4. Si un polinomio con coeficientes reales admite una raíz compleja $z = a+bi$, entonces el conjugado de z, $\overline{z} = a - bi$, también es una raíz.

5. Si un polinomio con coeficientes reales tiene grado impar, demuestre que tiene al menos una raíz real.

6. Resuelva la ecuación $x^2 - x + 1 = 0$.

7. Si z es un número complejo, resuelva la ecuación $z - 2\overline{z} = 2 + 3i$.

8. Si $z = -1 + \sqrt{6}i$, halle los números complejos $w = x + yi$ tal que $w^2 = z$.

9. Calcule el valor de $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$, para un entero positivo n cualquiera. ¿Cuánto es $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2015}$?

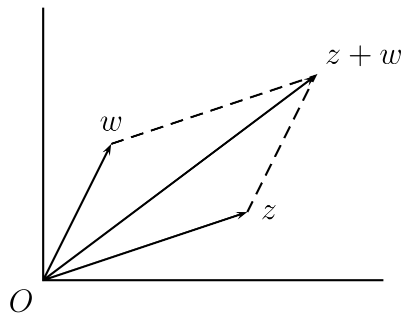
10. Para dos números complejos cualesquiera z y w, demuestre que:
(a) $|zw| = |z||w|$; (b)] $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$; (c) $|\overline{z}| = |z|$;
(d) $|z+w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2$; (e) $|z-w|^2 = |z|^2 - 2Re(z\overline{w}) + |w|^2$.

11. Pruebe la *Ley del paralelogramo*: $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

12. Pruebe usando inducción que si $z = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ y $w = w_1 w_2 \cdots w_n$, entonces $|w| = |w_1||w_2| \cdots |w_n|$, $\overline{z} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \cdots + \overline{z_n}$ y $\overline{w} = \overline{w_1} \cdot \overline{w_2} \cdots \overline{w_n}$.

4. Geometría en el Plano Complejo

Volvamos a la suma de dos números complejos, z y w. Si $z = a + bi$ y $w = c+di$, entonces su suma $z+w = (a+c)+(b+d)i$ y ella está representada por el punto de coordenadas $(a+c, b+d) = (a, b)+(c, d)$. Por lo tanto sumar dos números complejos equivale a sumar los vectores cuyo origen es el sistema de coordenadas $O(0, 0)$ y cuyos extremos son los puntos que los representan. Obsérvese que geométricamente al sumar los complejos z y w formamos un paralelogramo con 0, z y w como tres de sus vértices y el otro es exactamente $z + w$.



Nótese también que $|z - w|$ es la distancia entre los puntos que representan a z y w. De esta forma podemos justificar el nombre que le dimos a la igualdad en el ejercicio **7(f)**, ley del paralelogramo, pues lo que allí se establece es que en todo paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales.

Si $|z - w|$ nos indica la distancia entre z y w, debería entonces cumplirse la desigualdad triangular, es decir $|z + w| \leq |z| + |w|$. Obsérvese que si esto es cierto, entonces, dados tres números complejos, z_1, z_2 y z_3, tenemos $z_1 - z_2 = (z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)$ y entonces $|z_1 - z_2| \leq |z - 1 - z - 3| + |z_3 - z_2|$.

Proposición 1 (Desigualdad Triangular)**.** *Para cualquier par de números complejos z y w se cumple*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Demostración. Observemos primero que para todo par de números reales a

y b es cierto que $|a| \leq \sqrt{a^2+b^2}$, por lo tanto si z y w son números complejos,

$$\begin{aligned} -|z| &\leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|, \\ -|z| &\leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z||zw|$. Luego,

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z|+|w|)^2 \end{aligned}$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros se termina la demostración. $\square$

Obsérvese que si los vectores que representan a z y w no tienen la misma dirección, para sumarlos formamos un triángulo con lados de longitud $|z|$, $|w|$ y $|z+w|$, como indicamos antes. El teorema nos dice que en un triángulo la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del otro lado.

¿Cuándo tenemos la igualdad? Consideremos $w \neq 0$ y $z = tw$, para algún $t \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$. Entonces un simple cálculo demuestra que ocurre la igualdad. Es decir, si z, w y el origen O están alineados, entonces ocurrirá la igualdad. Recíprocamente supongamos que $|z+w| = |z| + |w|$. De la demostración vemos que eso ocurre si y solo si $|z\overline{w}| = \mathrm{Re}(z\overline{w})$, lo cual es equivalente a afirmar que $z\overline{w} \geq 0$, es decir $z\overline{w}$ es un número real y es no negativo. Si lo multiplicamos ahora por $\frac{w}{w}$, si $w \neq 0$, entonces tendremos $|w|^2(\frac{z}{w}) \geq 0$.

