Olimpiadas Matemáticas 2010

(OJM, OMCC, OIM, IMO)

Problemas y Soluciones

José Heber Nieto Said
Rafael Sánchez Lamoneda
Laura Vielma Herrero

Índice general

Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas son competencias dirigidas principalmente a jóvenes de escuela elemental y secundaria. Actualmente esta actividad se ha extendido por todo el mundo debido a su gran efectividad en la popularización de las matemáticas y en la detección de jóvenes con talento para el estudio de esta ciencia.

El presente libro reúne todos los problemas propuestos en la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, OJM 2010. También presentamos los problemas de las tres competencias internacionales a las cuales asistimos durante este año: la 51^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) celebrada en Astana, Kazajstán, del 2 al 14 de julio, la XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe (OMCC) celebrada en Mayagüez, Puerto Rico, del 21 de mayo al 1 de Junio y la XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM) celebrada en Asunción, Paraguay, del 20 al 30 de septiembre. Cada una de estas tres competencias internacionales consta de dos exámenes, presentados en días consecutivos, cada uno tiene tres problemas y los participantes disponen de cuatro horas y media, cada día, para resolverlos. El valor de cada pregunta es de 7 puntos, para un máximo posible de 42 puntos en la competencia. Los ganadores reciben medallas de oro, plata o bronce y mención honorífica, según sea su desempeño. En los tres eventos nuestros alumnos ganaron premios. Carmela Acevedo de la Academia Washington, Caracas, ganó Mención Honorífica en la IMO. Diego Peña, del colegio Los Hipocampitos de los Altos Mirandinos, ganó medalla de plata en la OMCC y medalla de Bronce en la OIM. Carlos Lamas del colegio Independencia de Barquisimeto, ganó medalla de Bronce en la OMCC y Mención Honorífica en la OIM. Sergio Villarroel, del colegio San Lázaro de Cumaná, ganó medalla de Bronce en la OMCC. Edenys Hernao del colegio Altamira de Maracaibo y Tomás Rodríguez del colegio Arco Iris de Porlamar, ganaron Mención Honorífica en la OIM. Además el equipo que participó en la OMCC, Diego Peña, Sergio Villarroel y Carlos Lamas, ganó la Copa El Salvador, trofeo que se otorga al país de mayor avance en la OMCC en tres años consecutivos.

La OJM consta de tres etapas o pruebas. La primera de ellas es el *Canguro Matemático*, un examen de treinta problemas de selección simple, que fue presentado por 61.693 estudiantes provenientes de 22 estados del país. La segunda etapa de la competencia es la *Prueba Final Regional*. La misma consta de un examen de cinco problemas de desarrollo y compiten los alumnos que quedaron ubicados en el diez por ciento superior en el Canguro Matemático. Esta prueba se organiza en cada estado que participa en la OJM y los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce. La tercera y última fase es la *Prueba Final Nacional*; en ella participan los alumnos ganadores de medalla de oro en la Prueba Final Regional. Los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce, menciones de honor y varios premios especiales.

Tanto en la primera como en la segunda etapa, los alumnos participantes presentan sus exámenes en la ciudad donde viven. Para la Final Nacional se elige cada año una sede y allí se organiza el evento, permitiendo a los participantes, sus profesores y representantes, estrechar lazos de amistad y compartir una experiencia educativa enriquecedora. La Prueba Final Nacional 2010 se realizó en la *Universidad Rafael Urdaneta*, en Maracaibo, Estado Zulia, y participaron 93 alumnos representando a 17 estados.

Este libro consta de seis capítulos. Los tres primeros cubren la OJM, dedicando un capítulo a cada fase de la competencia. Los tres últimos capítulos se dedican a las competencias internacionales. En ellos se presentan los problemas y sus soluciones. Esperamos que sea de gran utilidad tanto para profesores como para estudiantes, y que les permita conocer las matemáticas desde un punto de vista interesante y entretenido.

Aprovechamos la oportunidad para agradecer a nuestros patrocinadores, en especial a la *Fundación Empresas Polar*, al *Banco Central de Venezuela*, a la *Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales*, a la *Facultad de Ciencias de la UCV* junto a la *Fundación Amigos de Ciencias*, a la *Universidad Simón Bolívar*, a la *Universidad Rafael Urdaneta*, a *Acumuladores Duncan* y *Acumuladores Titán*, a *MRW* y a la *Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman*, así como a todos los colegas que con su trabajo y esfuerzo, permiten que la Olimpiada Juvenil de Matemáticas sea una realidad.

Capítulo 1

Prueba Preliminar (Canguro Matemático)

1.1. Prueba de Primer Año y Segundo Año

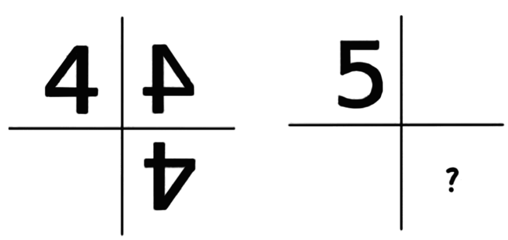
Problema 1. Una clase de 40 minutos comienza a las 11:50 am. Exactamente a la mitad de la clase, un pájaro entró en el salón. ¿A qué hora entró el pájaro al salón?

Ⓐ 12:20; Ⓑ 12:00; Ⓒ 12:30; Ⓓ 11:30; Ⓔ 12:10.

Problema 2. En un restaurante, el plato de entrada cuesta 4 Bs., el plato principal cuesta 9 Bs. y el postre 5 Bs. Por otro lado, el menú ejecutivo, que consta del plato de entrada, plato principal y postre, tiene un valor de 15 Bs. ¿Cuánto dinero ahorras si pides el menú ejecutivo?

Ⓐ 5 Bs.; Ⓑ 4 Bs.; Ⓒ 3 Bs.; Ⓓ 6 Bs.; Ⓔ 7 Bs.

Problema 3. El número 4 está próximo a dos espejos, por lo tanto, se refleja como muestra la figura. Si ocurre lo mismo con el número 5, ¿qué se obtiene donde aparece el signo de interrogación?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 4. Cuatro amigos comen helado. Se sabe que:

– Rafael come más que Verónica,
– Jairo come más que Víctor,
– Jairo come menos que Verónica.

¿Cuál de las siguientes listas ordena a los amigos del que come más al que come menos?

(A) Rafael, Jairo, Víctor, Verónica; (B) Víctor, Rafael, Verónica, Jairo;
(C) Rafael, Verónica, Jairo, Víctor; (D) Jairo, Víctor, Rafael, Verónica;
(E) Jairo, Rafael, Víctor, Verónica.

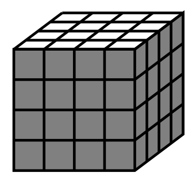
Problema 5. Sabiendo que $\blacktriangle + \blacktriangle + 6 = \blacktriangle + \blacktriangle + \blacktriangle + \blacktriangle$, ¿cuál es el valor de $\blacktriangle$?

(A) 6; (B) 5; (C) 4; (D) 3; (E) 2.

Problema 6. Marcos y Clara viven en el mismo edificio. El apartamento de Clara está doce pisos por encima del apartamento de Marcos. Un día Marcos subía por las escaleras para visitar a Clara y en la mitad de su camino se encontraba en el octavo piso. ¿En cuál piso vive Clara?

(A) 12; (B) 14; (C) 16; (D) 20; (E) 24.

Problema 7. Un cubo grande está formado por 64 pequeños cubos blancos, de igual tamaño. Si 5 de las caras del cubo grande se pintan de gris, ¿cuántos cubos pequeños quedan con tres caras pintadas de gris?



(A) 24; (B) 20; (C) 16; (D) 8; (E) 4.

Problema 8. Un ferry puede transportar 10 carros pequeños o 6 camionetas en un viaje. El miércoles cruzó el río 5 veces, siempre lleno, y transportó 42 vehículos. ¿Cuántos carros pequeños transportó?

(A) 10; (B) 12; (C) 20; (D) 22; (E) 30.

Problema 9. Si ambas filas tienen la misma suma, ¿cuál es el valor de $*$?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	199
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$*$

(A) 99; (B) 100; (C) 209; (D) 289; (E) 299.

Problema 10. El producto $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 7$ es igual a:

(A) el número de minutos en siete semanas;
(B) el número de horas en siete días;
(C) el número de segundos en siete horas;

Ⓓ el número de segundos en una semana;
Ⓔ el número de minutos en veinticuatro semanas.

Problema 11. Una escalera tiene 21 escalones. Nicolás comienza a contar los escalones de abajo hacia arriba, y Miguel los cuenta de arriba hacia abajo. Ambos se encuentran en un escalón que, para Nicolás, es el número 10. ¿Qué número tiene este escalón para Miguel?

Ⓐ 12; Ⓑ 14; Ⓒ 11; Ⓓ 13; Ⓔ 10.

Problema 12. Una mosca tiene 6 patas, mientras que una araña tiene 8 patas. Juntas, 2 moscas y 3 arañas tienen tantas patas como 10 pájaros y:

Ⓐ 2 gatos; Ⓑ 3 gatos; Ⓒ 4 gatos; Ⓓ 5 gatos; Ⓔ 6 gatos.

Problema 13. Camila escribió, en una tabla de cinco columnas, todos los enteros positivos del 1 al 100 en secuencia. La figura muestra una parte de la tabla. Rodrigo, su hermano, cortó en partes la tabla y borró algunos números. ¿Cuál de las figuras puede ser parte de la tabla que escribió Camila?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Ⓐ

	43			
		48		

Ⓑ

		58		
	52			

Ⓒ

			69	
	72			

Ⓓ

	81			
	86			

Ⓔ

	90			
			94	

Problema 14. La biblioteca de la escuela a la que asisten Ana, Beatríz y Carlos tiene un gran número de libros. “Hay aproximadamente 2010 libros”, dice el profesor e invita a los tres estudiantes a adivinar el número exacto. Ana dice que hay 2010 libros, Beatríz comenta que hay 1998 libros y Carlos dice que hay 2015 libros. El profesor dice que la diferencia entre los números que comentaron y el valor exacto es de 12, 7 y 5, pero no en este mismo orden. ¿Cuántos libros hay en la biblioteca?

Ⓐ 2003; Ⓑ 2005; Ⓒ 2008; Ⓓ 2020; Ⓔ 2022.

Problema 15. Andrés, Esteban, Roberto y Marcos se conocen en un concierto en Caracas. Ellos vienen de diferentes ciudades: Coro, Valencia, Anaco y Mérida. Se posee la siguiente información:

- Andrés y el chico de Mérida llegaron a Caracas temprano en la mañana el día del concierto. Ninguno de ellos ha estado en Coro ni en Anaco.
- Roberto no es de Mérida pero llegó a Caracas el mismo día que el chico de Coro.
- Marcos y el chico de Coro disfrutaron mucho el concierto.

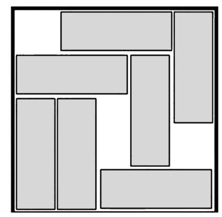
¿De qué ciudad viene Marcos?

Ⓐ Coro; Ⓑ Anaco; Ⓒ Valencia; Ⓓ Mérida; Ⓔ Caracas.

Problema 16. Cada uno de los amigos de Basilio sumó el número del día y el número del mes de su cumpleaños y el resultado fue 35. Si todos cumplen años en fechas diferentes, ¿cuál es el número máximo posible de amigos que tiene Basilio?

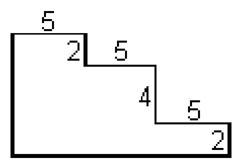
Ⓐ 12; Ⓑ 8; Ⓒ 10; Ⓓ 7; Ⓔ 9.

Problema 17. En una caja de 5×5 hay siete barras de 3×1, como muestra la figura. Se desea deslizar algunas barras de modo que quede espacio para una barra adicional. ¿Cuántas barras hay que mover, como mínimo?



Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 3; Ⓓ 4; Ⓔ 5.

Problema 18. ¿Cuál es el perímetro de la figura, si todos los ángulos son rectos?



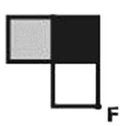
Ⓐ $3 \times 5 + 4 \times 2$; Ⓑ $3 \times 5 + 8 \times 2$; Ⓒ $6 \times 5 + 4 \times 2$;
Ⓓ $6 \times 5 + 6 \times 2$; Ⓔ $6 \times 5 + 8 \times 2$.

Problema 19. La figura muestra cinco proyecciones de nudos. Pero sólo uno de ellos es un verdadero nudo, los demás sólo lo aparentan. ¿Cuál es el nudo verdadero?

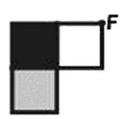
Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

Problema 20. Si la figura 

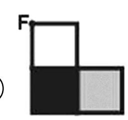
se gira media vuelta alrededor del punto F, el resultado es:

Ⓐ 

; Ⓑ 

; Ⓒ 

; Ⓓ 

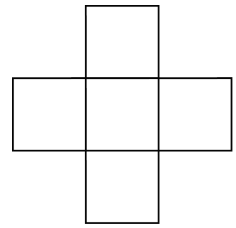
; Ⓔ 

.

Problema 21. Bernardo seleccionó un número, lo dividió entre 7, al resultado le sumó 7 y a la suma la multiplicó por 7. Si así obtuvo el número 777, ¿qué número seleccionó inicialmente?

Ⓐ 7; Ⓑ 728; Ⓒ 567; Ⓓ 722; Ⓔ 111.

Problema 22. Los números 1, 4, 7, 10 y 13 deben escribirse en la figura, uno en cada celda cuadrada, de modo que la suma de los tres números en la fila horizontal sea igual a la suma de los tres números en la columna vertical. ¿Cuál es el mayor valor posible de esa suma?

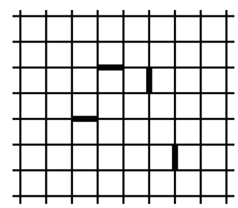


Ⓐ 18; Ⓑ 22; Ⓒ 21; Ⓓ 24; Ⓔ 20.

Problema 23. Un periódico de 60 páginas se arma con 15 hojas de papel, que se colocan una encima de otra y luego se doblan a la mitad. Si en un periódico falta la página 7, ¿cuáles otras faltarán obligatoriamente?

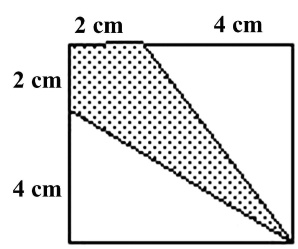
Ⓐ 8, 9 y 10; Ⓑ 8, 42 y 43; Ⓒ 8, 48 y 49; Ⓓ 8, 53 y 54; Ⓔ 8, 52 y 53.

Problema 24. Una hormiga camina por las líneas de una cuadrícula. Comienza su trayecto en cierto punto P, al cual regresa al final de su paseo. Aparte de P, la hormiga no visita dos veces ningún otro punto. El trayecto debe incluir obligatoriamente los cuatro segmentos resaltados. ¿Cuál es el menor número posible de celdas cuadradas que quedan encerradas por la trayectoria de la hormiga?



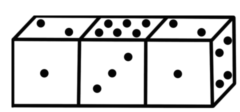
Ⓐ 9; Ⓑ 8; Ⓒ 11; Ⓓ 10; Ⓔ 13.

Problema 25. ¿Qué fracción del cuadrado está sombreada?



Ⓐ $\frac{1}{3}$; Ⓑ $\frac{1}{4}$; Ⓒ $\frac{1}{5}$; Ⓓ $\frac{3}{8}$; Ⓔ $\frac{2}{9}$.

Problema 26. Tres dados idénticos se pegan juntos como muestra la figura. La suma de los puntos de dos caras opuestas de un dado es siempre 7. ¿Cuál es la suma de los puntos de las caras que están pegadas?

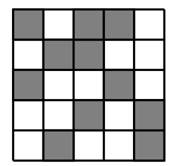


Ⓐ 12; Ⓑ 14; Ⓒ 13; Ⓓ 16; Ⓔ 15.

Problema 27. Para decidir quien se comerá el último trozo de su torta de cumpleaños, Elena y sus amigas Sara, Ana, Petra y María forman un círculo en ese orden, en sentido horario. Cada una de ellas, en sentido horario, pronuncia una sílaba de la frase CAN-GU-RO-FUE-RA-YO. A la que le toca decir la última sílaba (YO) sale del juego. Ellas repiten esto hasta que quede una sola. Elena puede elegir quién comienza. ¿A quién debe elegir para que el último trozo de torta le quede a su mejor amiga María?

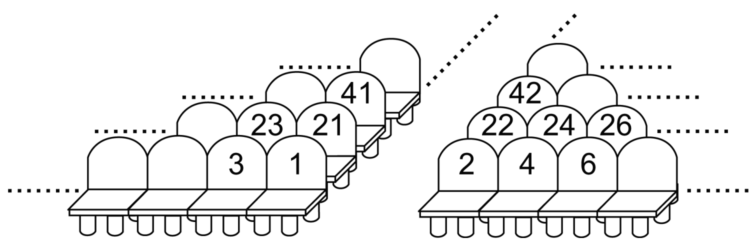
(A) Sara; (B) Petra; (C) María; (D) Elena; (E) Ana.

Problema 28. ¿Cuántas celdas oscuras deben pintarse de blanco para que en cada fila y en cada columna haya exactamente una celda oscura?



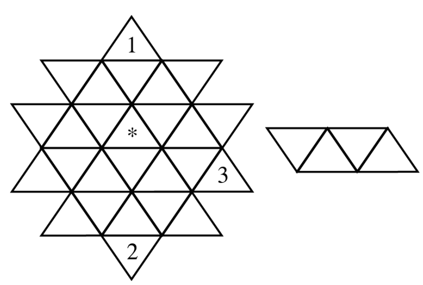
(A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 7;
(E) No se puede lograr.

Problema 29. Ana compró un boleto para el asiento número 100. Beatriz quiere sentarse lo más cerca que pueda de Ana, pero sólo quedan disponibles boletos para los asientos 76, 94, 99, 104 and 118. ¿Cuál le conviene comprar?



