Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
ACM

OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA
Prueba Nacional — Valencia, 2 de junio de 2012
Quinto Año

Apellidos y Nombres:______________________________ **Nº de Cédula:**____________

Teléfono(s):_______________ **Dirección de correo electrónico:**______________________

Instituto:__________________________ **Ciudad:**____________ **Estado:**____________

(No escriba en esta línea) Puntos: 1_____ **2** _____ **3** _____ **4** _____ **Total:**______________

Todas las respuestas deben justificarse.
Duración de la prueba: 4 horas
Valor de cada problema: 7 puntos

Problema 1. Encuentre todos los enteros a diferentes de cero y de 4, tales que el número $\dfrac{a}{a-4}+\dfrac{2}{a}$ también es un entero.

Problema 2. (a) Pruebe que para todo n se cumple

$$n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2-(n+4)^2+(n+5)^2+(n+6)^2-(n+7)^2=0.$$

(b) En el pizarrón están escritos los cuadrados de los números del 1 al 2012: 1^2, 2^2, 3^2,..., 2012^2. Hay que escribir delante de cada número un signo $+$ ó $-$ de manera que, al realizar la suma algebraica de los 2012 números, se obtenga el menor valor positivo que sea posible. Determine cuál es ese mínimo e indique una manera de distribuir los signos para lograrlo.

Problema 3. Consideremos los puntos con ambas coordenadas enteras en el plano cartesiano, en el origen (0,0) se coloca el 1, en (1,0) se coloca el 2, en (1,1) se coloca el 3, y así sucesivamente se van colocando los enteros positivos en espiral alrededor del origen (ver figura). Determine las coordenadas del punto donde se colocará el 2012.

17	16	15	14	13	
18	5	4	3	12	⋮
19	6	1	2	11	28
20	7	8	9	10	27
21	22	23	24	25	26

Problema 4. Sea ABC un triángulo equilátero y P un punto interior tal que $PA=5$, $PB=4$, $PC=3$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BPC$?