Por lo tanto si

$$t = \frac{z}{w} = \left(\frac{1}{w^2}\right) |w|^2 \left(\frac{z}{w}\right),$$

entonces $t \geq= 0$ y $z = tw$.

Otra desigualdad muy útil que se desprende de todo esto es la siguiente:

Proposición 2. *Si z y w son números complejos, entonces*

$$||z| - |w|| \leq |z-w|.$$

La demostración la dejamos como ejercicio para el lector.

4.1. Puntos medios y baricentros

Si $P = (p, 0)$, $Q = (q, 0)$ y $R = (r, 0)$ son tres puntos en la recta real, y si $\frac{PQ}{PR} = t$, entonces $\frac{q-p}{r-p} = t$, de donde $q - p = t(r - p)$ y $q = p + t(r - p) = (1 - t)p + tr$.

Si $P = (p, p')$, $Q = (q, q')$ y $R = (r, r')$ son tres puntos alineados en el plano cartesiano y $\frac{PQ}{PR} = t$, entonces sus proyecciones sobre los ejes satisfacen la misma proporción (por el teorema de Tales), es decir que $q = (1-t)p + tr$ y $q' = (1 - t)p' + tr'$. Por lo tanto si pensamos a P, Q y R como números complejos se cumple $Q = (1 - t)P + tR$.

Como caso particular, el punto medio de los complejos P y R es $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}R$.

Consideremos ahora un triángulo con vértices (no alineados) A, B y C. El punto medio del lado BC es $M = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. El baricentro G del triángulo se encuentra en la mediana AM y cumple $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$. Por lo tanto

$$G = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}A = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) + \frac{1}{3}A = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

4.2. Ejercicios

1. Sean a y c números reales positivos

(1) Determine el lugar geométrico de todos los puntos del plano z, tal que

$$|z - a| + |z + a| = 2c$$

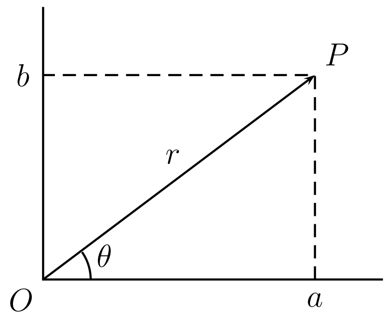
(2) Determine el lugar geométrico de todos los puntos del plano z, tal que

$$|z - a| - |z + a| = 2c$$

(3) Determine el lugar geométrico de todos los puntos del plano z, tal que $|z - 1| = |z + 5|$.

5. Forma Polar o Trigonométrica

Veremos ahora una manera muy útil de escribir un número complejo. En vez de un par ordenado (a, b) o la forma binómica $a + bi$, podemos referirnos a un número complejo z en término de sus coordenadas polares. Fijemos un sistema de coordenadas cartesianas en el plano. En la sección anterior hemos visto lo útil que resulta identificar a un número complejo $z = a + bi$, no por el punto de coordenadas $P = (a, b)$, si no por el vector $\overrightarrow{OP} = (a, b)$. Este vector tiene una longitud o módulo, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, que es también el módulo del número complejo z. Además dado el vector $\overrightarrow{OP} = (a, b)$, él forma un ángulo con el semieje positivo de las x en nuestro sistema de coordenadas. Definiremos el *argumento* del número complejo $z \neq 0$ como cualquiera de los ángulos $\theta = \arg z$ que forma el vector $\overrightarrow{OP} = (a, b)$ con el semieje positivo de las x.



Si $\theta = \arg z$, entonces $a = r \cos \theta$ y $b = r \operatorname{sen} \theta$ y esto nos permite escribir al número complejo $z = a + bi$ como $z = r \cos \theta + ir \operatorname{sen} \theta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Esta es la llamada *forma polar* o *trigonométrica* del número complejo z. Los números r y θ son las *coordenadas polares* del punto $P(a, b)$ del plano. En vez de escribir $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, muchas veces escribiremos $z = r \operatorname{cis} \alpha$. Como para cada entero k, $\cos \theta = \cos(\theta + 2k\pi)$ y $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)$, tendremos que dos números complejos $z = r \operatorname{cis} \theta = t \operatorname{cis} \alpha$ si y solo si $r = t$ y $\theta = \alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. En este caso se dice que los argumentos son iguales módulo $2k\pi$.

Ejemplo 1. Consideremos el número complejo $z = 1 + i$. Tenemos que $r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ y entonces $1 = \sqrt{2} \cos \theta$ y $1 = \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta$. De donde, $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo tanto $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 2. Si $z = 1 - \sqrt{3}i$, entonces $r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Además,

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces uno de los valores posibles para $\theta = arg z$ es $\frac{5\pi}{3}$ y tendremos $z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}) = 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$.