(A) 94; (B) 76; (C) 99; (D) 104; (E) 118.

Problema 30. En cada triángulo hay que escribir uno de los números 1, 2, 3 ó 4 (en tres triángulos ya se ha hecho), de manera que si la pieza de la derecha se coloca cubriendo exactamente cuatro triángulos, los números cubiertos sean todos diferentes (la pieza se puede girar antes de colocarla). ¿Qué número debe ir en el triángulo marcado con $*$?



(A) sólo el 1; (B) sólo el 2; (C) sólo el 3; (D) sólo el 4;
(E) cualquiera entre 1, 2 y 3.

1.1.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (E), ya que 20 minutos después de las 11:50 son las 12:10.

2. Se ahorra $(4+9+5)-15=3$, por tanto, la respuesta correcta es la (C).

3. Si se refleja el 5 en el espejo vertical se obtiene la figura (D), y al reflejar ésta en el espejo horizontal se obtiene (A), que es la respuesta correcta.

4. La respuesta correcta es la (C), ya que Rafael come más que Verónica, que come más que Jairo, que come más que Víctor.

5. Cancelando $\blacktriangle+\blacktriangle$ a cada lado de la igualdad resulta $6=\blacktriangle+\blacktriangle$, por lo tanto, $\blacktriangle=3$. La respuesta correcta es la (D).

6. A la mitad de su camino se encontraba en el octavo piso y le faltaban 6 pisos, por ello, Clara vive en el piso $8+6=14$ y la respuesta correcta es la (B).

7. La respuesta correcta es la (E). Quedan 4 cubitos con 3 caras pintadas de gris, a saber los que están en los vértices de la cara opuesta a la que no se pintó.

8. La respuesta correcta es la (E). Como $42=10+10+10+6+6$, transportó 30 carros pequeños.

9. La respuesta correcta es la (A). La suma de los diez primeros números de la segunda fila excede a la suma de los números correspondientes en la primera fila en $10\times10=100$. Para que ambas sumas sean iguales, 199 debe exceder a $*$ en la misma cantidad, es decir que $*=99$.

10. La respuesta correcta es la (D), puesto que la semana tiene 7 días, el día 24 horas, la hora 60 minutos y el minuto 60 segundos.

11. La respuesta correcta es la (A), es decir 12. Por encima del escalón 10 hay 11 escalones, y Miguel debe haber pasado por todos ellos y uno más para encontrarse con Nicolás.

12. La respuesta correcta es la (C): 2 moscas y 3 arañas tienen $2\times6+3\times8=36$ patas, mientras que 10 pájaros tienen 20 patas. Las 16 patas que faltan se pueden conseguir con 4 gatos.

13. La respuesta correcta es la (C). Cada número de la tabla es 5 unidades menor que el que tiene inmediatamente debajo, lo que excluye las posibilidades (A), (B) y (E). Tampoco puede ser (D), pues todos los números de la segunda columna dejan resto 2 al dividirlos entre 5. La única alternativa que queda es (C), que efectivamente corresponde a las filas 14 (66, 67, 68, 69, 70) y 15 (71, 72, 73, 74, 75) de la tabla.

14. Examinando los números desde 1999 en adelante se ve que sólo 2003 cumple todas las condiciones, luego la respuesta correcta es la (A).

15. La respuesta correcta es la (D). De la primera condición se deduce que Andrés sólo puede ser de Valencia. De la segunda se deduce que Roberto es de Anaco. De la tercera, que Marcos es de Mérida.

16. La respuesta correcta es la (E). Para que los amigos de Basilio sean muchos, sus fechas de cumpleaños deben estar compuestas por números pequeños, como 1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2,... dado que $1+1+1+2+2+1+1+3+2+2+3+1+1+4+2+3+3+2 = 35$, Basilio a lo sumo puede tener 9 amigos.

17. La respuesta correcta es la (B). Es obvio que moviendo una sola barra no se consigue. Pero con dos movimientos sí, por ejemplo, moviendo la barra vertical de la columna de la derecha hacia abajo, y luego la barra horizontal en la fila superior hacia la izquierda.

18. La respuesta correcta es la (E). 6×5 es la longitud total de los segmentos horizontales y 8×2 la de los segmentos verticales.

19. La respuesta correcta es la (D). Es fácil visualizar cómo cualquiera de los cuatro "nudos" restantes se puede desenredar.

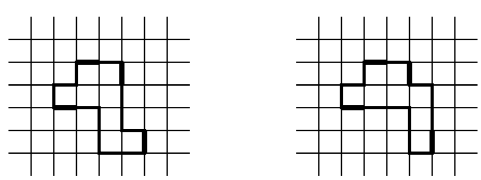
20. La respuesta correcta es la (C). El giro lleva el cuadrado negro a la izquierda del blanco y el gris debajo del negro.

21. La respuesta correcta es la (B). Razonando hacia atrás, antes de multiplicar por 7 tenía $777/7 = 111$, y antes de esto $111-7 = 104$ y al comienzo $104\times 7 = 728$.

22. La respuesta correcta es la (D). Las sumas de los extremos de ambos brazos deben ser iguales, por lo tanto pueden ser (1,10) y (7,4), (1,13) y (4,10) ó (4,13) y (7,10), La mayor suma es $1 + 13 + 10 = 7 + 13 + 4 = 24$.

23. La hoja exterior contiene las páginas 1, 2, 59 y 60; la siguiente 3, 4, 57 y 58; la siguiente 5, 6, 55 y 56; la siguiente 7, 8, 53 y 54. Por lo tanto la respuesta correcta es la (D): 8, 53 y 54.

24. La respuesta correcta es la (B). Las siguientes figuras muestran dos maneras de hacerlo.

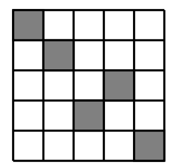


25. La respuesta correcta es la (A). El área de cada triángulo blanco es 12 cm^2, y la del cuadrado 36 cm^2, luego el área de la región sombreada es 12 cm^2, la tercera parte del área del cuadrado.

26. La respuesta correcta es la (B). Como los dados de los extremos son idénticos, la cara derecha del dado de la izquierda es 4, y la cara izquierda del dado de la derecha es $7 - 4 = 3$. Las caras opuestas a las dos caras visibles del dado central son 4 y 1, luego sus caras laterales son 2 y 5. La suma de las caras pegadas es, por lo tanto, $4 + 3 + 2 + 5 = 14$.

27. La respuesta correcta es la (A). Supongamos que comienza Elena. Entonces se eliminarían sucesivamente Elena, Ana, Sara y María y queda Petra. Avanzando un lugar en el círculo formado por las cinco amigas se ve entonces que, si comienza Sara, quedará María.

28. La respuesta correcta es la (C). Si es posible, deben quedar 5 celdas oscuras, para lo cual hay que pintar de blanco 6 celdas oscuras. Y en efecto es posible lograrlo, como muestra la figura.

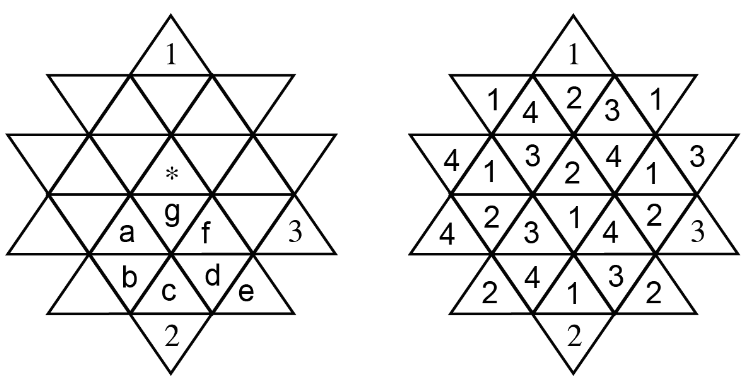


29. La respuesta correcta es la (E). Cada fila de la mitad derecha consta de 10 asientos numerados con pares consecutivos. El 100 está en el extremo derecho de la quinta fila. Las filas 4, 5 y 6 están numeradas así:

102	104	106	108	110	112	114	116	118	120
82	84	86	88	90	92	94	96	98	100
62	64	66	68	70	72	74	76	78	80

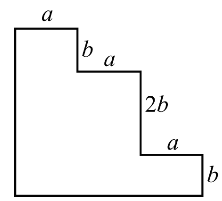
y es claro que, de los cinco números disponibles, 118 es el más cercano a 100. El 99 es el más alejado pues se halla en la mitad izquierda, como todos los impares.

30. La respuesta correcta es la (B). El 2 en la celda inferior obliga a que a, b y c (en la figura de la izquierda) sean diferentes de 2. Análogamente c, d y f son diferentes de 2.



Por lo tanto, de los cuatro números b, c, d y e, sólo puede ser $e = 2$. Entonces g, f y d son diferentes de 2 y $*$ debe ser 2. Puede quedar la duda de si se puede completar la figura satisfaciendo todas las condiciones. La respuesta es afirmativa, como muestra la figura de la derecha.

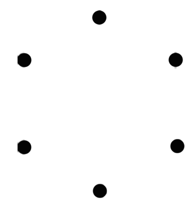
1.2. Prueba de Tercer Año



Problema 1. El perímetro de la figura es igual a:

(A) $3a + 4b$; (B) $3a + 8b$; (C) $6a + 4b$;
(D) $6a + 6b$; (E) $6a + 8b$.

Problema 2. Eleonora marcó los seis vértices de un hexágono regular y luego conectó algunos de esos vértices con líneas, obteniendo una cierta figura geométrica. Esa figura con seguridad no es:



(A) trapecio; (B) triángulo rectángulo;
(C) cuadrado; (D) rectángulo;
(E) triángulo obtusángulo.

Problema 3. Un leñador tiene cierto número de troncos. Mediante un corte de sierra él puede dividir un tronco en dos. Si realiza 53 cortes y obtiene en total 72 troncos, ¿cuántos troncos había inicialmente?

(A) 19; (B) 17; (C) 20; (D) 18; (E) 21.

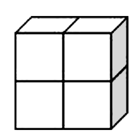
Problema 4. La suma de los primeros cien enteros positivos pares, menos la suma de los primeros cien enteros positivos impares, es:

(A) 0; (B) 50; (C) 100; (D) 10100; (E) 15150.

Problema 5. Iván obtuvo en un examen el 85 % del puntaje máximo posible. En el mismo examen, Darío obtuvo el 90 % del máximo. Sin embargo, Darío obtuvo solamente un punto más que Juan. ¿Cuál era el puntaje máximo posible en ese examen?

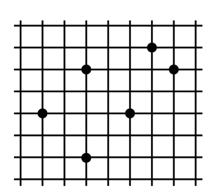
(A) 5; (B) 17; (C) 18; (D) 20; (E) 25.

Problema 6. El sólido representado en la figura está formado con cuatro cubos idénticos. La superficie de cada cubo es 24 cm^2. ¿Cuál es la superficie del sólido?



(A) 80 cm^2; (B) 64 cm^2; (C) 40 cm^2; (D) 32 cm^2; (E) 24 cm^2.

Problema 7. En una cuadrícula se marcan 6 puntos como indica la figura. ¿Qué figura geométrica no puede tener todos sus vértices entre los puntos marcados?



(A) cuadrado; (B) paralelogramo;
(C) triángulo rectángulo; (D) triángulo obtusángulo;
(E) Todas las figuras A, B, C y D pueden.

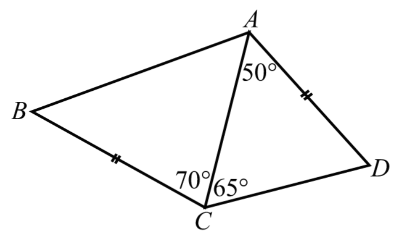
Problema 8. Mi maestra dice que el producto de las edades de ella y de su padre es 2010. ¿En qué año nació mi maestra?

Ⓐ 1943; Ⓑ 2005; Ⓒ 1953; Ⓓ 1995; Ⓔ 1980.

Problema 9. Carla tarda 18 minutos en hacer una cadena larga conectando tres cadenas cortas mediante eslabones adicionales. ¿Cuánto tardaría en hacer una cadena super larga conectando seis cadenas cortas de la misma manera?

Ⓐ 45 min; Ⓑ 30 min; Ⓒ 36 min; Ⓓ 27 min; Ⓔ 60 min.

Problema 10. En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene $AD = BC$, $\angle DAC = 50^o$, $\angle DCA = 65^o$ y $\angle ACB = 70^o$ (ver figura). Halle el valor de $\angle ABC$.



Ⓐ 65°; Ⓑ 50°; Ⓒ 60°; Ⓓ 55°;
Ⓔ Es imposible determinarlo.

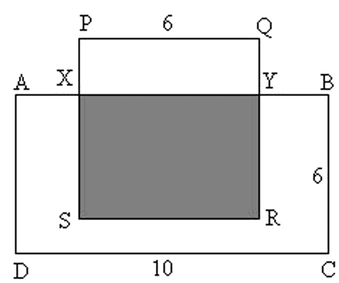
Problema 11. En una caja hay 50 bloques, que pueden ser de color blanco, azul o rojo. El número de bloques blancos es once veces el número de bloques azules. Hay menos bloques rojos que blancos, pero más rojos que azules. ¿En cuántas unidades superan los bloques blancos a los rojos?

Ⓐ 19; Ⓑ 30; Ⓒ 2; Ⓓ 22; Ⓔ 11.

Problema 12. ¿Cuál es el menor número de líneas rectas necesarias para dividir el plano en exactamente 5 regiones?

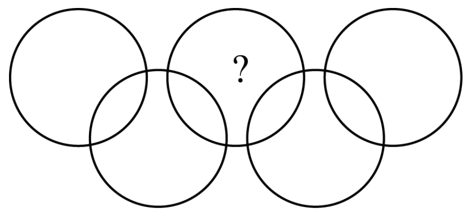
Ⓐ 6; Ⓑ 5; Ⓒ 4; Ⓓ 3; Ⓔ otra respuesta.

Problema 13. En la figura, $ABCD$ es un rectángulo y $PQRS$ es un cuadrado. El área sombreada es la mitad del área del rectángulo $ABCD$. ¿Cuál es la longitud de PX?



Ⓐ 2; Ⓑ 4; Ⓒ 1; Ⓓ 2,5; Ⓔ 1,5.

Problema 14. En la figura hay nueve regiones dentro de los círculos. Los números del 1 al 9 se colocan, uno en cada región, de manera tal que la suma de los números dentro de cualquier círculo sea 11.



¿Qué número va en la región señalada con el signo de interrogación?

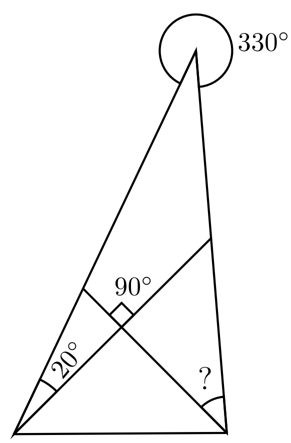
Ⓐ 6; Ⓑ 5; Ⓒ 9; Ⓓ 7; Ⓔ 8.

Problema 15. Se tienen 18 tarjetas idénticas, en blanco. En cada tarjeta se escribe o bien el número 4 o bien el número 5. Si la suma de todos los números en las tarjetas es divisible entre 17, ¿en cuántas tarjetas está escrito el número 4?

Ⓐ 9; Ⓑ 7; Ⓒ 6; Ⓓ 5; Ⓔ 4.

Problema 16. ¿Cuál es el valor del ángulo marcado con el signo de interrogación?

Ⓐ 10º; Ⓑ 30º; Ⓒ 20º; Ⓓ 50º; Ⓔ 40º.



Problema 17. Los números del 1 al 10 se escriben en una pizarra. Los estudiantes en la clase juegan el siguiente juego: un estudiante borra dos números y escribe en la pizarra la suma de ambos disminuida en 1; luego otro estudiante borra dos números y escribe en la pizarra la suma de ambos disminuida en 1, y así sucesivamente. El juego continúa hasta que queda un único número en la pizarra. El número que queda es:

Ⓐ mayor que 46; Ⓑ 46; Ⓒ 11; Ⓓ menor que 11; Ⓔ otra respuesta.

Problema 18. Kangu tiene una gran colección de pequeños cubitos de lado 1. Cada cubito está pintado de un solo color. Kangu quiere usar 27 de sus cubitos para armar un cubo de lado 3, con la condición de que si dos cubitos tienen al menos un vértice común entonces deben ser de colores diferentes. ¿Al menos cuántos colores debe usar?

Ⓐ 6; Ⓑ 27; Ⓒ 9; Ⓓ 12; Ⓔ 8.

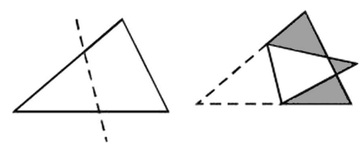
Problema 19. ¿Cuántos números naturales tienen como suma de sus dígitos 2010 y como producto de sus dígitos 2?

Ⓐ 1004; Ⓑ 1005; Ⓒ 2008; Ⓓ 2009; Ⓔ 2010.

Problema 20. Tres martes en un mes coincidieron con fechas pares. ¿Qué día de la semana fue el 21 de ese mes?

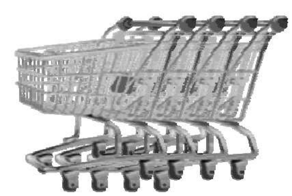
Ⓐ viernes; Ⓑ sábado; Ⓒ domingo; Ⓓ martes; Ⓔ miércoles.

Problema 21. El triángulo a la izquierda de la gráfica se pliega por la línea punteada, y se obtiene la figura que se muestra a la derecha. El área del triángulo original es 1,5 veces la de la figura resultante, y el área total de las tres regiones sombreadas es 1. Halle el área del triángulo original.



