

OLIMPIÁDA JUVENIL DE MATEMÁTICA  
Prueba Nacional — Caracas, 21 de junio de 2014  
Quinto Año

Apellidos y Nombres: \_\_\_\_\_ N° de Cédula: \_\_\_\_\_

Teléfono(s): \_\_\_\_\_ Dirección de correo electrónico: \_\_\_\_\_

Instituto: \_\_\_\_\_ Ciudad: \_\_\_\_\_ Estado: \_\_\_\_\_

(No escriba en esta línea) Puntos: 1 \_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_ 3 \_\_\_\_\_ 4 \_\_\_\_\_ Total: \_\_\_\_\_

Todas las respuestas deben justificarse.

Duración de la prueba: 3 horas y media

Valor de cada problema: 7 puntos

**Problema 1.** Considere las dos operaciones siguientes que pueden ser aplicadas a una fracción: (1) aumentar el numerador en 8; (2) aumentar el denominador en 7. Comenzando con la fracción  $\frac{7}{8}$ , luego de realizar un total de  $n$  operaciones de los tipos descritos, en algún orden, se obtuvo una fracción de igual valor. ¿Cuál es el menor valor posible de  $n$ ?

**Problema 2.** Sea  $f$  una función de los reales positivos en los reales positivos, tal que

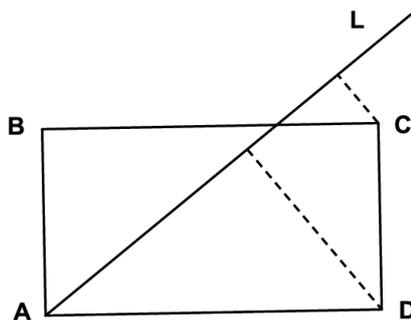
$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

para todos los  $x, y > 0$ .

(a) Halle  $f(1)$ .

(b) Halle una expresión para  $f(x)$ .

**Problema 3.** La recta  $L$  pasa por el vértice  $A$  de un rectángulo  $ABCD$ . La distancia del punto  $C$  a  $L$  es 2, y la distancia del punto  $D$  a  $L$  es 6. Si  $AD$  mide el doble que  $AB$ , ¿cuánto mide  $AD$ ?



**Problema 4.** Diego construye una sucesión de enteros de la siguiente manera: comienza por escribir 2, 0, 1, 4, y a partir de aquí suma los últimos cuatro números escritos y escribe el dígito de las unidades de esa suma. Así, los primeros términos de la sucesión son 2, 0, 1, 4, 7, 2, 4, ...

(a) ¿Aparecerán de nuevo en esta secuencia los números iniciales 2, 0, 1, 4, consecutivos y en ese orden?

(b) ¿Aparecerán en esta secuencia los números 2, 0, 1, 5, consecutivos y en ese orden?