Ejemplo 3. Si $z = 5i$, entonces su módulo es 5 y el argumento es $\frac{\pi}{2}$. ¿Por qué?. Entonces $z = 5\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$.

Volvamos ahora nuestra atención a las operaciones con números complejos. Salvo la adición y la substracción, las otras se hacen más fácilmente recurriendo a la forma polar o trigonométrica, como puede verse en la siguiente proposición.

Proposición 3. *Si* $z = r\operatorname{cis}\alpha$ *y* $w = t\operatorname{cis}\beta$, *entonces:*

(i) $z \cdot w = (r \cdot t)\operatorname{cis}(\alpha + \beta)$.

(ii) Si $w \neq 0$, *entonces*
$$\frac{z}{w} = \frac{r}{t} \cdot \operatorname{cis}(\alpha - \beta).$$

Demostración. (i)
$$\begin{aligned} z \cdot w &= r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \cdot t(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) \\ &= rt\left[\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + i\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + i^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\right] \\ &= rt\left[(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) + (i\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + i\operatorname{sen}\alpha\cos\beta)\right] \\ &= rt\left[\cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right]. \end{aligned}$$

(ii) Para demostrar que
$$\frac{z}{w} = \frac{r}{t} \cdot \operatorname{cis}(\alpha - \beta),$$
si $w \neq 0$, basta demostrar que:
$$\frac{r}{t} \cdot \operatorname{cis}(\alpha - \beta) \cdot w = z.$$
Por lo que demostramos en la primera parte, para multiplicar dos números complejos basta con multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos, así pues como, $\frac{r}{t} \cdot t = r$ y $(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$, entonces
$$\frac{r}{t} \cdot \operatorname{cis}(\alpha - \beta) \cdot w = \frac{r}{t} \cdot \operatorname{cis}(\alpha - \beta) \cdot t \cdot \operatorname{cis}\beta = r \cdot \operatorname{cis}\alpha = z.$$
En consecuencia, para $w \neq 0$ tenemos que
$$\frac{z}{w} = \frac{r}{t} \cdot \operatorname{cis}(\alpha - \beta).$$

□

De todo lo hecho es importante observar que para dos números complejos z y w, siempre podremos afirmar que: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, si $w \neq 0$ y $\arg(\frac{z}{w}) = \arg(z) - \arg(w)$.

Volviendo a la multiplicación de números complejos, en el caso de calcular el producto de un número z consigo mismo, es decir, calcular z^n, para todo entero n, tenemos una fórmula muy elegante, debida al matemático francés Abraham De Moivre, (1667-1745).

Proposición 4 (Fórmula de De Moivre)**.** *Si n es un entero y $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, entonces*

$$z^n = [r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n = r^n [\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)] .$$

Demostración. Para $n = 0$ o $n = 1$, la fórmula es claramente cierta. Si $n > 1$, entonces aplicamos reiteradamente la fórmula y obtenemos el resultado pués $z^{n+1} = z^n \cdot z$. Queda entonces demostrarla en el caso en el que $n < 0$. Sea n un entero negativo, entonces $-n > 0$ y tendremos $n = -(-n)$, y si llamamos $m = -n$, entonces nos queda $n = -m$, $m > 0$ y:

$$\begin{aligned}
[r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n &= [r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^{-m} \\
&= \frac{1}{[r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^m} \\
&= \frac{1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}{r^m(\cos m\alpha + i \operatorname{sen} m\alpha)} \\
&= \frac{1}{r^m} \cdot [\cos(0 - m\alpha) + i \operatorname{sen}(0 - m\alpha)] \\
&= r^{-m} \cdot [\cos(-m\alpha) + i \operatorname{sen}(-m\alpha)] \\
&= r^n \cdot [\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)] .
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 4. Sea $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Entonces $|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ y $\arg(z) = \alpha$, tal que $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, por lo que $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$. Ahora, usando la fórmula de De Moivre podemos calcular fácilmente, por ejemplo z^{16}. En efecto:

$$z^{16} = (2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4})^{16} = 2^{16}(\operatorname{cis} \frac{16\pi}{4}) = 2^{16} \operatorname{cis} 4\pi = 2^{16}.$$

Veamos ahora otra aplicación importante de la fórmula de De Moivre, el cálculo de raíces de números complejos. En efecto, con esta fórmula será sencillo calcular $\sqrt[n]{z}$, para $z = r\operatorname{cis}\alpha$. Es decir, dado $z = r\operatorname{cis}\alpha$ queremos hallar los números complejos w tal que $w^n = z$.