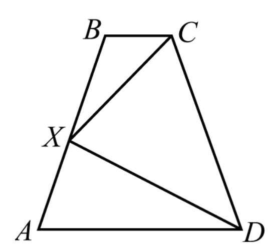
Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ 4; Ⓓ 5; Ⓔ Es imposible determinarlo.

Problema 22. En un supermercado hay dos filas de carritos encajados. La primera fila tiene 10 carritos y mide 2,9 m de largo. La segunda fila tiene 20 carritos y mide 4,9 m de largo. ¿Cuál es la longitud de cada carrito?



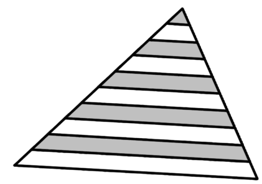
Ⓐ 0,8 m; Ⓑ 1,2 m; Ⓒ 1 m; Ⓓ 1,1 m; Ⓔ 1,4 m.

Problema 23. En el trapecio isósceles $ABCD$, X es el punto medio del lado AB, $BX = 1$ y $\angle CXD = 90°$. Halle el perímetro del trapecio $ABCD$.



Ⓐ 8; Ⓑ 5; Ⓒ 7; Ⓓ 6; Ⓔ Es imposible determinarlo.

Problema 24. Las líneas paralelas a la base del triángulo dividen a cada uno de los otros dos lados en 10 segmentos iguales. ¿Qué porcentaje del area del triángulo es gris?



(A) 42,5 %; (B) 45 %; (C) 46 %; (D) 47,5 %; (E) 50 %.

Problema 25. ¿Para cuántos enteros n ($1 \leq n \leq 100$) el número n^n es un cuadrado perfecto?

(A) 55; (B) 50; (C) 54; (D) 5; (E) 15.

Problema 26. Hay pulpos de 6, 7 y 8 tentáculos sirviendo al rey del fondo del mar. Los de 7 tentáculos siempre mienten, mientras que los de 6 u 8 tentáculos siempre dicen la verdad. Cierto día se reunieron cuatro pulpos. El pulpo azul dijo: «Entre los cuatro tenemos un total de 28 tentáculos», el pulpo verde dijo: «Entre los cuatro tenemos un total de 27 tentáculos», el amarillo dijo: «Entre los cuatro tenemos un total de 26 tentáculos» y el pulpo rojo dijo «Entre los cuatro tenemos un total de 25 tentáculos». ¿Cuántos tentáculos tiene el pulpo rojo?

(A) 6; (B) 7; (C) 8; (D) 8 o 6; (E) Es imposible determinarlo.

Problema 27. Los tres primeros términos de una sucesión son 1, 2 y 3. A partir del cuarto, cada término se calcula a partir de los tres precedentes, restando el tercero a la suma de los dos primeros: 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7,… ¿Qué número ocupa el lugar 2010 en esta sucesión?

(A) -2006; (B) 2008; (C) -2002; (D) -2004; (E) Otra respuesta.

Problema 28. En cada lado de un pentágono se escribe un número natural, de manera tal que números adyacentes nunca tienen un factor común mayor que 1, pero números no adyacentes siempre tienen un factor común mayor que 1. Hay muchas posibilidades de hacer esto, pero uno de los números siguientes no aparecerá nunca en los lados del pentágono. ¿Cuál es?

(A) 15; (B) 18; (C) 19; (D) 21; (E) 22.

Problema 29. ¿Cuántos números de tres cifras tienen la propiedad de que el dígito central es el promedio de los otros dos?

(A) 9; (B) 12; (C) 16; (D) 25; (E) 45.

Problema 30. Un código de barras del tipo que se muestra a la derecha se compone de barras negras y blancas alternadas, comenzando y terminando con barras negras. Cada barra tiene ancho 1 ó 2, y el ancho total del código es 12. ¿Cuántos códigos diferentes son posibles, si siempre se leen de izquierda a derecha?

(A) 24; (B) 116; (C) 66; (D) 132; (E) 12.

1.2.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (E). La longitud total de los segmentos horizontales es $2(a+a+a)=6a$ y la de los segmentos verticales es $2(b+2b+b)=8b$, por lo tanto el perímetro es $6a+8b$.

2. La respuesta correcta es la (C) ya que, de las figuras mencionadas, la única que no se puede obtener es el cuadrado.

3. La respuesta correcta es la (A). Cada corte incrementa en uno el número de troncos, por lo tanto inicialmente había $72-53=19$ troncos.

4. La respuesta correcta es la (C). Como cada par excede en una unidad al impar que lo precede, la diferencia es igual a la suma de 100 unos, que es 100.

5. La respuesta correcta es la (D). Un punto es la diferencia entre el 90 % y el 85 % del puntaje máximo, es decir que un punto era el 5 % y entonces el puntaje máximo era 20.

6. La respuesta correcta es la (B). Como los cubos tienen 6 caras, el área de cada cara es 4 cm^2. Y como la superficie del sólido está formada por 16 de esas caras, su área es 64 cm^2.

7. La respuesta correcta es la (E): todas las figuras mencionadas pueden.

8. La respuesta correcta es la (E). 2010 se factoriza como $2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$. Ya que $67>2\cdot 3\cdot 5=30$, el factor 67 debe ser parte de la edad del padre. Y es el único, porque edades de 134 años o mayores no son realistas. Por lo tanto la edad de la maestra es 30 años y nació en 1980.

9. La respuesta correcta es la (A). Para conectar tres cadenas, Carla debe hacer 2 conexiones. Para conectar 6 cadenas debe hacer 5 conexiones. Por lo tanto tardaría $18\cdot 5/2=45$ minutos.

10. La respuesta correcta es la (D). Como $\angle ADC=180^\circ-50^\circ-65^\circ=65^\circ$, el triángulo ACD es isósceles y $AC=AD$. Pero como $AD=BC$ resulta $AC=BC$ y el triángulo ABC también es isósceles, de donde $\angle ABC=(180^\circ-70^\circ)/2=55^\circ$.

11. La respuesta correcta es la (A). Denotemos por A, B y R el número de bloques azules, blancos y rojos, respectivamente. B sólo puede ser 11, 22, 33 ó 44. Pero $B = 44$ es imposible porque entonces $A = 4$, $R = 2$ y $R < A$. B tampoco puede ser 11 ni 22 porque resultaría $R > B$. Sólo queda la posibilidad $B = 33$, $A = 3$, y $R = 14$, de donde $B - R = 19$.

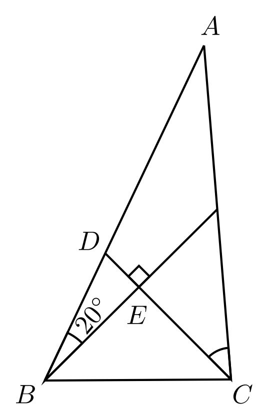
12. La respuesta correcta es la (C). Obviamente no se puede lograr con una ni con dos rectas. Con tres rectas se puede dividir el plano en 4 regiones (tres paralelas), 6 (2 paralelas y una transversal, o 3 concurrentes) ó 7 (3 en posición genérica) pero nunca en 5. Con 4 rectas paralelas se logran las 5 regiones.

13. La respuesta correcta es la (C). El área de $ABCD$ es $6 \times 10 = 60$, por lo tanto el área de $XSRY$ es 30, y como $XY = PQ = 6$ resulta $XS = 5$, de donde $PX = 6 - 5 = 1$.

14. La respuesta correcta es la (A). La suma de los números en las intersecciones debe ser $5 \cdot 11 - 45 = 10$, por lo tanto esos números deben ser 1, 2, 3 y 4 (en algún orden). El 9 debe ir en un extremo, si no al sumarle dos números en las intersecciones un círculo pasaría de 11. Supongamos entonces que la secuencia de números de izquierda a derecha comienza con 9, 2. El 8 debe ir a continuación (9, 2, 8, 1,...) o en el extremo derecho (9, 2,..., 3, 8). La primera posibilidad se descarta pues entonces el 3 y el 4 estarían dentro de un mismo círculo, y debería repetirse el 4. La segunda posibilidad debe ser de la forma 9, 2, x, 4, y, 1, z, 3, 8, que sólo se puede completar como 9, 2, 5, 4, 6, 1, 7, 3, 8.

15. La respuesta correcta es la (D). Si se escribe 5 en cada tarjeta la suma sería 90, que deja resto 5 al dividirlo entre 17. Por lo tanto si se escribe 4 en 5 tarjetas (y 5 en las demás) la suma es 85, que es múltiplo de 17.

16. La respuesta correcta es la (E). $\angle BAC = 360° - 330° = 30°$ y $\angle ADC = 20° + 90° = 110°$ por ser exterior del triángulo BDE, por lo tanto $\angle ACD = 180° - 110° - 30° = 40°$.



17. La respuesta correcta es la (B). La suma de los números en la pizarra disminuye en una unidad en cada jugada. Inicialmente la suma es 55. Luego de 9 jugadas queda un solo número que debe ser $55 - 9 = 46$.

18. La respuesta correcta es la (E). Es claro que al menos se necesitan 8 colores, ya que los 8 cubitos de un cubo de 2×2 tienen un vértice común (el centro del cubo de 2×2). Y 8 colores son suficientes, como muestra el diagrama siguiente, en el cual se representa la coloración con colores del 0 al 7 de las capas inferior, media y superior del cubo de 3×3.

0	1	2
2	3	4
4	5	6

capa inferior

4	5	6
6	7	0
0	1	2

capa media

0	1	2
2	3	4
4	5	6

capa superior

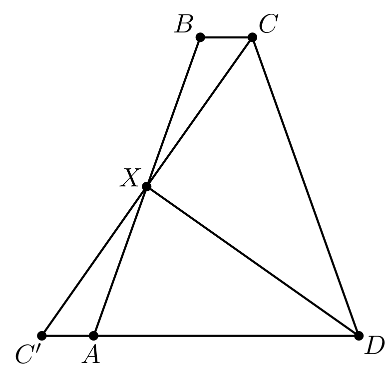
19. La respuesta correcta es la (D). El número debe estar compuesto por un 2 y 2008 unos, y como el 2 puede estar en cualquiera de 2009 posiciones, la respuesta es 2009.

20. La única manera de que un mes tenga tres martes en fechas pares es que éstos sean los días 2, 16 y 30 del mes, por lo tanto el 21 es domingo y la respuesta correcta es la (C).

21. La respuesta correcta es la (B). La diferencia entre el triángulo original (I) y la figura de la derecha (II) es igual al cuadrilátero blanco en la figura (II), y como esa área es igual a la mitad de (II), debe ser 1 igual que las áreas sombreadas. Es decir que el área de (II) es 2 y la de (I) es 3.

22. La respuesta correcta es la (D). Si c es la longitud de un carrito y s la de la parte que sobresale al encajar un carrito en otro, se tiene $c + 9s = 2{,}9$ y $c + 19s = 4{,}9$. Sustrayendo la primera igualdad de la segunda resulta $10s = 2$ y $s = 0{,}2$, de donde $c = 2{,}9 - 9s = 2{,}9 - 1{,}8 = 1{,}1$ m.

23. La respuesta correcta es la (D). Si C' es el simétrico de C con respecto a X, como A y B también son simétricos con respecto a X se tiene $C'D = CD$ y $C'A = BC$, por lo cual $AD + BC = AD + C'A = C'D = CD = AB = 2$, y el perímetro buscado es $(AD+BC)+AB+CD = 2+2+2 = 6$.



24. La respuesta correcta es la (B). Si por los extremos de cada segmento (de los trazados paralelos a la base) se trazan paralelas al lado que pasa por el extremo opuesto, el triángulo queda dividido en 100 triangulitos congruentes con el triangulito gris superior. Es fácil ver que la cantidad de estos triangulitos en cada franja paralela a la base, de arriba hacia abajo, son los números impares desde el 1 hasta el 19. Por lo tanto el área gris contiene $1+5+9+13+17=45$ triangulitos, y su área es el 45 % del área del triángulo.

25. n^n es un cuadrado perfecto si n lo es o si n es par. Como del 1 al 100 hay 50 números pares y 5 impares que son cuadrados perfectos (1, 9, 25, 49 y 81), hay en total 55 valores de n que cumplen la condición y la respuesta correcta es la (A).

26. La respuesta correcta es la (B). Si el pulpo rojo dijo la verdad entonces, para sumar 25, debería haber tres pulpos de 6 tentáculos y uno de 7. Es decir que dos pulpos más, aparte del rojo, habrían dicho la verdad, lo cual es claramente imposible. Por lo tanto el pulpo rojo mintió y tiene 7 tentáculos. Más aún, puede verse que el amarillo tiene 6 tentáculos y los demás 7.

27. La respuesta correcta es la (A). Al escribir los primeros términos de la sucesión $1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, -6, \ldots$, se ve que en las posiciones impares van los impares del 1 en adelante, mientras que en las posiciones impares van enteros pares, comenzando por el 2 y decreciendo de 2 en 2. Por lo tanto en la posición 2010 estará el -2006. Esto se puede probar rigurosamente por inducción, observando que $a_{2k-1}=2k-1$ y $a_{2k}=4-2k$ se cumplen para $k=1$ y $k=2$, y suponiendo que se cumplen para $k=1,\ldots,n-1$ se tiene $a_{2n-1}=a_{2n-4}+a_{2n-3}-a_{2n-2}=4-(2n-4)+(2n-3)-(4-(2n-2))=2n-1$ y $a_{2n}=a_{2n-3}+a_{2n-2}-a_{2n-1}=2n-3+4-(2n-2)-(2n-1)=4-2n$. Por lo tanto $a_{2010}=4-2010=-2006$.

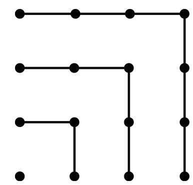
28. La respuesta correcta es la (C). Si los lados del pentágono son a, b, c, d y e (en sentido horario) y un número primo p estuviese, por ejemplo, en a, entonces en b y en d deberían estar números múltiplos de p, y se tendrían dos lados adyacentes con p como factor común. Por eso el 19 no puede estar. Cualquiera de los otros puede, por ejemplo $15=3\cdot 5$ puede ser seguido de $2\cdot 11$, $5\cdot 7$, $2\cdot 3$ y $7\cdot 11$.

29. La respuesta correcta es la (E). El primer y el tercer dígitos deben ser de la misma paridad (para que su promedio sea el dígito central). Si ambos son impares, como hay 5 posibilidades para cada uno (1, 3, 5, 7 y 9) se generan $5\cdot 5=25$ números. Si ambos son pares hay 4 posibilidades para el primero (2, 4, 6 y 8) y 5 para el segundo (0, 2, 4, 6 y 8), y se generan $4\cdot 5=20$ números. Es decir que hay $25+20=45$ números que cumplen las condiciones pedidas.

30. La respuesta correcta es la (B). El número de barras debe ser impar. Con 7 barras, cinco deben tener ancho 2 y dos ancho 1; hay $\binom{7}{2}=21$ códigos de este tipo. Con 9 barras, tres deben tener ancho 2 y seis ancho 1; hay $\binom{9}{3}=84$ códigos de este tipo. Con 11 barras, una debe tener ancho 2 y diez ancho 1; hay $\binom{11}{1}=11$ códigos de este tipo. El total es $21+84+11=116$.

Alternativamente se puede observar que el número x_n de códigos de longitud n satisface $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=3$ y $x_n=x_{n-4}+2x_{n-3}+x_{n-2}$ para $n>4$, de donde se obtienen los primeros 12 términos de la sucesión: 1, 1, 1, 3, 4, 6, 11, 17, 27, 45, 72, 116.

1.3. Prueba de Cuarto Año y Quinto Año



Problema 1. Examinando la figura se puede concluir que $1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$.
¿Cuál es el valor de
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$?

Ⓐ 14×14; Ⓑ 7×9; Ⓒ $4 \times 4 \times 4$; Ⓓ 16×16; Ⓔ 9×9.

Problema 2. Si ambas filas tienen la misma suma, ¿cuál es el valor de $*$?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$*$

Ⓐ 1010; Ⓑ 1020; Ⓒ 1910; Ⓓ 1990; Ⓔ 2000.

Problema 3. Dos recipientes vacíos de forma cúbica tienen bases de áreas 1 dm^2 y 4 dm^2, respectivamente. Se desea llenar el cubo grande trayendo agua desde un arroyo en el cubo pequeño. ¿Cuántas veces hay que ir hasta el arroyo?

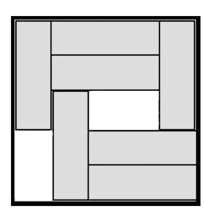
Ⓐ 8 veces; Ⓑ 4 veces; Ⓒ 6 veces; Ⓓ 2 veces; Ⓔ 16 veces.

Problema 4. ¿Cuántos números de cuatro cifras son divisibles entre 5 y tienen los cuatro dígitos impares?

Ⓐ 900; Ⓑ 625; Ⓒ 125; Ⓓ 250; Ⓔ 100.

Problema 5. El director de una empresa dijo: "Cada uno de nuestros empleados tiene al menos 25 años de edad". Luego se comprobó que no había dicho la verdad. Esto significa que:

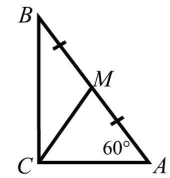
Ⓐ Todos los empleados de la empresa tienen exactamente 25 años de edad.
Ⓑ Todos los empleados de la empresa tienen más de 26 años de edad.
Ⓒ Ningún empleado de la empresa tiene todavía 25 años de edad.
Ⓓ Algún empleado de la empresa tiene menos de 25 años de edad.
Ⓔ Algún empleado de la empresa tiene exactamente 26 años de edad.



Problema 6. En una caja de 5×5 hay siete barras de 3×1, como muestra la figura. Se desea deslizar algunas barras de modo que quede espacio para una barra adicional. ¿Cuántas barras hay que mover, como mínimo?

Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ 4; Ⓓ 5; Ⓔ Es imposible.

Problema 7. ABC es un triángulo rectángulo, M es el punto medio de la hipotenusa AB y $\angle BAC = 60°$. Entonces $\angle BMC$ es igual a:



Ⓐ 105°; Ⓑ 110° ; Ⓒ 108°; Ⓓ 125°; Ⓔ 120°.

