

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA  
Prueba Nacional — Valencia, 2 de junio de 2012  
Quinto Año

Apellidos y Nombres: \_\_\_\_\_ N° de Cédula: \_\_\_\_\_

Teléfono(s): \_\_\_\_\_ Dirección de correo electrónico: \_\_\_\_\_

Instituto: \_\_\_\_\_ Ciudad: \_\_\_\_\_ Estado: \_\_\_\_\_

(No escriba en esta línea) Puntos: 1 \_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_ 3 \_\_\_\_\_ 4 \_\_\_\_\_ Total: \_\_\_\_\_

Todas las respuestas deben justificarse.

Duración de la prueba: 4 horas

Valor de cada problema: 7 puntos

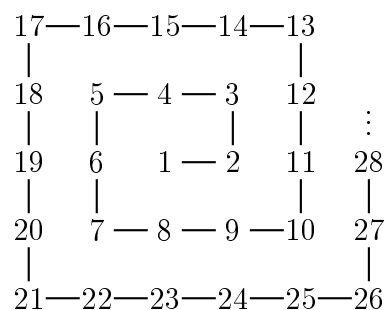
**Problema 1.** Encuentre todos los enteros  $a$  diferentes de cero y de 4, tales que el número  $\frac{a}{a-4} + \frac{2}{a}$  también es un entero.

**Problema 2.** (a) Pruebe que para todo  $n$  se cumple

$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 - (n+4)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2 - (n+7)^2 = 0.$$

(b) En el pizarrón están escritos los cuadrados de los números del 1 al 2012:  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2012^2$ . Hay que escribir delante de cada número un signo  $+$  ó  $-$  de manera que, al realizar la suma algebraica de los 2012 números, se obtenga el menor valor positivo que sea posible. Determine cuál es ese mínimo e indique una manera de distribuir los signos para lograrlo.

**Problema 3.** Consideremos los puntos con ambas coordenadas enteras en el plano cartesiano, en el origen  $(0,0)$  se coloca el 1, en  $(1,0)$  se coloca el 2, en  $(1,1)$  se coloca el 3, y así sucesivamente se van colocando los enteros positivos en espiral alrededor del origen (ver figura). Determine las coordenadas del punto donde se colocará el 2012.



**Problema 4.** Sea  $ABC$  un triángulo equilátero y  $P$  un punto interior tal que  $PA = 5$ ,  $PB = 4$ ,  $PC = 3$ . ¿Cuánto mide el ángulo  $\angle BPC$ ?