Sea $w = t\operatorname{cis}\beta$. Entonces $w^n = z$ implica que

$$[t(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)]^n = r\,[\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha]$$

y por la fórmula de De Moivre

$$t^n\,[\cos(n\beta) + i\operatorname{sen}(n\beta)] = r\,[\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha]\,.$$

Como complejos iguales tienen el mismo módulo y argumentos congruentes módulo 2π, entonces $t^n = r$ y $n\beta = \alpha + 2k\pi$. Por lo tanto $t = \sqrt[n]{r}$ y $\beta = (\alpha + 2k\pi)/n$. Además $k = 0, 1, \ldots, n-1$. ¿Por qué?

Por la observación anterior tenemos entonces n raíces n-ésimas para cada número complejo z. Nótese que todas las raíces n-ésimas de un número complejo $z = r\operatorname{cis}\alpha$ tienen el mismo módulo, $\sqrt[n]{r}$ y si $r \neq 0$, entonces al representar gráficamente estás raíces, ellas aparecerán dispuestas en una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt[n]{r}$. Además al varios $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$, los argumentos forman una progresión aritmética de razón $\dfrac{2\pi}{n}$, de esta forma las n raíces quedan uniformemente distribuídas en la circunferencia. Si $r \neq 0$, entonces ellas se representarán como los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt[n]{r}$. Si $r = 0$, es claro que todas las raíces serán iguales a 0.

Ejemplo 5. Calculemos las raíces cuartas de 16. De acuerdo a lo dicho las raíces serán los números $w_k = \sqrt[4]{16}\cdot\operatorname{cis}\dfrac{2k\pi}{4} = 2\cdot\operatorname{cis}\dfrac{k\pi}{2}$, con $k = 0, 1, 2, 3$, pues el módulo de 16, es 16 y su argumento es 0. Por lo tanto tendremos, $w_0 = 2$, $w_1 = 2i$, $w_2 = -2$ y $w_3 = -2i$.

Como observación final es importante destacar que con lo hecho hasta ahora podemos resolver la ecuación $x^n - 1 = 0$, para cualquier entero positivo n. Sus raíces se conocen como las raíces n-ésimas de la unidad y son $w_k = \operatorname{cis}(\frac{2k\pi}{n})$ con $n = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Geométricamente se representan como los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia de centro en el origen de coordenadas y radio 1. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^n + 1 = 0$?

5.1. Forma exponencial

La función exponencial $f(x) = e^x$ se puede extender de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ mediante la definición

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b),$$

donde b se toma como argumento en radianes de las funciones seno y coseno. Es claro que si $b = 0$ esta definición coincide con la de la exponencial real. Las razones profundas de esta definición se estudian en los cursos de análisis matemático, y tienen que ver con los desarrollos en serie de potencias de las funciones e^x, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$. Aquí nos limitaremos a justificarla observando que cumple la ley de los exponentes

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

En efecto, si $z = a + bi$ y $w = c + di$ entonces

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{a+c}(\cos(b+d) + i \operatorname{sen}(b+d)) \\ &= e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)e^c(\cos d + i \operatorname{sen} d) = e^z e^w. \end{aligned}$$

En particular se tiene que

$$e^{nz} = (e^z)^n\,,$$

que es la fórmula de De Moivre escrita en forma exponencial.

Observemos que $e^{\pi i} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$, de donde

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

relación notable que liga a los cinco números más importantes de la matemática.

5.2. Problemas

1. Realice las operaciones indicadas y exprese el resultado en la forma $x + iy$.

(a) $(2 + 3i)(1 + i)(2 - i)$

(b) $\dfrac{i}{(1 + i)(2 - i)}$

(c) $(\sqrt{3} - i)^6$

(d) $\dfrac{1+z}{1-z}$, donde $z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

2. Usando la forma polar o trigonométrica de un número complejo demostrar que:

(a) $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$

(b) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

3. Usando la fórmula de De Moivre demuestre que:

(a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta$

(b) $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$

(c) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta$

(d) $\mathrm{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\,\theta$

(e) Suponiendo que $x + iy = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ demuestre que:

(i) $r^n\cos(n\theta) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{4}x^{n-4}y^4 - \cdots$

(ii) $r^n\,\mathrm{sen}(n\theta) = \binom{n}{1}x^{n-1}y - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots$

4. Determine un polinomio de segundo grado y coeficientes que admite a $3 - 2i$ como raíz.

5. Si $p(x) = x^2 + ax + b$, con a y b números reales y $z \in \mathbb{C}$ es una de sus raíces, demuestre que $a = 2\mathrm{Re}(z)$ y $b = |z|^2$.