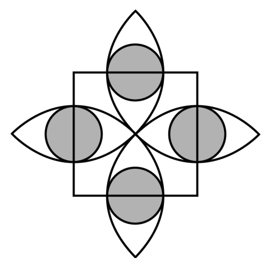
Problema 8. Escoja un número que pueda ser igual al número de aristas de algún prisma.

Ⓐ 100; Ⓑ 200; Ⓒ 2008; Ⓓ 2009; Ⓔ 2010.

Problema 9. Para cuántos números de dos dígitos xy se cumple la igualdad $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$?

Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 6; Ⓓ 32; Ⓔ para ninguno.

Problema 10. En la figura, la longitud del lado del cuadrado es 2, las semicircunferencias pasan por el centro del cuadrado y tienen sus centros en los vértices del cuadrado, y los círculos sombreados tienen centros en los lados del cuadrado y son tangentes a las semicircunferencias. ¿Cuánto vale el área sombreada?

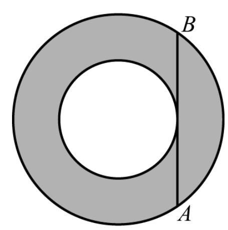


Ⓐ π; Ⓑ $\sqrt{2}\pi$; Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$; Ⓓ $4(3-2\sqrt{2})\pi$; Ⓔ $\frac{1}{4}\pi$.

Problema 11. Los tres números $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$ y $\sqrt[6]{7}$ son términos consecutivos de una progresión geométrica. El siguiente término de la progresión es:

Ⓐ 1; Ⓑ $\sqrt[12]{7}$; Ⓒ $\sqrt[10]{7}$; Ⓓ $\sqrt[9]{7}$; Ⓔ $\sqrt[5]{7}$.

Problema 12. La cuerda AB es tangente a la menor de dos circunferencias concéntricas. Si $AB = 16$, ¿cuál es el área de la región sombreada?

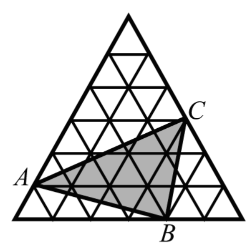


Ⓐ 32π; Ⓑ 63π; Ⓒ 64π; Ⓓ $32\pi^2$;
Ⓔ Depende del radio de los círculos.

Problema 13. Los números enteros x e y satisfacen $2x = 5y$. Sólo uno de los siguientes números puede ser $x + y$. ¿Cuál?

Ⓐ 2011; Ⓑ 2010; Ⓒ 2009; Ⓓ 2008; Ⓔ 2007.

Problema 14. El triángulo equilátero más grande está dividido en 36 triangulitos equiláteros de área 1 cm^2 cada uno. Halle el área del triángulo ABC.



Ⓐ 11 cm^2; Ⓑ 12 cm^2; Ⓒ 13 cm^2;
Ⓓ 14 cm^2; Ⓔ 15 cm^2.

Problema 15. En una bolsa hay pelotas de tres colores: azules, verdes y rojas (hay al menos una de cada color). Se sabe que, si se extraen al azar y con los ojos vendados cinco pelotas, siempre se obtendrán al menos dos rojas y al menos tres serán del mismo color. ¿Cuántas bolas azules hay en la bolsa?

(A) 4; (B) 3; (C) 2; (D) 1;
(E) Es imposible determinarlo sin información más detallada.

Problema 16. Tres martes en un mes coincidieron con fechas pares. ¿Qué día de la semana fue el 21 de ese mes?

(A) miércoles; (B) martes; (C) viernes; (D) sábado; (E) domingo.

Problema 17. ¿Cuántos triángulos rectángulos pueden formarse uniendo tres vértices de un polígono regular de 14 lados?

(A) 42; (B) 84; (C) 88; (D) 98; (E) 168.

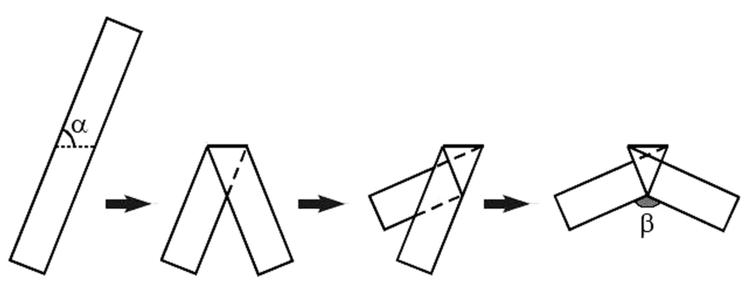
Problema 18. Cada estrella en la expresión $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$ se reemplaza por $+$ o por $\times$. Sea N el mayor valor posible de las expresiones obtenidas de esa manera. ¿Cuál es el menor factor primo de N?

(A) 2; (B) 3; (C) 5; (D) 7; (E) otro número.

Problema 19. Las longitudes de los lados de un triángulo, en centímetros, son los números naturales 13, a y b. Halle el perímetro del triángulo sabiendo que $ab = 105$.

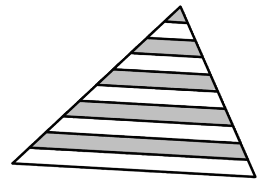
(A) 69; (B) 39; (C) 51; (D) 35; (E) 119.

Problema 20. Una cinta de papel se dobla tres veces como muestra la figura. Sabiendo que $\alpha = 70°$, halle la medida del ángulo β.



(A) 140º; (B) 130º; (C) 120º; (D) 110º; (E) 100º.

Problema 21. Las líneas paralelas a la base del triángulo dividen a cada uno de los otros dos lados en 10 segmentos iguales. ¿Qué porcentaje del area del triángulo es gris?



Ⓐ 42,5 %; Ⓑ 45 %; Ⓒ 46 %; Ⓓ 47,5 %; Ⓔ 50 %.

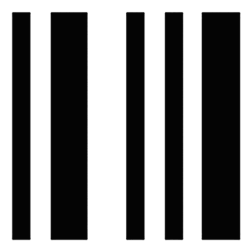
Problema 22. 100 personas tomaron parte en una carrera, y todos llegaron en instantes diferentes. Cuando se les preguntó en qué lugar llegaron, cada uno contestó con un número entero del 1 al 100. Si la suma de todas las respuestas es 4000, ¿cuántas respuestas, como mínimo, fueron falsas?

Ⓐ 9; Ⓑ 10; Ⓒ 11; Ⓓ 12; Ⓔ 13.

Problema 23. Un dado se lanza tres veces. Si el número obtenido en el tercer lanzamiento es igual a la suma de los números obtenidos en los dos primeros, ¿cuál es la probabilidad de que el 2 haya salido al menos una vez?

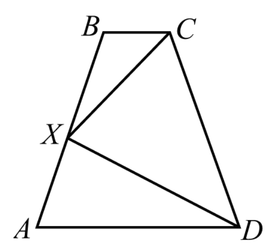
Ⓐ $1/6$; Ⓑ $91/216$; Ⓒ $1/2$; Ⓓ $8/15$; Ⓔ $7/12$.

Problema 24. Un código de barras del tipo que se muestra a la derecha se compone de barras negras y blancas alternadas, comenzando y terminando con barras negras. Cada barra tiene ancho 1 ó 2, y el ancho total del código es 12. ¿Cuántos códigos diferentes son posibles, si siempre se leen de izquierda a derecha?



Ⓐ 24; Ⓑ 116; Ⓒ 66; Ⓓ 132; Ⓔ 12.

Problema 25. En el trapecio isósceles $ABCD$, X es el punto medio del lado AB, $BX = 1$ y $\angle CXD = 90°$. Halle el perímetro del trapecio $ABCD$.



Ⓐ 6; Ⓑ 5; Ⓒ 8; Ⓓ 7; Ⓔ Es imposible determinarlo.

Problema 26. Cada número del 1 al 10 se escribe diez veces en una pizarra. Los estudiantes en la clase juegan el siguiente juego: un estudiante borra dos números y escribe en la pizarra la suma de ambos disminuida en 1; luego otro estudiante borra dos números y escribe en la pizarra la suma de ambos disminuida en 1, y así sucesivamente. El juego continúa hasta que queda un único número en la pizarra. El número que queda es:

Ⓐ menor que 440; Ⓑ 451; Ⓒ 460; Ⓓ 488; Ⓔ mayor que 500.

Problema 27. El valor de la expresión

$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)\cdots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$$

es igual a:

Ⓐ 3^{2048}; Ⓑ 2^{4096}; Ⓒ 2^{2048}; Ⓓ 3^{4096}; Ⓔ $3^{2048}+2^{2048}$.

Problema 28. En cada lado de un pentágono se escribe un número natural, de manera tal que números adyacentes nunca tienen un factor común mayor que 1, pero números no adyacentes siempre tienen un factor común mayor que 1. Hay muchas posibilidades de hacer esto, pero uno de los números siguientes no aparecerá nunca en los lados del pentágono. ¿Cuál es?

Ⓐ 15; Ⓑ 18; Ⓒ 19; Ⓓ 21; Ⓔ 22.

Problema 29. La función f está definida para todos los reales positivos y cumple

$$2f(x)+3f\left(\frac{2010}{x}\right)=5x,$$

para todo $x>0$. ¿Cuál es el valor de $f(6)$?

Ⓐ 923; Ⓑ 1; Ⓒ 1013; Ⓓ 2009; Ⓔ 993.

Problema 30. En un cateto de longitud a de un triángulo rectángulo se escoge un punto P. En el otro cateto, de longitud b, se escoge otro punto Q. Sean K y H las proyecciones perpendiculares de P y Q, respectivamente, sobre la hipotenusa. Halle el mínimo valor posible de la suma $KP+PQ+QH$.

Ⓐ $a+b$; Ⓑ $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; Ⓒ $\frac{2ab}{a+b}$; Ⓓ $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$; Ⓔ $\frac{(a+b)^2}{2ab}$.

1.3.1. Soluciones

1. Agregando 5 líneas a la figura se forma un cuadrado de lado 9, por lo tanto la respuesta correcta es la (E), 9×9.

2. Cada número de la segunda fila supera en 10 al que tiene encima, por lo tanto la suma $11+12+\cdots+20$ supera en $10\times 10=100$ a la suma $1+2+\cdots+10$. Entonces, para que ambas filas tengan la misma suma, $*$ debe ser 100 unidades inferior a 2010, es decir que la respuesta correcta es la (C), 1910.

3. La respuesta correcta es la (A). El cubo pequeño tiene lado 1 dm y volumen 1 dm^3, mientras que el grande tiene lado 2 dm y volumen $2^3 = 8$ dm^3.

4. La respuesta correcta es la (C). La cifra de las unidades debe ser 5 y cada una de las tres primeras puede escogerse independientemente de 5 maneras (1, 3, 5, 7 ó 9), por lo tanto la respuesta es $5^3 = 125$.

5. La respuesta correcta es la (D). Si no es cierto que cada empleado tiene al menos 25 años, entonces alguno de ellos tiene menos de 25 años.

6. La respuesta correcta es la (B). Hay que bajar la barra vertical en la columna de la izquierda y luego mover hacia la izquierda las barras horizontales de la fila superior y la que está debajo de ella.

7. La respuesta correcta es la (E). Como $\angle ACB = 90°$, C pertenece a la circunferencia de centro M y radio MA, de donde $MC = MA$ y por lo tanto $\angle MCA = \angle MAC = 60°$. Se sigue que $\angle BMC = 120°$ por ser ángulo exterior del $\triangle MCA$.

8. Si la base de un prisma tiene n lados, el prisma tiene $3n$ aristas. De las opciones dadas, sólo 2010 es múltiplo de 3, y por eso (E) es la respuesta correcta.

9. Una suma de cuadrados es 0 si y sólo si ambos sumandos son 0, por lo tanto la igualdad se verifica solamente si $x = 3$ y $y = 2$, es decir para el 32. La respuesta correcta es la (A).

10. La respuesta correcta es la (D). El radio de las semicircunferencias es la semidiagonal del cuadrado, es decir $\sqrt{2}$. El diámetro de los círculos sombreados es entonces $2\sqrt{2} - 2$ y el área de esos cuatro círculos es $4(\sqrt{2} - 1)^2\pi = 4(3 - 2\sqrt{2})\pi$.

11. La respuesta correcta es la (A). La razón de la progresión es $\sqrt[3]{7}/\sqrt{7} = \sqrt[6]{7^2}/\sqrt[6]{7^3} = 1/\sqrt[6]{7}$, por lo tanto el cuarto término es $\sqrt[6]{7}/\sqrt[6]{7} = 1$.

12. La respuesta correcta es la (C). Sea O el centro de las circunferencias y C el punto de tangencia de la cuerda AB con la circunferencia menor. Entonces, por Pitágoras, $OB^2 - OC^2 = BC^2 = 8^2 = 64$ y el área sombreada es $OB^2\pi - OC^2\pi = (OB^2 - OC^2)\pi = 64\pi$.

13. Como $2(x + y) = 2x + 2y = 7y$, $x + y$ debe ser múltiplo de 7. De los números listados sólo $2009 = 287 \cdot 7$ lo es y por lo tanto la respuesta correcta es la (C). De hecho $x = 287 \cdot 5$, $y = 287 \cdot 2$ cumplen las condiciones del problema.

14. AC es la diagonal de un paralelogramo compuesto por 12 triangulitos, AB es la diagonal de un paralelogramo compuesto por 6 triangulitos y BC es la diagonal de un paralelogramo compuesto por 4 triangulitos. El área sombreada es la unión de la mitad de cada uno de los paralelogramos mencionados, por lo tanto su área $6 + 3 + 2 = 11$ cm^2. Por lo tanto la respuesta correcta es la (A).

15. La suma de azules y verdes no puede ser superior a 3 (ya que en cada extracción hay al menos dos rojas). Tampoco puede haber una azul y dos verdes, o dos verdes y una azul, pues entonces se podrían extraer 5 bolas que no contengan tres de un mismo color. La única posibilidad que queda es que haya una azul y una verde, y la respuesta correcta es la (D).

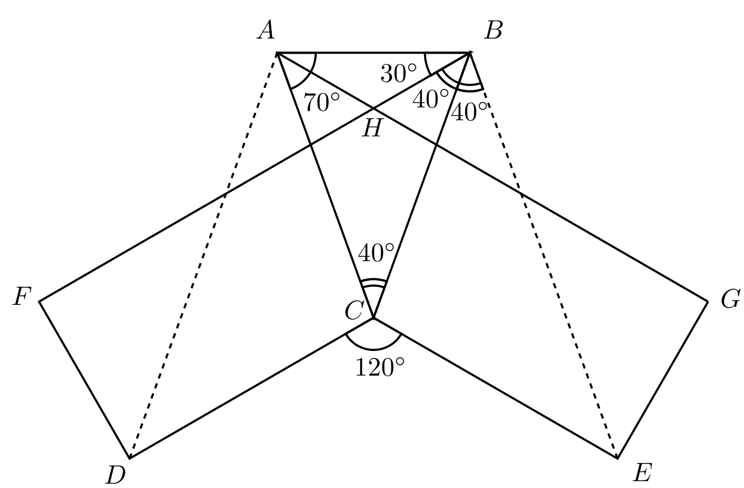
16. La respuesta correcta es la (E). Ver explicación para el problema 20 de tercer año, página 19.

17. Para que el triángulo sea rectángulo dos de sus vértices deben tomarse diametralmente opuestos, y el tercero puede ser cualquiera de los 12 restantes. Como hay 7 pares de vértices opuestos resultan $7 \cdot 12 = 84$ triángulos y la respuesta correcta es la (B).

18. Siempre se obtiene un resultado mayor sustituyendo $*$ por $\times$ que por $+$, excepto si un operando es el 1. Por lo tanto $N = 1 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3628801$. Este número obviamente no es divisible entre 2, 3, 5 ni 7, pero $3 - 6 + 2 - 8 + 8 - 0 + 1 = 0$, por lo tanto es divisible entre 11 y la respuesta correcta es la (E).

19. Supongamos $a \leq b$. De $ab = 105$ resultan para (a, b) las posibilidades (1, 105), (3, 35), (5,21) y (7, 15). Las tres primeras se descartan porque no cumplen la desigualdad triangular (ya que $105 > 13 + 1$, $35 > 13 + 3$ y $21 > 13 + 5$). Por lo tanto a y b son 7 y 15, el perímetro es $7 + 13 + 15 = 35$ y la respuesta correcta es la (D).

20. La respuesta correcta es la (C). Por simetría $\angle CAB = \angle CBA = \alpha = 70°$. Entonces $\angle ACB = \angle CBE = \angle CBF = 40°$ y $\angle ABH = 70° - 40° = 30° = \angle BAH$, de donde $\beta = \angle DCE = \angle FHG = \angle AHB = 120°$.



21. La respuesta correcta es la (B). Ver explicación para el problema 24 de tercer año, página 19.

22. La respuesta correcta es la (D). Si todos hubiesen respondido la verdad, la suma de las respuestas debería haber sido $1+2+\cdots+99+100 = 5050$. Pero el que llegó en la posición n, mintiendo, puede hacer disminuir esa suma hasta en $n-1$. Para que la suma disminuya en 1050 unidades, al menos 12 personas deben haber mentido ya que $99+98+\cdots+90+89 = 1034 < 1050$ y $99+98+\cdots+90+89+88 = 1122 > 1050$.

23. Los posibles resultados de los tres lanzamientos son (1,1,2), (1,2,3), (2,1,3), (1,3,4), (2,2,4), (3,1,4), (1,4,5), (2,3,5), (3,2,5), (4,1,5), (1,5,6), (2,4,6), (3,3,6), (4,2,6) y (5,1,6). En 8 de estas 15 posibilidades aparece al menos un 2, por lo tanto la probabilidad pedida es $8/15$ y la respuesta correcta es la (D).

