

**OLIMPIÁDA JUVENIL DE MATEMÁTICA**  
**Prueba Nacional — Caracas, 15 de junio de 2013**  
**Quinto Año**

Apellidos y Nombres: \_\_\_\_\_ N° de Cédula: \_\_\_\_\_

Teléfono(s): \_\_\_\_\_ Dirección de correo electrónico: \_\_\_\_\_

Instituto: \_\_\_\_\_ Ciudad: \_\_\_\_\_ Estado: \_\_\_\_\_

(No escriba en esta línea) Puntos: 1 \_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_ 3 \_\_\_\_\_ 4 \_\_\_\_\_ Total: \_\_\_\_\_

Todas las respuestas deben justificarse.

Duración de la prueba: 3 horas y media

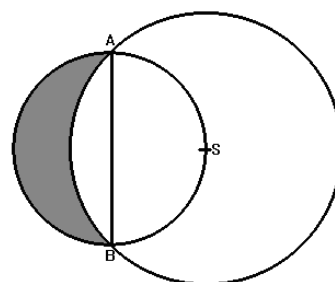
Valor de cada problema: 7 puntos

**Problema 1.** El producto de todos los divisores de un número natural  $n$  (incluidos 1 y el mismo  $n$ ) es igual a  $n^4$ .

(a) ¿Cuántos divisores tiene  $n$ ?

(b) ¿Cuál es el menor valor posible de  $n$ ?

**Problema 2.** Dos circunferencias se construyen como se muestra en la figura. El segmento  $AB$  es el diámetro de la circunferencia más pequeña. El centro  $S$  de la circunferencia mayor se encuentra en la circunferencia más pequeña. El radio de la circunferencia mayor es  $R$ . Calcule el área de la región sombreada en función de  $R$ .



**Problema 3.** Hallar todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que para todo  $x$  e  $y$  reales se cumple que

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy.$$

**Problema 4.** Una pulga se halla en el suelo, al pie de una escalera de 30 escalones. La pulga sólo puede dar saltos de 3 escalones hacia arriba o de 4 escalones hacia abajo. ¿De cuántas maneras puede subir hasta el escalón 22 en el menor número posible de saltos?