6. Determine todos los números complejos z tales que $z + \frac{1}{z} = 1$.

7. Sea n un número entero. ¿Cuántos valores posibles puede tener la expresión $i^n + i^{-n}$?

8. Resuelva la ecuación $z + 2\overline{z} = 6 + i$.

9. Una de las raíces de la ecuación $x^4 + ax + b = 0$, con a y b números reales, es i. Determine las otras tres.

10. Si z y w son raíces n-ésimas de la unidad demuestre que:

(i) zw es también una raíz n-ésima de la unidad.

(ii) z^{-1} es una raíz n-ésima de la unidad.

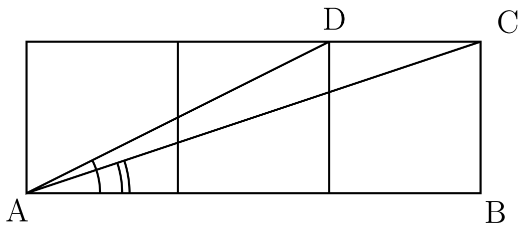
(iii) Si $z = r(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n})$ y $w = t(\cos\frac{2\ell\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\ell\pi}{n})$, con $k, \ell \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Escriba zw en la forma

$$zw = rt\left(\cos\frac{2u\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2u\pi}{n}\right),$$

con $u \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

11. Sea r un número real positivo. Determine el lugar geométrico dado por los números complejos z, tal que $|z - r| = r$.

12. Los tres cuadrados de la figura son iguales. Utilice números complejos para calcular el ángulo $\angle BAC + \angle BAD$.



6. El Teorema Fundamental del Álgebra

Teorema 1 (Teorema fundamental del álgebra)**.** *Todo polinomio no constante con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz en el campo complejo.*

La demostración de este teorema requiere conocimientos de análisis matemático. La idea de la demostración puede verse en [2].

Usando este teorema es fácil probar inductivamente que cualquier polinomio P de grado $n \geq 1$ se puede factorizar en el campo de los números complejos en la forma

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

donde a es una constante (que debe ser igual al coeficiente de x^n en $P(x)$) y x_1, x_2,…,x_n son las raíces de P (cada raíz aparece tantas veces como indique su multiplicidad). En efecto, si $n = 1$ esto es cierto pues $P(x) = ax + b = a(x + b/a)$. Si el resultado es cierto para n y P es un polinomio de grado $n+1$, entonces por el teorema fundamental existe $x_1 \in \mathbb{C}$ tal que $P(x_1) = 0$. Dividiendo $P(x)$ entre $x - x_1$ se obtiene $P(x) = (x - x_1)Q(x) + r$, donde Q es un polinomio de grado n y r es una constante. Pero poniendo $x = x_1$ se obtiene $0 = 0 + r$, luego $r = 0$ y $P(x) = (x - x_1)Q(x)$. Ahora aplicamos la hipótesis inductiva y listo.

6.1. Fórmulas de Vieta

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ entonces

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Si se desarrolla el miembro derecho se observa que el coeficiente de x^{n-1} es $a_n(-x_1 - x_2 - \cdots - x_n)$. Como esto debe ser igual a a_{n-1} resulta que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Del mismo modo, igualando los coeficientes de x^{n-2}, x^{n-3},…, x y el término constante en ambos miembros de la igualdad resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k &= -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots\cdots\cdots \\ x_1 x_2 \ldots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores se conocen como *relaciones entre coeficientes y raíces* o *fórmulas de Vieta*. Para $n = 2$ estas fórmulas nos dicen que si x_1 y x_2 son las raíces del trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$, entonces

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Para $n = 3$ nos dicen que si x_1, x_2 y x_3 son las raíces de ax^3+bx^2+cx+d, entonces

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

7. Transformaciones geométricas

Mediante la identificación del plano con los números complejos, las transformaciones geométricas del plano pueden interpretarse como funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, que en general tienen expresiones analíticas sencillas.

7.1. Traslación

Si w es un número complejo, interpretándolo como vector determina una traslación T cuya expresión es sencillamente

$$T(z) = z + w.$$

Es sabido que la composición de dos traslaciones es otra traslación según el vector suma de los de las dos traslaciones. Con números complejos esto se puede ver así: si $T_1(z) = z + w_1$ y $T_2(z) = z + w_2$, entonces

$$T_2(T_1(z)) = T_2(z + w_1) = (z + w_1) + w_2 = z + (w_1 + w_2),$$

luego $T_2 \circ T_1$ es la traslación definida por $w_1 + w_2$.