24. La respuesta correcta es la (B). Ver explicación para el problema 30 de tercer año, página 20.

25. La respuesta correcta es la (A). Ver explicación para el problema 23 de tercer año, página 19.

26. La respuesta correcta es la (B). Ver explicación para el problema 17 de tercer año, página 18.

27. La respuesta correcta es la (A). El valor de la expresión no varía si se multiplica por $3-2=1$. Pero $(3-2)(2+3) = 3^2-2^2$, $(3^2-2^2)(2^2+3^2) = 3^4-2^4$, $(3^4-2^4)(2^4+3^4) = 3^8-2^8, \ldots, (3^{2048}-2^{2048})(2^{2048}+3^{2048}) = 3^{4096}-2^{4096}$, por lo tanto la expresión dada es igual a

$$\frac{3^{4096}-2^{4096}+(3-2)2^{4096}}{3^{2048}} = \frac{3^{4096}}{3^{2048}} = 3^{2048}.$$

28. La respuesta correcta es la (C). Ver explicación para el problema 28 de tercer año, página 20.

29. La respuesta correcta es la (E). Sustituyendo x por $2010/x$ en

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$$

resulta

$$2f\left(\frac{2010}{x}\right) + 3f(x) = 5\frac{2010}{x}.$$

Multiplicando la primera igualdad por 2 y la segunda por 3, y restando miembro a miembro la primera de la segunda, resulta

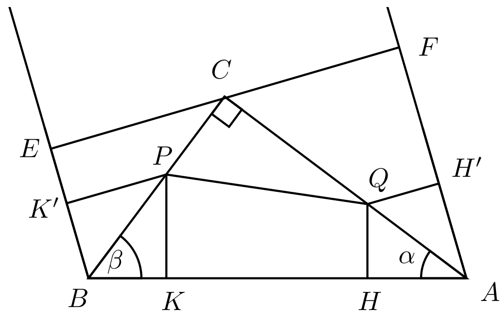
$$5f(x) = 15\frac{2010}{x} - 10x,$$

de donde

$$f(x) = \frac{6030}{x} - 2x$$

y en particular $f(6) = 6030/6 - 2\cdot 6 = 1005 - 12 = 993$.

30. Si K' es el simétrico de K respecto a BC y H' es el simétrico de H respecto a AC, entonces la poligonal $K'PQH'$ tiene igual longitud que la $KPQH$.



Pero K' y H' están en dos rectas paralelas (ya que forman ángulos 2α y 2β con BA y $2\alpha+2\beta = 180°$), por lo tanto la poligonal $K'PQH'$ tiene longitud mínima si coincide con un segmento de perpendicular común entre esas dos paralelas, como por ejemplo el segmento EF (que pasa por C). Pero la longitud de este segmento es claramente el doble de la altura h del $\triangle ABC$. Y como el doble del área del $\triangle ABC$ es $BA \cdot h = BC \cdot AC = ab$ resulta

$$2h = \frac{2ab}{AB} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

es decir que la respuesta correcta es la (B).

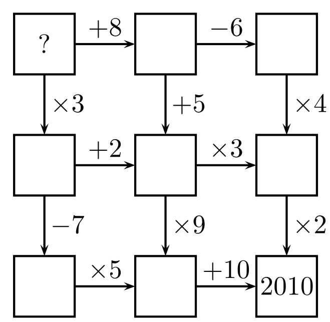
Capítulo 2

Prueba Regional

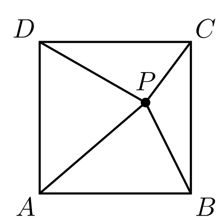
La prueba regional de la OJM consta de cinco problemas, que se valoran en una escala de 1 a 5. Los participantes disponen de tres horas para resolverlos.

2.1. Prueba de Primer Año

Problema 1.
Juan escribió un número entero en la caja con el signo de interrogación. Luego, siguiendo alguno de los posibles caminos indicados por las flechas y efectuando las operaciones indicadas a medida que avanzaba, llegó a la caja inferior derecha con el número 2010. ¿Qué número escribió Juan inicialmente?



Problema 2.
El cuadrado $ABCD$ tiene área 100 cm^2. P es un punto interior al cuadrado tal que el área del triángulo ABP es 32 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo PCD?



Problema 3.
Sea $N = 2^{2010} \cdot 125^{671}$. Halle

(a) el número de cifras de N,

(b) la suma de todas las cifras de N.

Problema 4.
Mercedes tiene un rectángulo de cartulina de 12cm×3cm. Ella quiere cortar el rectángulo en dos o más pedazos con los cuales se pueda armar un cuadrado. Muestre al menos dos maneras diferentes en que lo puede hacer.

Problema 5.
Halle todos los enteros positivos de dos o más cifras tales que el número formado por cada par de dígitos consecutivos sea un cuadrado perfecto. Por ejemplo, 816 es uno de esos números, ya que $81 = 9^2$ y $16 = 4^2$, pero 8167 no lo es porque 67 no es un cuadrado perfecto.

2.1.1. Soluciones

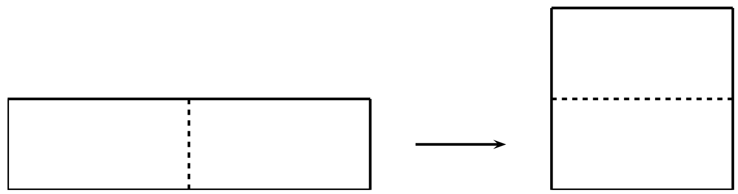
1. Razonando hacia atrás se observa que el 2010 sólo puede provenir del 1005 arriba o del 2000 a la izquierda. El 2000 sólo puede provenir de un 400 a la izquierda, y éste de un 407 arriba y no se puede seguir pues 407 no es múltiplo de 3. En cuanto al 1005 sólo pudo provenir de un 335 a la izquierda. El 335 provino de un 333 a la izquierda y éste de un 111 arriba, que es una posible respuesta, o de un 330 arriba y éste de un 322 a la izquierda, que es la otra respuesta posible. Verificación: 111, hacia abajo, 333, a la derecha, 335, a la derecha, 1005, abajo, 2010; 322, a la derecha, 330, abajo, 335, a la derecha, 1005, abajo, 2010.

1. Solución alternativa: Si x es el número escrito inicialmente, hay 6 caminos que se pueden seguir (DDAA, DADA, DAAD, ADDA, ADAD y AADD, donde D es derecha y A es abajo) que producen respectivamente los valores $(x+8-6)\times 4\times 2 = 8(x+2)$, $(x+8+5)\times 3\times 2 = 6(x+13)$, $(x+8+5)\times 9+10 = 9(x+13)+10$, $(3x+2)\times 3\times 2 = 6(3x+2)$, $9(3x+2)+10$ y $5(3x-7)+10$. Igualando las expresiones anteriores a 2010 y despejando x se obtienen los valores 997/4, 322, 1883/9, 111, 1998/3 y 407/3. Hay sólo dos valores enteros, 322 y 111, que son los únicos números que pudo haber escrito Juan inicialmente.

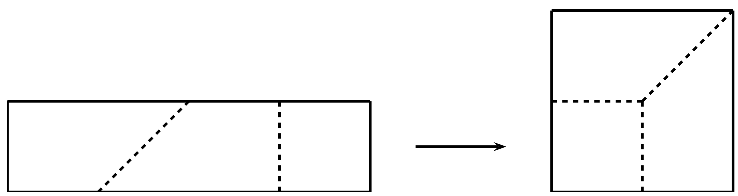
2. El lado AB del cuadrado mide 10 cm. Si h es la altura del triángulo ABP entonces $10h/2 = 32$, de donde $h = 64/10 = 6{,}4$ cm, y la altura del triángulo PCD (desde P hasta CD) es $10 - 6{,}4 = 3{,}6$ cm. Por lo tanto el área pedida es $3{,}6 \cdot 10/2 = 18$ cm^2.

3. Como $125 = 5^3$ se tiene $N = 2^{2010} \cdot 5^{3\cdot 671} = 2^{2010} \cdot 5^{2013} = 5^3 \cdot 10^{2010}$. Por lo tanto N se escribe como 125 seguido de 2010 ceros. Su número de cifras es 2013 y la suma de todas ellas es 8.

4. Existen muchas alternativas, pero una de las formas más sencillas consiste en dividir el rectángulo a la mitad en dos rectángulos iguales de 6cm×3cm, con los cuales se puede armar un cuadrado de 6cm×6cm.



Una segunda forma consiste en dividir el rectángulo original en un cuadrado de 3cm×3cm y dos trapecios iguales de bases 6cm y 3cm y altura 3cm:



5. Los cuadrados perfectos de dos cifras son 16, 25, 36, 49, 64 y 81. Si el número comienza con 1 sólo puede seguir con 6 (16), luego con 4 (164), luego 9 (1649) y se acaban. Si comienza con 2, 25 y no se puede seguir. Del mismo modo comenzando con 3 se obtienen 36, 364 y 3649. Con 4 sólo 49, con 5 no hay ninguno, con 6: 64 y 649, con 7 no hay y con 8: 81, 816, 8164 y 81649. La lista completa es

16, 164, 1649, 25, 36, 364, 3649, 49, 64, 649, 81, 816, 8164 y 81649.

2.2. Prueba de Segundo Año

Los problemas 1, 2, 3 y 4 de segundo año son los mismos que los de primer año (ver pág. 31). Las pruebas sólo se diferencian en el problema 5, que se enuncia a continuación.

Problema 5.
Un grupo de amigos cena en un restaurante. A la hora de pagar cada uno aporta 15 Bs, pero comprueban que faltan 35 Bs. Entonces cada uno aporta 5 Bs adicionales, con lo cual les alcanza para pagar la cuenta y les sobra exactamente el 10 % del costo de la cena (que le dejan como propina al mesonero). ¿Cuántos amigos eran? ¿Cuál era el monto de la factura?

2.2.1. Soluciones

Las soluciones de los problemas 1, 2, 3 y 4 se encuentran a partir de la página 32.

5. Sea n el número de amigos. Entonces el monto de la factura fue $15n+35$. Luego de aportar 5 Bs adicionales reúnen $20n$ Bs, y sobran $20n-(15n+35)=5n-35$.

Como esta cantidad es el 10 % de la factura se tiene que $5n - 35 = (15n + 35)/10$, de donde $5n - 35 = (3n + 7)/2$, $10n - 70 = 3n + 7$, $7n = 77$ y $n = 11$. El monto de la factura fue $15 \cdot 11 + 35 = 200$ Bs.

5. Solución alternativa: Sea n el número de amigos. Si $n < 7$ con los 5 Bs adicionales no reunirían los 35 Bs que faltan para pagar la factura. Si $n = 7$ con los 5 Bs adicionales reunirían 35 Bs y no quedaría nada para el mesonero. Si $n = 8$ la factura sería $8 \cdot 15 + 35 = 155$; con los 5 Bs adicionales reunirían 40 Bs y sobrarían 5 Bs, que es menos del 10 % de 170 Bs (también se puede descartar este caso porque el 10 % de 155 no es entero, mientras que el sobrante sí lo es). Si $n = 9$ la factura sería $9 \cdot 15 + 35 = 170$; con los 5 Bs adicionales reunirían 45 Bs y sobrarían 10 Bs, que es menos del 10 % de 170 Bs. Si $n = 10$ la factura sería $10 \cdot 15 + 35 = 185$; con los 5 Bs adicionales reunirían 50 Bs y sobrarían 15 Bs, que es menos del 10 % de 185 Bs (o bien, el 10 % de 185 no es entero). Con $n = 11$ la factura sería $11 \cdot 15 + 35 = 200$; con los 5 Bs adicionales reunirían 55 Bs y sobrarían 20 Bs, que es exactamente el 10 % de 200 Bs., por lo tanto esa es la solución.

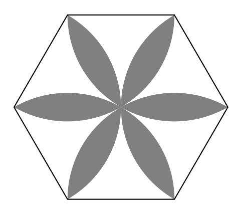
2.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Idéntico al Problema 3 de Primer Año (ver pág. 31).

Problema 2. Idéntico al Problema 2 de Primer Año (ver pág. 31).

Problema 3. Idéntico al Problema 5 de Segundo Año (ver pág. 33).

Problema 4.
Con centro en cada vértice V de un hexágono regular de radio 1 se traza un arco de circunferencia que conecta los dos vértices adyacentes a V. Calcule el área de la “flor” de seis pétalos que se forma.



Problema 5.
En una pecera viven unos pequeños seres llamados *bupis*, y un pez que se alimenta de ellos, comiendo 30 bupis cada día. Al finalizar cada día, si hay menos de 100 bupis éstos se reproducen, engendrando cada uno de ellos otro idéntico, doblando así su número total. Si hay 100 o más bupis no hay reproducción, tal vez por falta de espacio. Suponga que inicialmente hay 97 bupis. Durante el primer día el pez se come 30, dejando 67, que se reproducen y llegan a 134. El segundo día el pez se come 30 y quedan 104 (no se reproducen pues $104 \geq 100$). El tercer día los 104 se reducen a 74, se reproducen y quedan 148. Continuando de esta manera, ¿cuántos bupìs habrá al finalizar el día número 1000?

2.3.1. Soluciones

Las soluciones de los problemas 1, 2 y 3 se encuentran a partir de la página 32.

4. El área de medio pétalo puede calcularse como diferencia entre el área de un sector de 60° y radio 1, y el área de un triángulo equilátero de lado 1, es decir $\pi/6 - \sqrt{3}/4$, por lo tanto el área pedida es $12(\pi/6 - \sqrt{3}/4) = 2\pi - 3\sqrt{3}$.

5. El número de bupis al final de cada uno de los primeros doce días es: 134, 104, 148, 118, 176, 146, 116, 172, 142, 112, 164, 134. A partir de este punto la sucesión se repite periódicamente, con período 11. Como $1000 = 90\cdot 11+10$, resulta entonces que al finalizar el día 1000 habrá tantos bupis como al fin del día 10, es decir 112.

2.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Idéntico al Problema 4 de Tercer Año (ver pág. 34).

Problema 2. Idéntico al Problema 5 de Tercer Año (ver pág. 34).

Problema 3.
Ana y Bernardo juegan de la siguiente manera: Ana comienza diciendo un número entero del 1 al 10. Bernardo debe responder diciendo un número que sea mayor o igual que el doble y menor o igual que el triple del que dijo Ana. Ana a su vez debe responder con un número que sea mayor o igual que el doble y menor o igual que el triple del que dijo Bernardo, y así sucesivamente. Gana el que primero diga un número mayor que 100. Muestre que Ana siempre puede ganar este juego.

Problema 4.
(a) Pruebe la igualdad $\dfrac{n^2}{(n-1)(n+1)} = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

(b) Calcule el valor exacto de $\dfrac{2^2}{1\cdot 3} + \dfrac{3^2}{2\cdot 4} + \dfrac{4^2}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{2010^2}{2009\cdot 2011}$.

Problema 5.
En un triángulo ABC, el ángulo B mide 20° y el ángulo C mide 40°. La longitud de la bisectriz trazada desde el vértice A es 2. Halle $BC - AB$.

2.4.1. Soluciones

Las soluciones de los problemas 1 y 2 se encuentran a partir de la página 35.

3. Si uno de los dos, en su turno, dice un número del 34 al 99, pierde pues el siguiente en jugar gana diciendo el triple. Entonces el que logre decir un número del 17 al 33 gana, pues obliga al otro a responder un número del 34 al 99. El que diga un número del 6 al 16 pierde, pues el siguiente puede responder con un número del 18 al 32. Entonces Ana puede ganar comenzando con 3, 4 ó 5, pues esto obliga a Bernardo a responder con un número entre 6 y 15 (Si Ana dice 1 ó 2 pierde, pues Bernardo responde 3 ó 4, respectivamente).

3. Solución alternativa: Ana gana si comienza con 3, 4 ó 5. En efecto, si Ana comienza con 3, Bernardo debe responder con un número del 6 al 9, entonces Ana dice 18, Bernardo debe decir un número del 36 al 54 y Ana gana diciendo 108.

Si Ana comienza con 4, Bernardo debe responder con un número del 8 al 12, entonces Ana dice 24, Bernardo debe decir un número del 48 al 72 y Ana gana diciendo 144.

Si Ana comienza con 5, Bernardo debe responder con un número del 10 al 15, entonces Ana dice 30, Bernardo debe decir un número del 60 al 90 y Ana gana diciendo 180.

Es fácil ver que si Ana comienza con 1, 2, 6, 7, 8, 9 ó 10 entonces Bernardo le puede ganar.

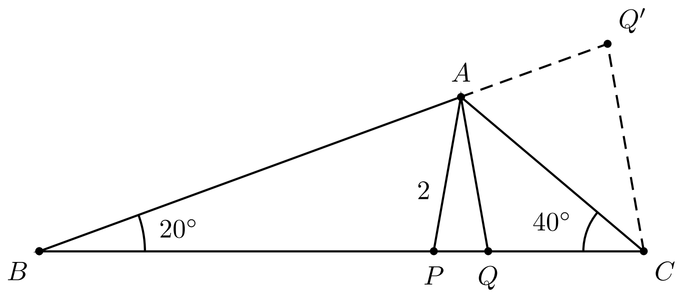
4. (a) $\dfrac{n^2}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{n^2}{n^2-1} = 1 + \dfrac{1}{n^2-1} = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right).$

(Por supuesto que también es válido comenzar por la expresión de la derecha y llegar a la de la izquierda).

(b) La suma pedida es igual a

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2009}-\frac{1}{2011}\right)\\
&=2009+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2010}+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2011}\right)\\
&=2009+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)\\
&=2009+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)=2009+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{4021}{2010\cdot 2011}\right)\\
&=2009+\frac{1}{2}\left(\frac{3\cdot 1005\cdot 2011-4021}{2010\cdot 2011}\right)=2009+\frac{3029572}{4042110}=2009+\frac{1514786}{2021055}.
\end{aligned}$$

5. Sea P el pie de la bisectriz y sea Q el punto en BC tal que $BQ = BA$. Entonces BAQ es isósceles y $\angle BAQ = \angle BQA = (180° - 20°)/2 = 80°$. Como $\angle APC = 180° - 40° - 60° = 80°$ entonces PAQ es isósceles y $AQ = AP = 2$. Como $\angle QAC = \angle BAC - \angle BAQ = 120° - 80° = 40°$, QAC también es isósceles y $QC = AQ = 2$. Por lo tanto $BC - AB = QC = 2$.



