



OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA
Prueba Nacional — Caracas, 21 de junio de 2014
Cuarto Año

Apellidos y Nombres: _____ N° de Cédula: _____

Teléfono(s): _____ Dirección de correo electrónico: _____

Instituto: _____ Ciudad: _____ Estado: _____

(No escriba en esta línea) Puntos: 1 _____ 2 _____ 3 _____ 4 _____ Total: _____

Todas las respuestas deben justificarse.

Duración de la prueba: 3 horas y media

Valor de cada problema: 7 puntos

Problema 1. Todos los boletos para la primera fila en un teatro fueron vendidos. Los asientos están numerados en forma consecutiva a partir del 1. Por error, para uno de los asientos se vendieron dos boletos. Si la suma de los números de asiento en los boletos vendidos de esa fila es 857, ¿cuál es el número del asiento del cual se vendieron dos boletos?

Problema 2. Sea f una función de los reales positivos en los reales positivos, tal que

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

para todos los $x, y > 0$.

(a) Halle $f(1)$.

(b) Halle una expresión para $f(x)$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo rectángulo en A . Sea D el pie de la perpendicular desde A a BC , sea E el punto donde la bisectriz del ángulo en A corta al lado BC y sea F el punto medio del lado BC . Pruebe que $\angle DAE = \angle EAF$.

Problema 4. Diego construye una sucesión de enteros de la siguiente manera: comienza por escribir 2, 0, 1, 4, y a partir de aquí suma los últimos cuatro números escritos y escribe el dígito de las unidades de esa suma. Así, los primeros términos de la sucesión son 2, 0, 1, 4, 7, 2, 4, ...

(a) ¿Aparecerán de nuevo en esta secuencia los números iniciales 2, 0, 1, 4, consecutivos y en ese orden?

(b) ¿Aparecerán en esta secuencia los números 2, 0, 1, 5, consecutivos y en ese orden?