7.2. Simetría central

La simetría respecto al origen se traduce sencillamente en un cambio de signo: el simétrico de z es $-z$. La simetría respecto a un punto u cualquiera se puede describir haciendo una traslación que lleve u al origen, simetrizando respecto al origen y finalmente deshaciendo la traslación, es decir

$$z \to z - u \to -(z - u) \to -(z - u) + u.$$

En definitiva

$$S(z) = -(z - u) + u = 2u - z.$$

7.3. Homotecia

Una homotecia $H_{0,k}$ de centro en el origen y razón k (real) se describe simplemente como

$$H_{0,k}(z) = kz.$$

Para representar la homotecia $H_{u,k}$ de centro $u \in \mathbb{C}$ y razón k, nos trasladamos primero al origen, aplicamos $H_{0,k}$ y luego deshacemos la traslación. Es decir

$$H_{u,k}(z) = k(z - u) + u.$$

7.4. Rotación

Como al multiplicar dos complejos se multiplican los módulos y se suman los argumentos, es claro que multiplicar por $1 \operatorname{cis} \varphi = e^{i\varphi}$ equivale a rotar un ángulo de φ radianes alrededor del origen, en sentido antihorario. Si denotamos esta rotación mediante R entonces

$$R(z) = e^{i\varphi} z.$$

Observe que en particular una rotación de $90°$ equivale a multiplicar por i.

Una rotación $R_{u,\varphi}$ de centro u y ángulo φ se puede describir trasladando hacia el origen y deshaciendo luego la traslación, es decir

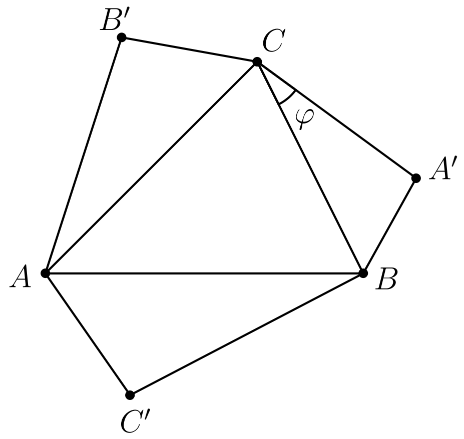
$$R_{u,\varphi}(z) = e^{i\varphi}(z - u) + u.$$

7.5. Rotohomotecia

Una rotohomotecia es una rotación seguida de una homotecia con el mismo centro. La rotohomotecia S de centro en el origen, ángulo φ y razón $k \in \mathbb{R}$ se describe simplemente multiplicando por $k \operatorname{cis} \varphi$, es decir

$$S(z) = (k \operatorname{cis} \varphi) z.$$

Ejemplo 6. Sea ABC un triángulo. Sea A' un punto no alineado con B y C. Sean B' y C' puntos tales que los triángulos $B'CA$ y $C'AB$ sean directamente semejantes al $A'BC$. Probar que el baricentro de $A'B'C'$ coincide con el de ABC.



Solución: Sea $r = CA'/CB$ y $\varphi = \angle BCA'$. Entonces $A' = C + re^{i\varphi}(B - C)$. Análogamente $B' = A + re^{i\varphi}(C - A)$ y $C' = B + re^{i\varphi}(C - B)$. Luego

$$A' + B' + C' = A + B + C + re^{i\varphi}((B - C) + (C - A) + (C - B)) = A + B + C$$

y en consecuencia $\frac{1}{3}(A' + B' + C') = \frac{1}{3}(A + B + C)$.

7.6. Simetría axial

La simetría respecto al eje real es la conjugación: z se transforma en $\overline{z}$. La simetría respecto a una recta que pasa por el origen formando un ángulo φ con el eje real se puede describir haciendo una rotación que lleve esa recta al eje real, aplicando la conjugación y finalmente deshaciendo la rotación, es decir

$$z \to ze^{-i\varphi} \to \overline{z}e^{i\varphi} \to \overline{z}e^{i\varphi}e^{i\varphi}.$$

En definitiva

$$S(z) = \overline{z}e^{2i\varphi}.$$

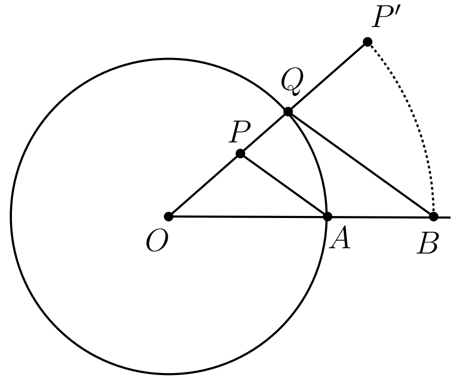
7.7. Inversión

Una trasnformación del plano en si mismo de mucha utilidad es la conocida con el nombre de *inversión*. Ella se define de la siguiente manera.