Alternativamente se puede tomar Q' en la prolongación de BA de tal modo que $BQ' = BC$, probar que $AQ' = AP = 2$ y por lo tanto $BC - AB = AQ' = 2$.

2.5. Prueba de Quinto Año

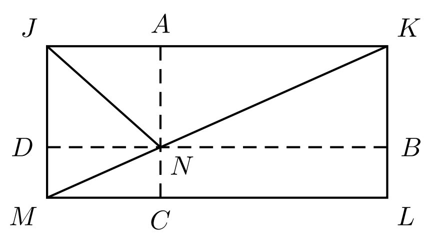
Problema 1. Idéntico al Problema 4 de Tercer Año (ver pág. 34).

Problema 2. Idéntico al Problema 5 de Tercer Año (ver pág. 34).

Problema 3. Idéntico al Problema 3 de Cuarto Año (ver pág. 35).

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Cuarto Año (ver pág. 35).

Problema 5.
En el rectángulo $JKLM$, la bisectriz del ángulo KJM corta a la diagonal KM en el punto N. Si las distancias de N a los lados LM y KL son, respectivamente, 1 y 8, ¿cuánto mide el lado LM?



2.5.1. Soluciones

Las soluciones de los problemas 1, 2, 3 y 4 se encuentran a partir de la página 35.

5. Sean A, B, C y D las proyecciones ortogonales de N sobre los lados JK, KL, LM y MJ, respectivamente. Entonces $MC = DN = NA = BK$, y como los triángulos NBK y MCN son semejantes se tiene $BK/NB = CN/MC$, es decir $MC/8 = 1/MC$, de donde $MC^2 = 8$, $MC = 2\sqrt{2}$ y $ML = MC + CL = 2\sqrt{2} + 8$.

Capítulo 3

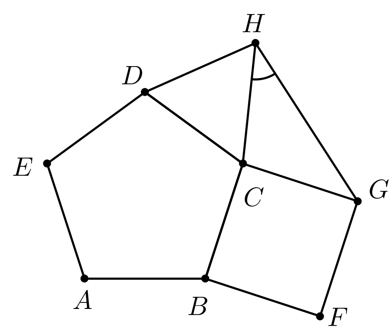
Prueba Final

La prueba final de la OJM consta de cuatro problemas. Cada uno de ellos se valora en una escala de 1 a 5. Los participantes disponen de tres horas y cuarto para resolverlos.

3.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. En una pizarra están escritos los números naturales del 1 al 9. Diana borra cuatro números, Paola borra otros cuatro y queda un número x sin borrar. Si se sabe que la suma de los números borrados por Paola es el triple de la suma de los números borrados por Diana, ¿cuáles son todos los posibles valores de x? Para cada valor de x que obtenga, indique cuáles serían los números borrados por Paola.

Problema 2. En la figura, $ABCDE$ es un pentágono regular que tiene adosados exteriormente un cuadrado $BFGC$ y un triángulo equilátero CHD. Halle la medida del ángulo $\angle CHG$.



Problema 3. Hoy, 26 de junio de 2010, cumple años Juan, un niño muy inteligente. Cuando le pregunté cuántos años cumplía, respondió: «Nací en este siglo, en un año que tuvo más miércoles que cualquier otro día de la semana». ¿Cuántos años está cumpliendo Juan?

Nota: Los años 2000, 2004 y 2008 fueron *bisiestos*, es decir que tuvieron 29 de febrero y un total de 366 días.

Problema 4. Adolfo tiene una gran cantidad de bloques cúbicos idénticos. Con ellos arma un cubo grande, que tiene n bloques por lado, y le sobran 57 bloques. Luego trata de armar un cubo con $n+1$ bloques por lado, pero comprueba que para eso le faltan 34 bloques. ¿Cuántos bloques tiene Adolfo?

3.1.1. Soluciones

1. La suma más pequeña que se puede formar con cuatro números del 1 al 9 es obviamente $1+2+3+4=10$, y la mayor es $6+7+8+9=30$. Como 30 es el triple de 10, un posible valor de x es 5, que es el número que queda en la pizarra si Diana borra 1, 2, 3 y 4 y Paola borra 6, 7, 8 y 9. Si Diana borra otros cuatro números, su suma sería mayor que 10, y la suma de los que borró Paola debería ser mayor que 30, lo cual es imposible. Por lo tanto no hay otras soluciones.

1. (Solución alternativa). Sea D la suma de los números borrados por Diana. Entonces la suma de los borrados por Paola debe ser $3D$ y $D+3D+x=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, es decir que $x=45-4D$, lo cual es posible si (x,D) es (1,11), (5,10) o (9,9). Pero D no puede ser 9, pues la menor suma de cuatro números es $1+2+3+4=10$. Tampoco puede ser $(x,D)=(1,11)$, pues la menor suma de cuatro números sin el 1 es $2+3+4+5=14$. $(x,D)=(5,10)$ sí es posible. Diana borró 1, 2, 3 y 4, Paola borró 6, 7, 8 y 9, y el 5 quedó en la pizarra.

2. Como $\angle BCG=90°$, $\angle BCD=180(5-2)/5=108°$ y $\angle HCD=60°$, resulta

$$\angle HCG=360°-\angle BCG-\angle BCD-\angle HCD=360°-90°-108°-60°=102°.$$

Pero $CG=CB=CD=CH$, luego el triángulo GCH es isósceles y

$$\angle CHG=\frac{1}{2}(180°-\angle HCG)=\frac{1}{2}78°=39°.$$

3. Como un año no bisiesto tiene 365 días, y $365=52\cdot 7+1$, el 1º de enero y el 31 de diciembre caen en el mismo día de la semana y ese día aparece en el año 53 veces, una más que cualquiera de los demás (que aparecen 52 veces cada uno). En los años bisiestos no hay ningún día de la semana que aparezca más que todos los demás, porque hay dos días que aparecen 53 veces y los otros cinco aparecen 52 veces.

Este sábado 26 de junio es el día $31+28+31+30+31+26=177$ del año. Como $177=25\cdot 7+2$, el 2 de enero fue sábado y el primero de enero viernes. Es decir que este año el día de la semana con más apariciones es el viernes. El día de la semana del 1º de enero de los últimos años se ve en la siguiente tabla:

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
sáb.	lu.	ma.	mi.	ju.	sáb.	dom.	lu.	ma.	ju.	vi.

Por lo tanto Juan nació en el 2003 y está cumpliendo 7 años.

4. La diferencia entre el número de bloques del primer cubo que armó Adolfo y el número de bloques del segundo que intentó armar es $57 + 34 = 91$. Observando la sucesión de cubos perfectos 1, 8, 27, 64, 125, 216,..., se comprueba que $216 - 125 = 91$, por lo tanto el primer cubo tenía 125 bloques y el número total de bloques era $125 + 57 = 182$.

4. Solución alternativa: $n^3 + 57 = (n + 1)^3 - 34$, por lo tanto $n^3 + 57 = n^3 + 3n^2 + 3n - 33$ y simplificando $3n^2 + 3n = 90$, que también se puede escribir como $n(n + 1) = 30$. Como n es un número natural, debe ser 5 y por lo tanto Adolfo tenía $5^3 + 57 = 182$ bloques.

3.2. Prueba de Segundo Año

Los problemas 1, 2 y 3 de segundo año son los mismos que los de primer año (ver pág. 39). Las pruebas sólo se diferencian en el problema 4.

Problema 4. Juan tiene un saco lleno de naranjas. A Pedro le regala la mitad de las naranjas más media naranja, a Luis le regala la tercera parte de las que le quedan más un tercio de naranja y a Armando la cuarta parte de lo que le queda más un cuarto de naranja. Al final, a Juan le quedaron 8 naranjas. ¿Cuántas naranjas tenía al principio? ¿Cuántas dio a cada amigo?

3.2.1. Soluciones

Las soluciones de los problemas 1, 2 y 3 se encuentran a partir de la página 40.

4. Si Juan tenía inicialmente x naranjas, a Pedro le regaló $(x+1)/2$ y le quedaron $(x-1)/2$. A Luis le regaló $(x-1)/6+1/3 = (x+1)/6$ y le quedaron $(x-1)/2-(x+1)/6 = (2x-4)/6 = (x-2)/3$. A Armando le regaló $(x-2)/12+1/4 = (x+1)/12$ y le quedaron $(x-2)/3 - (x+1)/12 = (3x-9)/12 = (x-3)/4 = 8$. Por lo tanto Juan tenía inicialmente $4 \cdot 8 + 3 = 35$ naranjas, a Pedro le regaló $(35 + 1)/2 = 18$, a Luis $(17 + 1)/3 = 6$ y a Armando $(11 + 1)/4 = 3$.

4. Solución alternativa: Si antes de regalarle naranjas a Armando Juan tenía z naranjas, entonces $z/4+1/4+8 = z$, de donde $3z = 33$ y $z = 11$. Análogamente, si antes de regalarle naranjas a Luis Juan tenía y naranjas, entonces $y/3+1/3+11 = y$ de donde $y = 17$. Y finalmente, si inicialmente Juan tenía x naranjas, entonces $x/2+1/2+17 = x$ y $x = 35$. A Pedro le regaló $(35+1)/2 = 18$, a Luis $(17+1)/3 = 6$ y a Armando $(11 + 1)/4 = 3$.

3.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Diego sumó dos números capicúas de cuatro cifras cada uno y observó con asombro que el resultado era otro número capicúa S pero de cinco cifras, ninguna de ellas nula. Encuentre todos los posibles valores de S y, en cada caso, muestre al menos dos maneras en que Diego podría obtener esos valores.

Nota: Un número es *capicúa* si se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo 2772 y 39493 son capicúas.

Problema 2. Juan tiene un tablero de 4×4 y desea marcar 8 de las 16 casillas de modo tal que cada fila y cada columna contengan exactamente dos casillas marcadas. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

Problema 3.
Un rombo mide 10 cm de lado y su área es 60 cm^2. Halle las longitudes de sus dos diagonales.

Problema 4. Halle dos números reales positivos a y b tales que su suma $a + b$, su producto ab y la diferencia de sus cuadrados $a^2 - b^2$ sean iguales.

3.3.1. Soluciones

1. Supongamos que los números sumados por Diego fueron $abba$ y $cddc$. Como al sumar dos números de la manera usual (columna por columna, de derecha a izquierda) a lo sumo nos podemos "llevar" uno en cada columna, el primer dígito de S debe ser necesariamente 1 (otra forma de verlo es que cada sumando es a lo sumo 9999, por lo cual la suma es a lo sumo 19998). Como S es capicúa, su dígito de las unidades es también 1, es decir que S es de la forma $1xyx1$.

$$\begin{array}{rr} & abba \\ + & cddc \\ \hline & 1xyx1 \end{array}$$

Entonces $a + c$ sólo puede ser 1 u 11. Pero si fuese 1, a o c sería 0 y uno de los sumandos no tendría cuatro cifras. Por lo tanto $a + c = 11$.

Supongamos ahora que en la segunda columna no nos llevemos nada, es decir que $b+d+1 < 10$. En ese caso $x = b+d+1$ y como en la tercera columna tampoco hay acarreo será $y = b + d = x - 1$. Al sumar la cuarta columna vemos que $x = 1$, por lo tanto $y = 0$ y el resultado sería 11011, que tiene una cifra 0. Al descartar esta posibilidad se debe tener entonces $b + d + 1 \geq 10$. En ese caso al sumar la segunda columna se tiene $b + d + 1 = 10 + x$ y al sumar la tercera columna se obtiene $b + d + 1 = 10 + y$, por lo tanto $x = y$. Al sumar la cuarta columna se tiene $a + c + 1 = 12$, es decir $x = 2$ y el resultado es 12221. En conclusión Diego sólo pudo obtener como resultado S de su suma 12221. Algunos de los pares de capicúas que pudo haber sumado María son 9999 y 2222, 9889 y 2332, 7667 y 4554, etc.

2. Numeremos las filas y las columnas de 1 a 4 y sea C_{ij} la casilla que se encuentra en la fila i y en la columna j. Las dos casillas marcadas de la primera fila se pueden escoger de $\binom{4}{2} = 6$ maneras. Supongamos que se escogen C_{11} y C_{12} (los otros casos son similares). Si en la fila 2 se marcan C_{21} y C_{22}, obligatoriamente se debe completar el marcado con C_{33}, C_{34}, C_{43} y C_{42}. Si en cambio en la fila 2 se marcan C_{23} y C_{24}, en la fila 3 se puede marcar cualquier par de casillas (hay 6 posibilidades) y quedan determinadas las dos casillas de la fila 4. Si en la fila 2 se escogen C_{21} y C_{23}, hay que marcar necesariamente C_{34} y C_{44} en la cuarta columna, y se puede completar de dos maneras: con C_{32} y C_{43} o con C_{33} y C_{42}. El mismo razonamiento se aplica si en la fila 2 se escogen las casillas C_{21} y C_{24}, C_{22} y C_{23} ó C_{22} y C_{24}. En definitiva resultan $6(1+6+2\cdot 4) = 6\cdot 15 = 90$ maneras.

2. (Solución alternativa). Como en la primera solución, las dos casillas marcadas de la primera fila se pueden escoger de $\binom{4}{2} = 6$ maneras. Supongamos que se escogen C_{11} y C_{12} (los otros casos son similares). En la primera columna se debe marcar otra casilla, que puede ser C_{21}, C_{31} o C_{41}. Supongamos que se marca C_{21}. Entonces el problema se reduce a calcular de cuántas maneras se pueden marcar 5 casillas en un tablero de 3×3, de modo que haya una casilla marcada en la primera fila, una en la primera columna, dos en cada una de las filas 2 y 3 y dos en cada una de las columnas 2 y 3. Eso se puede hacer de 5 maneras:

```
X - -    - X -    - X -    - - X    - - X
- X X    X - X    - X X    X X -    - X X
- X X    - X X    X - X    - X X    X X -
```

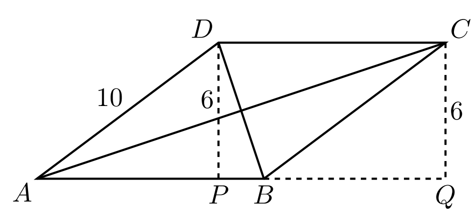
Por lo tanto la respuesta es $6\times 3\times 5 = 90$ maneras.

3. La altura PD debe ser $60/10 = 6$ cm, entonces por Pitágoras

$$AP = \sqrt{AD^2 - DP^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm},$$

de donde $PB = AB - AP = 10 - 8 = 2$ cm y la diagonal menor mide

$$BD = \sqrt{BP^2 + PD^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\text{cm}.$$



Análogamente la diagonal mayor mide

$$AC = \sqrt{AQ^2 + QC^2} = \sqrt{18^2 + 6^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}\text{cm}.$$

3. (Solución alternativa). Las diagonales dividen el rombo en cuatro triángulos congruentes, cada uno de ellos de área 15 cm^2. Sean x e y las medidas del cateto mayor y del cateto menor de estos triángulos, respectivamente (o sea las semidiagonales del rombo). Entonces por Pitágoras $x^2 + y^2 = 100$, mientras que por área es $xy/2 = 15$, es decir $xy = 30$. El sistema se puede resolver de varias maneras, por ejemplo sustituyendo $y^2 = 100 - x^2$ en $x^2y^2 = 900$ resulta $x^2(100 - x^2) = 900$, de donde $x^4 - 100x^2 + 900 = 0$ o $(x^2 - 10)(x^2 - 90) = 0$, es decir que $x^2 = 90$, $y^2 = 10$, $x = 3\sqrt{10}$, $y = \sqrt{10}$ y finalmente la diagonal menor mide $2y = 2\sqrt{10}$ cm y la mayor $2x = 6\sqrt{10}$ cm.

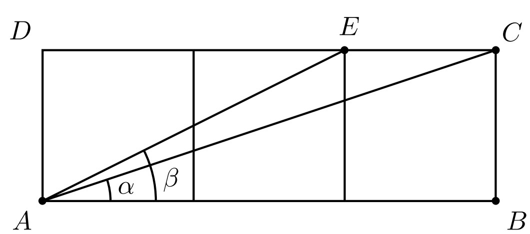
4. De $a + b = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ se deduce que $1 = a - b$, o $a = b + 1$. Sustituyendo este valor en la igualdad $ab = a + b$ resulta $(b + 1)b = 2b + 1$, o $b^2 - b - 1 = 0$. La única raíz positiva de esta ecuación es $b = (1 + \sqrt{5})/2$, de donde $a = (3 + \sqrt{5})/2$. Alternativamente se puede sustituir $b = a - 1$ en $ab = a + b$ para obtener $a^2 - 3a + 1 = 0$, que tiene raíces $a_1 = (3 + \sqrt{5})/2$ y $a_2 = (3 - \sqrt{5})/2$. La primera $(3 + \sqrt{5})/2$ da lugar a $b = (1 + \sqrt{5})/2$, que es la solución hallada anteriormente, mientras que la segunda $a_2 = (3 - \sqrt{5})/2$ se descarta porque da un valor negativo para b.

3.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. María escribe números naturales de tres cifras tales que la cifra central sea mayor que la suma de las otras dos, por ejemplo 273 y 494. ¿Cuántos números diferentes podrá escribir María, como máximo?

Problema 2. Con los cuatro números reales a, b, c y d, donde $a < b < c < d$, se pueden formar 6 parejas. Si cada pareja tiene suma distinta y las cuatro sumas más pequeñas son 1, 2, 3 y 4, ¿cuáles son todos los posibles valores del número d?

Problema 3. La figura muestra un rectángulo $ABCD$ dividido en tres cuadrados iguales, y los ángulos $\alpha = \angle BAC$ y $\beta = \angle BAE$. Halle el valor exacto, en grados, de $\alpha + \beta$.