Definición 3. Sea k un número real positivo y sea O el origen del sistema de coordenadas. La inversión de centro O y potencia k^2 es una transformación del plano en si mismo, que a cada punto P le asocia el punto P', tal que

P' y P están en la misma semirrecta de origen O, (son colineales con O), y $OP \cdot OP' = k^2$.

En la siguiente figura mostramos como se puede obtener con regla y compás el inverso de un punto P.



En la figura tenemos el punto P y la circunferencia de centro O y radio k, llamada circunferencia de inversión. Sea A el punto de intersección de esta circunferencia con el eje de las x y unamos los puntos P y A. Sea Q el punto de intersección de la circunferencia de inversión con la semirrecta OP. Tracemos por Q la paralela a PA y sea B el punto de intersección de esta recta con el eje de las x. Tenemos ahora los triángulos OAP y OBQ los cuales son semejantes, por lo tanto

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OA}{OB},$$

es decir

$$OP \cdot OB = OA \cdot OQ = k^2.$$

Por lo tanto, $OP' = OB$. Si ahora trazamos la circunferencia de centro O y radio OB, la intersección de ella con la semirrecta OP es el punto P'.

Ejercicio. Demuestre que:

(a) Puntos interiores a la circunferencia de inversión tienen como inversos puntos exteriores a ella y viceversa.

(b) Si P' es el inverso de P, entonces P es el inverso de P'.

Veamos el concepto de inversión usando coordenadas cartesianas. Sea $P \neq O$. Si $P = (x, y)$, entonces como P' está en la semirrecta OP, las coordenadas de P' serán de la forma (tx, ty), con $t > 0$. Ahora bien, como

$$OP \cdot OP' = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = t \cdot (x^2 + y^2),$$

y como $x^2 + y^2 \neq 0$, tenemos que

$$t = \frac{k^2}{x^2 + y^2}.$$

Luego, si $P = (x, y)$, entonces

$$P' = \left(\frac{k^2x}{x^2 + y^2}, \frac{k^2y}{x^2 + y^2} \right).$$

Ejercicio. Calcule el inverso P' del punto $P = (1, -2)$, mediante la inversión de centro en el origen O y potencia 2.

Una vez que hemos introducido coordenadas para analizar el concepto de inversión, podemos usar también números complejos. Sabemos que si $z = x + iy$, entonces $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{|z|^2}$, es decir

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2}$$

y

$$\frac{k^2}{\overline{z}} = \frac{k^2x}{x^2 + y^2} + i\frac{k^2y}{x^2 + y^2}.$$

Por lo tanto, la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por

$$f(z) = \frac{k^2}{\overline{z}}$$

describe la inversión de centro O y potencia k. La función f transforma cada número complejo z en su inverso.

Ahora usaremos esta caracterización para demostrar varias propiedades geométricas que satisface la inversión.

Proposición 5. *El inverso de una circunferencia que contiene el centro de inversión es una recta, perpendicular a la recta que contiene el centro de la circunferencia y el centro de inversión.*

Demostración. Tomemos un sistema de coordenadas en el cual el origen O sea el centro de inversión, y el eje de las x contenga el centro $R = (r, 0)$ de la circunferencia (con r el radio de la circunferencia). La circunferencia que estamos considerando es el lugar geométrico de los puntos que corresponden a los números complejos z tales que $|z - r| = r$. Con la notación usada previamente, sea f la función que describe la inversión y sea $w = f(z)$, es decir $w = \dfrac{k^2}{\overline{z}}$. Entonces $z = \dfrac{k^2}{\overline{w}}$ y el inverso de la circunferencia será el lugar geométrico que corresponde a los números complejos w tales que

$$\left|\frac{k^2}{\overline{w}} - r\right| = r,$$

es decir, $|k^2 - r\overline{w}| = r|\overline{w}|$. Elevando ahora ambos miembros al cuadrado y por ser $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, para todo número complejo z tenemos que

$$(k^2 - r\overline{w})(k^2 - rw) = r^2 w\overline{w}.$$

Simplificando nos queda $w + \overline{w} = \frac{k^2}{r}$ o sea

$$\mathrm{Re}(w) = \frac{k^2}{2r}.$$

Pero esta es la ecuación de la recta $x = \frac{k^2}{2r}$, la cual es perpendicular al eje de las x, como queríamos demostrar. $\square$

Corolario 1. *El inverso de una recta que no contiene el centro de inversión es una circunferencia en la cual uno de los diámetros tiene como puntos extremos el centro de inversión y el inverso del pie de la perpendicular a la recta desde el centro de inversión.*

Demostración. De nuevo consideremos que nuestro sistema de coordenadas tiene su origen en el centro de la inversión y que el eje de las x sea perpendicular a la recta dada, de esta forma su ecuación es $x = a$, con $a \neq 0$. Tomemos $r = \dfrac{k^2}{2a}$, de la demostración del teorema anterior tenemos que el inverso del eje de las x es la circunferencia de centro $(r, 0)$ y radio r, que es una circunferencia que contiene al centro de inversión $(0, 0)$ y en la que el punto $(2r, 0)$ es el otro extremo del diámetro que contiene a $(0, 0)$. Como $2r \cdot a = k^2$, concluimos que el punto $(2r, 0)$ es el inverso del punto $(a, 0)$. $\square$

¿Qué se puede decir del inverso de una circunferencia que no contenga al centro de inversión? Adoptemos un sistema de coordenadas en el cual el eje de las x sea la recta que contiene el centro de inversión y el centro de la circunferencia y supongamos de nuevo que el centro de inversión es el punto $O = (0, 0)$. Entonces el centro de la circunferencia corresponde a un punto de coordenadas $(a, 0)$, o bien al número real a. La circunferencia de centro es este punto y radio r tiene ecuación $|z - a| = r$ y su inverso es el lugar geométrico determinado por la ecuación

$$\left|\frac{k^2}{\overline{w}} - a\right| = r,$$

es decir, $|k^2 - a\overline{w}| = r|\overline{w}|$. Procediendo como en la demostración del teorema anterior obtenemos

$$(k^2 - a\overline{w}) \cdot (k^2 - aw) = r^2 w\overline{w}.$$

Como la circunferencia no contien al origen, entonces $a \neq r$. Simplificando nos queda

$$(r^2 - a^2)w\overline{w} + k^2 aw + k^2 a\overline{w} - k^4 = 0,$$

o bien

$$w\overline{w} + \frac{k^2 a}{r^2 - a^2} w + \frac{k^2 a}{r^2 - a^2}\overline{w} - \frac{k^4}{r^2 - a^2} = 0,$$

de donde

$$\left(w + \frac{k^2 a}{r^2 - a^2}\right) \cdot \left(\overline{w} + \frac{k^2 a}{r^2 - a^2}\right) = k^4 \frac{r^2}{(r^2 - a^2)^2},$$

y finalmente,

$$\left|w - \frac{k^2 a}{r^2 - a^2}\right| = \frac{k^2 r}{|r^2 - a^2|},$$

que es una circunferencia con centro en

$$\left(\frac{k^2 a}{r^2 - a^2}, 0\right)$$

y radio

$$\frac{k^2 r}{|r^2 - a^2|}.$$

Hemos demostrado entonces la siguiente

Proposición 6. *El inverso de una circunferencia que no contiene el centro de inversión es otra circunferencia.*

Finalizamos esta sección con otro resultado cuya demostración queda como ejercicio.

Proposición 7. *Las rectas que contienen el centro de inversión son sus propias inversas.*

Sugerencia: Exprese la ecuación $y = \frac{a}{b}x$, de una recta que pasa por el origen, como $by = ax$.

Problemas.

1. Determine, en una inversión, cuáles puntos son sus propios inversos.

2. Verdadero o falso. La inversión es una isometría. Justifique su respuesta.

3. Si $k = 2$, y $O = (0, 0)$, determine los inversos:

(a) del punto $(0, 1)$

(b) del punto $(3, 1)$

(c) de la recta $3x - y = 0$

(d) de la circunferencia $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

4. Sabemos que el inverso de una circunferencia Γ que no contiene el centro de inversión es una circunferencia Γ'. Verdadero o falso: El centro de Γ' es el centro de Γ.

5. Demuestre que invirtiendo los lados de un triángulo en relación a su incentro se obtienen tres circunferencias de igual radio.

6. Demuestre que invirtiendo los vértices de un triángulo en relación a su circuncentro se obtiene un triángulo semejante.

7. Las circunferencias ABD y DBC se intersectan ortogonalmente. Demuestre que las circunferencias ADB y ADC también se cortan ortogonalmente.

8. Determine el inverso del punto $(2, 1)$ siendo $(1, 5)$ el centro de inversión y 3 la potencia de inversión.

Referencias

[1] Andreescu, T., Andrica, D., *Complex numbers from A to Z*, Birkhauser, Boston, 2006.

[2] Bulajich, R., Gómez, J. A., Valdez, R., *Algebra*, UNAM, México DF, 2014.

[3] Hahn, Liang-shin, *Complex numbers and geometry*, MAA, 1994.