Problema 4. Sea $P(n) = (n^2 - n + 1)(n^2 + 3n + 1)$. Halle todos los enteros n para los cuales $P(n)$ es un entero positivo primo.

3.4.1. Soluciones

1. Si la suma de la primera y la tercera cifras es k, para que la central sea mayor que k debe ser $1 \le k \le 8$. En ese caso, la cifra central puede ser $k+1,\dots,9$ y se puede escoger de $9-k$ maneras. Ahora bien, la primera y la tercera cifras se pueden escoger de k maneras para que sumen k, a saber 1 y $k-1$, 2 y $k-2,\dots$, $k-1$ y 1, k y 0. Por lo tanto el número buscado es

$$8\cdot 1+7\cdot 2+6\cdot 3+5\cdot 4+4\cdot 5+3\cdot 6+2\cdot 7+1\cdot 8 = 2(8+14+18+20) = 120.$$

1. (Solución alternativa). La primera y la tercera cifras se pueden escoger de k maneras para que sumen k ($1 \le k \le 8$), a saber 1 y $k-1$, 2 y $k-2,\dots$, $k-1$ y 1, k y 0. Si la cifra central es c ($2 \le c \le 9$) entonces la suma de la primera y la tercera cifras debe ser un natural del 1 al $c-1$, y por lo tanto esas dos cifras se pueden escoger de $1+2+\cdots+(c-1)$ maneras. Sumando para $c = 2,\dots,9$ resulta

$$\begin{aligned} &1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+4+5+6+7+8)\\ &= 1+3+6+10+15+21+28+36 = 120. \end{aligned}$$

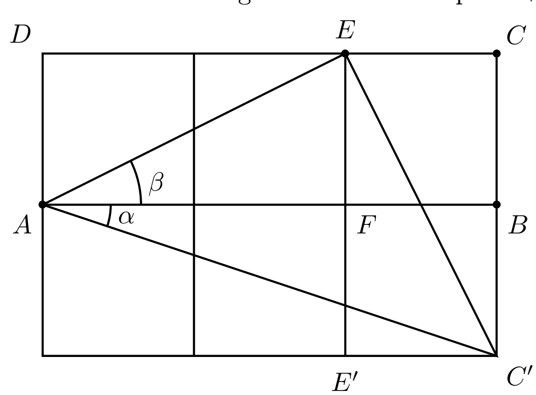
2. Las seis sumas posibles son $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ y $c+d$. Obviamente $a+b=1$ (suma más pequeña) y $a+c=2$, de donde $b=c-1$. Como $b+d$ y $c+d$ son las sumas mayores, se presentan dos posibilidades:

(1) $b+c=3$, $a+d=4$. En este caso $2c-1=3$ de donde $c=2$, $a=2-c=0$ y $d=4-a=4$.

(2) $b+c=4$, $a+d=3$. En este caso $2c-1=4$ de donde $c=5/2$, $a=2-c=-1/2$ y $d=3-a=7/2$.

Por lo tanto los valores posibles de d son 4 y $7/2$.

3. (Solución de Freddy J. Sánchez González, U.E. Cnel. Miguel A. Vásquez, Maracaibo, Estado Zulia. Esta solución ganó el premio UNEXPO a la solución más creativa). Simetrizando la figura respecto a la recta AB, si C' es el simétrico de C se observa que $\angle C'AB = \angle BAC = \alpha$. Como $AE = EC'$ el triángulo AEC' es isósceles, y como también es rectángulo en E resulta que $\alpha+\beta = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$



3. (Solución alternativa). De la figura se obtiene $\operatorname{tg}\alpha = 1/3$ y $\operatorname{tg}\beta = 1/2$, por lo tanto

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1,$$

de donde $\alpha + \beta = 45°$.

4. $P(n)$ será primo si, en valor absoluto, uno de los dos factores es primo y el otro es 1. Ahora bien,

$n^2 - n + 1 = 1$ equivale a $n(n-1) = 0$, que sólo ocurre si $n = 0$ o $n = 1$,

$n^2 - n + 1 = -1$ es imposible, pues $n^2 - n + 2 = (n - 1/2)^2 + 7/4 > 0$,

$n^2 + 3n + 1 = 1$ equivale a $n(n+3) = 0$, que sólo ocurre si $n = 0$ ó $n = -3$,

y $n^2 + 3n + 1 = -1$ equivale a $n^2 + 3n + 2 = 0$, ó $(n+2)(n+1) = 0$, que sólo ocurre si $n = -1$ ó $n = -2$.

Por lo tanto los candidatos para n son 0, 1, -3, -2 y -1. Como $P(0) = 1$, $P(1) = 5$, $P(-3) = 13$, $P(-2) = -7$ y $P(-1) = -3$, se concluye que $P(n)$ es un entero positivo primo si y sólo si $n = 1$ ó $n = -3$.

3.5. Prueba de Quinto Año

Los problemas 1, 2 y 3 de quinto año son los mismos que los de cuarto año (ver pág. 44). Las pruebas sólo se diferencian en el problema 4.

Problema 4. Si x es un número real positivo, se denota con $[x]$ la *parte entera* de x (el mayor entero que no supera a x) y con $\{x\}$ la *parte fraccionaria* de x, es decir $\{x\} = x - [x]$. Por ejemplo, si $x = 2{,}47$ entonces $[x] = 2$ y $\{x\} = 0{,}47$. Halle todos los números reales positivos x para los cuales la secuencia $\{x\}$, $[x]$, x está en progresión geométrica.

3.5.1. Soluciones

Las soluciones de los problemas 1, 2 y 3 se encuentran a partir de la página 45.

4. Supongamos que $\{x\}$, $[x]$ y x están en progresión geométrica de razón r. Es claro que ni $\{x\}$ ni $[x]$ pueden ser 0, pues entonces la progresión sería 0, 0, 0 y x no sería positivo. Si $[x] \geq 1$, $\{x\} > 0$ y $x/[x] = [x]/\{x\} = r$, sustituyendo $[x] = r\{x\}$ y $x = r[x] = r^2\{x\}$ en $x = [x] + \{x\}$ resulta $r^2\{x\} = r\{x\} + \{x\}$, y dividiendo entre $\{x\}$ queda $r^2 = r + 1$, cuya única raíz positiva es $r = (1+\sqrt{5})/2$ (esto en realidad es inmediato si se observa que $[x]$ y x están en razón áurea y por lo tanto como es bien sabido $r = (1+\sqrt{5})/2$). Ahora bien, como debe ser $\{x\} < 1$, debe cumplirse $[x] = r\{x\} < r = (1+\sqrt{5})/2 < (1+\sqrt{4})/2 = 3/2$, lo que deja como único valor posible para $[x]$ el 1 y por tanto $x = r[x] = (1+\sqrt{5})/2$ es la única solución.

Capítulo 4

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe tuvo lugar en Mayagüez, Puerto Rico, desde el 21 de mayo hasta el 1º de junio de 2010. En la misma participaron catorce países: Colombia, Costa Rica, El Salvador, Guatemala, Honduras, Islas Vírgenes (U.S.), Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana, Trinidad y Tobago y Venezuela.

Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Diego Leonardo Peña Colaiocco (Colegio Los Hipocampitos, Altos Mirandinos), Carlos Lamas Bárcenas (Colegio Independencia, Barquisimeto) y Sergio Villaroel (Colegio San Lázaro, Cumaná), que obtuvieron una medalla de plata y dos de bronce, respectivamente. Venezuela obtuvo también la Copa El Salvador, que se otorga al país de mayor progreso relativo en los últimos tres años. La jefa de la delegación fue Laura Vielma y la tutora Carmela Acevedo. De Venezuela también asistieron a esta olimpiada los profesores Rafael Sánchez Lamoneda, como miembro de los tribunales de coordinación, y José Heber Nieto, jefe del banco de problemas y conferencista del Simposio previo a la competencia.

4.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Si $S(n)$ denota la suma de los dígitos de un número natural n, encuentre todas las soluciones de

$$n\,(S(n)-1)=2010$$

mostrando que son las únicas.

Problema 2. Dado el $\triangle ABC$, sean L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Se traza una tangente al circuncírculo del $\triangle ABC$ en A, siendo P y Q las intersecciones respectivas de las rectas LM y LN con dicha tangente. Demuestre que CP es paralela a BQ.

Problema 3. Un jugador coloca una ficha en una casilla de un tablero $m \times n$ dividido en casillas de tamaño 1×1. El jugador mueve la ficha de acuerdo a las siguientes reglas:

- En cada movimiento, el jugador cambia la ficha de la casilla en que ésta se encuentra a una de las casillas que tienen un lado en común con ella.
- El jugador no puede ubicar la ficha en una casilla que ésta ha ocupado previamente.
- Dos movimientos consecutivos no pueden tener la misma dirección.

El juego termina cuando el jugador no puede mover la ficha. Determine todos los valores de m y n para los cuales el jugador puede colocar la ficha en alguna casilla tal que ésta haya ocupado todas las casillas al terminar el juego.

Segundo Día

Problema 4. Se desea embaldosar un patio cuadrado de lado N entero positivo. Se dispone de dos tipos de baldosas: cuadradas de 5×5 y rectangulares de 1×3. Determine los valores de N para los cuales es posible hacerlo.
Nota: El patio debe quedar completamente cubierto, sin que las baldosas se sobrepongan.

Problema 5. Sean p, q y r números racionales distintos de cero tales que

$$\sqrt[3]{pq^2} + \sqrt[3]{qr^2} + \sqrt[3]{rp^2}$$

es un número racional distinto de cero. Pruebe que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$$

también es un número racional.

Problema 6. Sean Γ y Γ_1 dos circunferencias tangentes internamente en A, de centros O y O_1 y radios r y r_1 ($r > r_1$), respectivamente. Sea B el punto diametralmente opuesto a A en la circunferencia Γ, y C un punto en Γ tal que BC es tangente a Γ_1 en P. Sea A' el punto medio de BC. Si se cumple que O_1A' es paralela a AP, determine la razón $\frac{r}{r_1}$.

4.2. Soluciones

1. (Solución de Sergio Villaroel). Podemos empezar diciendo que 2010 es un múltiplo de 3, ya que el criterio de divisibilidad dice que la suma de los dígitos del número debe ser múltiplo de 3, $(2+0+1+0=3)$, luego tendría que cumplirse que alguno de los dos números n o $(S(n)-1)$ sea de la forma $3q$, $q \in \mathbb{N}$, para que su producto sea un múltiplo de 3. Si n es de la forma $3q$, entonces $S(n)-1$ es de la forma $3p-1$, $p \in \mathbb{N}$, ya que $S(n)$ necesariamente es un múltiplo de 3 porque n es divisible entre 3. El otro caso es que $(S(n)-1)$ sea de la forma $3q$ por lo que $S(n)$ sería de la forma $3j+1$, $j \in \mathbb{N}$, y n no sería divisible por 3. Entonces, $n \equiv 1 \pmod 3$ o $n \equiv 2 \pmod 3$.

Podemos decir que $n < 2010$ y $(S(n)-1) < 2010$ ya que ambos son naturales cuyo producto es 2010. Por ello, el mayor valor que podría tomar $S(n) = 28$ donde $n = 1999$ y $1999 < 2010$.

Por otro lado, notamos que 2010 tiene como cifra de unidades el 0 y para que el producto de dos números tenga como cifra de unidades el 0, pueden pasar dos cosas: o las cifras de unidades de cada factor son 2 y 5, o alguno de los factores tiene cifra de unidades 0. Luego, n y/o $(S(n)-1)$ son pares.

La factorización prima de 2010 es $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ y los demás múltiplos de 2010 resultan de multiplicar estos primos de diferentes formas. Al hacerlo, obtenemos que 2010 tiene 16 divisores, un número par. Agruparemos estos divisores en una tabla de tal forma que el producto de las filas sea 2010 e indicando si son congruentes con 0, 1 ó 2 módulo 3.

1	2
$1 \equiv 1 \pmod 3$	$2010 \equiv 0 \pmod 3$
$2 \equiv 2 \pmod 3$	$1005 \equiv 0 \pmod 3$
$3 \equiv 0 \pmod 3$	$670 \equiv 1 \pmod 3$
$5 \equiv 2 \pmod 3$	$402 \equiv 0 \pmod 3$
$6 \equiv 0 \pmod 3$	$335 \equiv 2 \pmod 3$
$10 \equiv 1 \pmod 3$	$201 \equiv 0 \pmod 3$
$15 \equiv 0 \pmod 3$	$134 \equiv 2 \pmod 3$
$30 \equiv 0 \pmod 3$	$67 \equiv 1 \pmod 3$

Tabla de Divisores de 2010

En la tabla se obtuvieron los números para los que se cumple el enunciado, es decir, si $n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (S(n)-1) \equiv 2 \pmod 3$. Busquemos dos números en la tabla en alguna columna donde uno sea congruente con 2 y el otro congruente con 0 módulo 3. Los valores de n se toman de la fila 2 porque debe cumplirse que $n > (S(n)-1)$. Tendríamos los siguiente valores:

- $1005 \equiv 2 \pmod 3$ y $2 \equiv 2 \pmod 3$, pero $(1+0+0+5)-1 = 5 \neq 2$ y no cumple.
- $402 \equiv 0 \pmod 3$ y $5 \equiv 2 \pmod 3$, y probando $(4+0+2)-1 = 5$ si cumple.

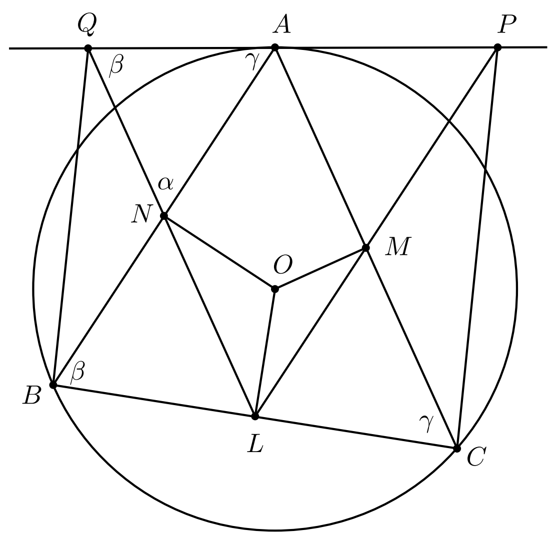
Ahora para $(S(n) - 1) \equiv 0 \pmod{3}$ debemos buscar en la fila 1 los números congruentes con 0 módulo 3 y tomar sus parejas para hacerles la prueba.

- $3 \equiv 0 \pmod{3}$ y $670 \equiv 1 \pmod{3}$, pero $(6+7+0)-1 = 12 \neq 3$ y no cumple.
- $6 \equiv 0 \pmod{3}$ y $335 \equiv 2 \pmod{3}$, pero $(3+3+5)-1 = 10 \neq 6$ y no cumple.
- $15 \equiv 0 \pmod{3}$ y $134 \equiv 2 \pmod{3}$, pero $(1+3+4)-1 = 7 \neq 15$ y no cumple.
- $30 \equiv 0 \pmod{3}$ y $67 \equiv 2 \pmod{3}$, se descarta porque 30 tiene 0 en las cifras de las unidades y entonces $(S(n) - 1)$ debe ser 0 que no es posible o como mínimo 30 que tampoco puede ser ya que el máximo valor de $S(n)$ es 28.

Luego, podemos decir que para el único n que se cumple la condición dada $n(S(n) - 1) = 2010$ es $n = 402$. Finalmente, se verifica que:

$$\begin{aligned} 402(S(402) - 1) &= 2010 \\ 402((4+0+2) - 1) &= 2010 \\ 402(5) &= 2010 \\ 2010 &= 2010. \end{aligned}$$

2. (Solución de Carlos Lamas Bárcenas). Observemos la siguiente figura:



Como la recta QP es tangente en A a la circunferencia, se tiene que $\angle ACB = \angle BAQ = \angle NLB = \gamma$. Con esto se prueba que el cuadrilátero $BQAL$ es cíclico. De manera análoga, se prueba que el cuadrilátero $LAPC$ también lo es.

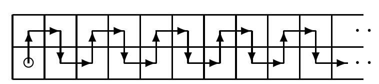
Luego, $\angle BQL = \angle BAL$ y $\angle ALP = \angle ACP$. Ahora bien, como N, L, M son puntos medios de los lados respectivos del triángulo ABC, se tiene que el cuadrilátero $NAML$ es un paralelogramo. De esto se deriva que $\angle ALM = \angle NAL$, lo que a su vez implica que $\angle BQL = \angle ACP$. Finalmente, como QL es una recta paralela a AC (ya que es la prolongación de NL), se tiene que $BQ \parallel CP$.

Análogamente, $PALC$ es cíclico. Con esto $\angle QBL = \angle LAP = 180° - \angle LCP$ y por lo tanto $CP \parallel BQ$.

3. Se mostrará que los posibles tableros que pueden ser recorridos por la ficha son el tablero de tamaño 1×1 y aquellos tableros en los que al menos uno de sus lados tiene longitud 2.

El caso del tablero 1×1 es claro, ya que al ubicar una ficha en el tabler automáticamente esta ya ha recorrido todo el tablero.

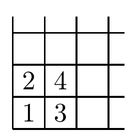
Para los tableros donde uno de los lados tiene longitud 2 considérese el siguiente patrón de recorrido, donde la marca $\circ$ representa la ubicación inicial de la ficha.



Este patrón de recorrido puede interrumpirse en cualquier momento que se desee, completando así a voluntad tableros rectangulares en los que uno de los lados tiene longitud 2 y el otro tiene una longitud entera positiva arbitraria.

Resta entonces demostrar que para los otros tamaños de tablero no es posible realizar el recorrido. Si uno de los lados del tablero es de longitud 1 y el otro es de longitud mayor o igual a 3, la condición de no seguir la misma dirección en dos movimientos consecutivos hace evidente que el tablero no se pueda recorrer, ya que despúes del primer movimiento (dos casillas recorridas) se exige un giro que en este caso resulta imposible.

Si las longitudes de los dos lados del tablero son mayores que 2, es posible aislar al menos una esquina como la que se muestra en la siguiente figura, con las condiciones que se aclararán a renglón seguido:



¿Cuáles son las condiciones especiales que cumple la esquina elegida?

1. La ficha no inició en ninguna de las casillas 1, 2 ó 3.

2. El recorrido de la ficha no terminará en la casilla 1, será solamente una casilla de paso.

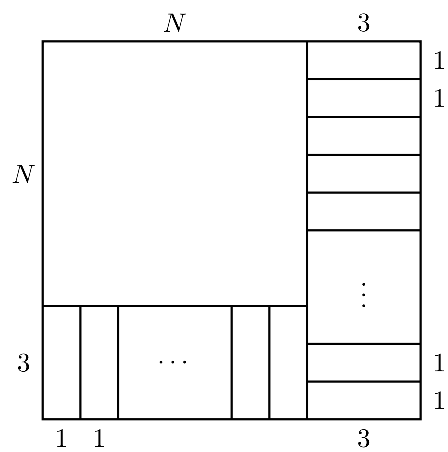
Como la casilla 1 es una casilla de paso –según la condición (b)–, debe llegarse a ella desde otra casilla y debe salirse de ella hacia otra casilla. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que el recorrido alrededor de la casilla 1 se hace en el orden $2 \to 1 \to 3$.

Ahora, como la ficha no inició en la casilla marcada como 2 –según la condición (a)–, es necesario que provenga de otra casilla, y debido a la condición de no dar dos pasos consecutivos en la misma dirección se hace necesario que la ficha provenga de la casilla marcada como 4. Así, el recorrido puede rastrearse hasta $4 \to 2 \to 1 \to 3$.

Nótese que la casilla 4 ya hace parte del recorrido, por lo que dicho recorrido debe concluir en la casilla 3, ya que es imposible proseguir a partir de la casilla 3 sin continuar en la misma dirección o repetir casilla.

Los párrafos anteriores indican que, de las cuatro esquinas del tablero al menos dos cumplen la condición (a) y al menos una cumple las dos condiciones. Según lo demostrado, esa casilla debe ser la penúltima casilla del recorrido y la última casilla del recorrido no puede ser entonces otra esquina. Así, existe otra esquina que se tiene que ajustar a los parámetros resaltados y por lo tanto existen dos esquinas en el tablero que deben ser simultáneamente la penúltima esquina del recorrido, lo que es absurdo. Se concluye así la demostración.

4. (Solución de Diego Leonardo Peña Colaiocco). Primero, probemos que si es posible cubrir patios de lado N, es posible cubrir patios de lado $N+3$. Una manera de hacerlo es formando un cuadrado de lado N tal que uno de sus vértices sea una esquina del patio. Entonces, nos van a quedar “franjas"de 1×3 que podemos cubrir con baldosas de 1×3, como se muestra en la siguiente figura:



Ahora sabemos que uniendo 3 baldosas de 1×3 formamos un cuadrado de lado 3. Luego, para cualquier N de la forma $3 + 3k$, es decir, para cualquier $N \equiv 0 \pmod 3$ es posible embaldosar un patio de lado N.

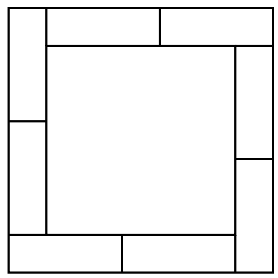
Es imposible formar un patio de lado 2, pues no caben ni las baldosas de 5×5 ni las de 1×3. Por la misma razón tampoco se puede embaldosar un patio de lado 1.

Un patio de lado 4 tampoco se puede embaldosar ya que en él no caben las baldosas de 5×5 y por otro lado, para poder utilizar las de lado 1×3, 3 debería dividir al área del patio y no lo hace ($3 \nmid 16 = 4^2$).

Se puede completar un patio de lado 5 simplemente usando una baldosa de tamaño 5×5.

Luego, para cualquier $N = 5 + 3k$, es decir, $N \equiv 2 \pmod 3$, con $N \neq 2$, es posible embaldosar un patio de lado N.

Es posible embaldosar un patio de lado 7, como muestra la figura:



Entonces para cualquier N de la forma $7 + 3k$, es decir, $N \equiv 1 \pmod 3$ con $N \neq 1$ y $N \neq 4$ es posible embaldosar un patio de lado N.

Luego, es posible embaldosar patios de cualquier lado diferente de 1, 2, y 4. Es decir, N puede tomar cualquier valor entero positivo diferente de 1, 2 y 4.

5. Sean $a = \sqrt[3]{pq^2}$, $b = \sqrt[3]{qr^2}$ y $c = \sqrt[3]{rp^2}$. Se debe probar que $1/a + 1/b + 1/c$ es racional. Pero como $abc = \sqrt[3]{p^3q^3r^3} = pqr$ es racional, y

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc},$$

basta probar que $ab + bc + ca$ es racional. Ahora bien,

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc$$

y

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) + 6abc,$$

por lo tanto

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) + 3abc = 3(a + b + c)(ab + bc + ca),$$

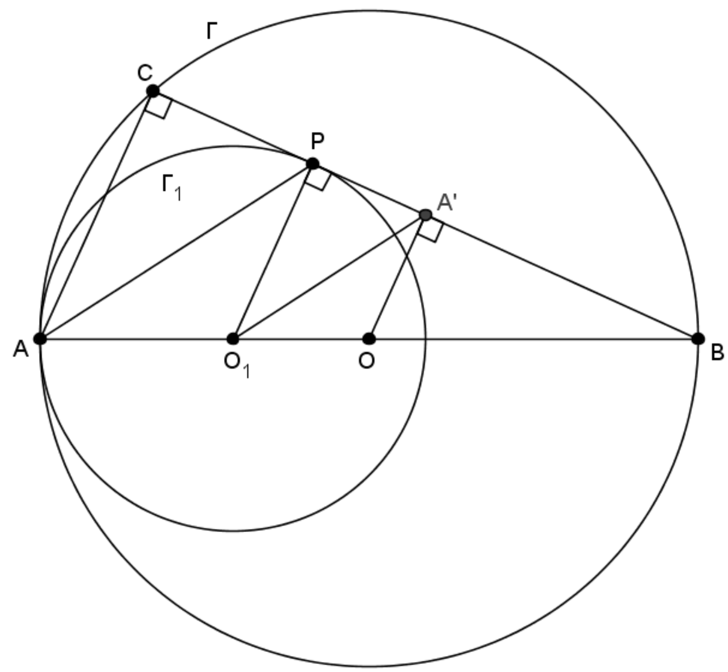
y como $a + b + c$, a^3, b^3, c^3 y abc son todos racionales, resulta que $ab + bc + ca$ es racional.

6. Observe que $AC \parallel O_1P \parallel OA'$. También $\triangle APO_1 \simeq \triangle O_1A'O$, porque tienen lados paralelos, y como $O_1A = O_1P$ también se cumple $r - r_1 = OO_1 = OA' = \frac{b}{2}$.

Por otra parte, $\triangle ABC \simeq \triangle O_1BP$ entonces $\frac{CA}{PO_1} = \frac{AB}{O_1B}$, así

$$\frac{b}{r_1} = \frac{2r}{2r - r_1} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{rr_1}{2r - r_1} \Rightarrow r - r_1 = \frac{rr_1}{2r - r_1} \Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Pero como $r > r_1$, forzosamente $\dfrac{r}{r_1} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$.



Capítulo 5

Olimpiada Iberoamericana de Matemática

La XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemática tuvo lugar en Asunción, Paraguay, del 20 al 30 de septiembre de 2010. En la misma participaron veinte países: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Portugal, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela.

Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Diego Leonardo Peña Colaiocco (Colegio Los Hipocampitos, Altos Mirandinos), Edenys Hernao Hernández (Colegio Altamira, Maracaibo), Carlos Lamas Bárcenas (Colegio Independencia, Barquisimeto) y Tomás Rodríguez Oramas (Colegio Arco Iris, Porlamar), quienes obtuvieron una medalla de bronce y tres menciones de honor, respectivamente. La jefa de la delegación fue Laura Vielma Herrero y el tutor Eduardo Sarabia. De Venezuela también asistieron a esta olimpiada los profesores Rafael Sánchez Lamoneda y José Heber Nieto, como conferencistas en el Simposio previo a la competencia y miembros de los Tribunales de Coordinación.

5.1. Problemas

(Primer Día)

Problema 1. Se tienen diez monedas indistinguibles puestas en línea. Se sabe que dos de ellas son falsas y ocupan posiciones consecutivas en la línea. Para cada conjunto de posiciones, se puede preguntar cuántas monedas falsas contiene. ¿Es posible determinar cuáles son las monedas falsas efectuando únicamente dos de estas preguntas, sin conocer la respuesta de la primera antes de formular la segunda?

Problema 2. Determinar si existen números enteros positivos a y b tales que todos los términos de la sucesión definida por $x_1 = 2010, x_2 = 2011$,

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}, \quad n \geq 1,$$

sean enteros.

Problema 3. La circunferencia Γ inscrita al triángulo escaleno ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. La recta EF corta a la recta BC en G. La circunferencia de diámetro GD corta a Γ en R $(R \neq D)$. Sean P y Q $(P \neq R, Q \neq R)$ las intersecciones de BR y CR con Γ, respectivamente. Las rectas BQ y CP se cortan en X. La circunferencia circunscrita a CDE corta al segmento QR en M y la circunferencia circunscrita a BDF corta al segmento PR en N. Demostrar que las rectas PM, QN y RX son concurrentes.

(Segundo Día)

Problema 4. Las medias aritmética, geométrica y armónica de dos números enteros positivos distintos son números enteros. Hallar el menor valor posible para la media aritmética. Nota: Si a y b son números positivos, sus medias aritmética, geométrica y armónica son respectivamente: $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{a \cdot b}$, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales AC y BD son perpendiculares. Sean O el circuncentro de $ABCD$, K la intersección de las diagonales, $L \neq O$ la intersección de las circunferencias circunscritas a OAC y OBD, y G la intersección de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los lados de $ABCD$. Probar que O, K, L y G están alineados.

Problema 6. Alrededor de una mesa circular se sientan 12 personas y sobre la mesa hay 28 floreros. Dos personas pueden verse si y sólo si no hay ningún florero alineado con ellas. Probar que existen al menos dos personas que pueden verse.

5.2. Soluciones

1. (Solución de Diego Peña Colaiocco). Numeremos las posiciones de las monedas del 1 al 10 y a partir de ahora llamemos a cada posición por su número. Cada conjunto de posiciones es un subconjunto de $\{ 1, 2, \ldots, 10 \}$. A las monedas falsas las llamaremos 'falsas' y representaremos sus lugares por $(i, i+1), i = 1, 2, \ldots, 9$. Esto último es posible gracias a que las monedas están en lugares consecutivos, es decir, que las monedas falsas se encuentren en $(i, i+1)$ significa que las monedas falsas ocupan las posiciones i e $i+1$, respectivamente. Llamaremos P y Q a los conjuntos de posiciones por los que la persona pregunta y llamaremos $g(P)$ y $g(Q)$ a la cantidad de falsas en P y Q, respectivamente. Sin perder generalidad, supóngase que primero la persona preguntó $g(P)$ y luego $g(Q)$. Veamos que si tomamos $P = \{2, 3, 4, 9, 10\}$ y $Q = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ siempre podemos identificar las falsas. Si las falsas son:

- $(1, 2)$, entonces $g(P) = 1$ y $g(Q) = 2$.
- $(2, 3)$, entonces $g(P) = 2$ y $g(Q) = 2$.
- $(3, 4)$, entonces $g(P) = 2$ y $g(Q) = 1$.
- $(4, 5)$, entonces $g(P) = 1$ y $g(Q) = 1$.
- $(5, 6)$, entonces $g(P) = 0$ y $g(Q) = 2$.
- $(6, 7)$, entonces $g(P) = 0$ y $g(Q) = 1$.
- $(7, 8)$, entonces $g(P) = 0$ y $g(Q) = 0$.
- $(8, 9)$, entonces $g(P) = 1$ y $g(Q) = 0$.
- $(9, 10)$, entonces $g(P) = 2$ y $g(Q) = 0$.

Podemos ver que por cada lugar de las falsas, hay una sola pareja $g(p), g(q)$. Por tanto, al conocer las respuestas de las preguntas $g(P)$ y $g(Q)$ se conocerá la posición de las monedas falsas.

1. (Solución de Tomás Rodríguez). Llamemos $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ a las posiciones de las monedas. Llamemos F_1 y F_2 a las monedas falsas. Sabemos que F_1 y F_2 están en posiciones P_n y P_{n+1} por ser consecutivas, y como podemos ver, sólo hay 9 posiciones (P_n, P_{n+1}) en donde pueden estar F_1 y F_2. Estas son: $(1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 6); (6, 7); (7, 8); (8, 9); (9, 10)$. Ahora llamemos a G_1 y G_2 a los dos conjuntos de posiciones y llamemos a G_3 al conjunto en donde están las posiciones excluidas de G_1 y G_2. Se tiene entonces que para G_1 y G_2 hay 3 posibles respuestas: dos, una o cero $(2, 1,$ ó $0)$ monedas falsas lo que nos da un total de 9 posibles respuestas diferentes. De esta manera, cada respuesta debe corresponder a una y sólo una posición de F_1, F_2 (P_n, P_{n+1}), para así asegurarnos de conocer la posición de las monedas falsas. Entonces, basta con conseguir una forma de ordenar los tres conjuntos convenientemente. Un ejemplo es $G_1 = \{P_1, P_2, P_7, P_8, P_9\}; G_2 = \{P_3, P_4, P_8, P_9, P_{10}\}; G_3 = \{P_5, P_6\}$. Como se puede ver, en estos tres grupos las posiciones están ordenadas de manera tal que los elementos de cada pareja (P_n, P_{n+1}) aparecen en los tres grupos un número distinto de veces y cada par (P_n, P_{n+1}) tiene una respuesta distinta, como se observa en la tabla a continuación.

(P_n, P_{n+1})	(G_1, G_2)
(P_1, P_2)	$(2, 0)$
(P_2, P_3)	$(1, 1)$
(P_3, P_4)	$(0, 2)$
(P_4, P_5)	$(0, 1)$
(P_5, P_6)	$(0, 0)$
(P_6, P_7)	$(1, 0)$
(P_7, P_8)	$(2, 1)$
(P_8, P_9)	$(2, 2)$
(P_9, P_{10})	$(1, 2)$

Por lo tanto, podemos identificar la posición de las dos monedas falsas.

1. (Solución de Edenys Hernao). Para resolver este problema, se irán analizando las condiciones que debe cumplir cada conjunto por el cual se debe preguntar para así llegar a una respuesta que nos indique dónde se encuentran ubicadas las monedas falsas. No nos ayuda tener en un conjunto 1 moneda o 10 monedas, puesto que no nos da información útil, al igual que 2 y 8 monedas. Ahora bien, según se tengan armados los conjuntos, las posibles respuestas a obtener son 0, 1 ó 2 monedas falsas en el conjunto. Entonces, se debe preguntar la primera vez de manera tal que, dada la respuesta, se tengan máximo 3 posibles combinaciones. Si hay más de tres combinaciones para cada respuesta, no se va a poder distinguir con certeza cuál es la solución dado que por el principio de las casillas, una de las respuestas va a estar repetida en la segunda pregunta. Supongamos que la pregunta 1 incluye las posiciones 3, 4, 5, 6 y 10 y la pregunta 2 las posiciones 1, 2, 3, 4, y 7. Si en la pregunta 1 responden 0 se tienen 3 posibles combinaciones según la respuesta a la pregunta 2.

- Si responden 2, la posición de las falsas son 1 y 2.
- Si responden 1, la posición de las falsas son 7 y 8.
- Si responden 0, la posición de las falsas son 8 y 9.

Si en la pregunta 1 responden 1 se tienen 3 posibles combinaciones según la respuesta a la pregunta 2.

- Si responden 2, la posición de las falsas son 2 y 3.
- Si responden 1, la posición de las falsas son 6 y 7.
- Si responden 0, la posición de las falsas son 9 y 10.

Si en la pregunta 1 responden 2 se tienen 3 posibles combinaciones según la respuesta a la pregunta 2.

- Si responden 2, la posición de las falsas son 3 y 4.
- Si responden 1, la posición de las falsas son 4 y 5.

- Si responden 0, la posición de las falsas son 5 y 6.

Ahora bien, se deben generar dos conjuntos donde podamos obtener una única solución. Para ello, como las continuas o consecutivas son las que generan las posibilidades en caso de que la respuesta sea 2, se debe tratar de tener la mayor cantidad de fichas posibles juntas pero no se pueden tener más de 4 consecutivas puesto que se generarían más de 3 posibilidades. 5 consecutivas originan 4 posibilidades en vez de 3. Por tanto, en la pregunta 1 se incluyen las posiciones 3, 4, 5, 6, y 10 y en la pregunta 2 las posiciones 1, 2, 3, 4, y 7. Con estas dos preguntas, se puede distinguir la posición de las falsas.

2. La respuesta es *sí*. Un ejemplo puede ser obtenido con $a = 2$ y $b = 2011$. Obtenemos la sucesión $x_1 = 2010, x_2 = 2011$,

$$x_{n+2} = x_n + n_{n+1} + 2\sqrt{x_n x_{n+1} + 2011}, n \geq 1.$$

Probaremos por inducción que todo término de la sucesión es entero. Para eso, probaremos por inducción sobre n que x_{n+1} y $\sqrt{x_n x_{n+1} + 2011}$ son ambos enteros.

La base de inducción, $n = 1$, es inmediata. Ahora, suponga que el resultado es válido para $n \geq k$. Entonces, como $\sqrt{x_k x_{k+1} + 2011}$ es entero, x_{k+2} es claramente entero. Además,

$$\begin{aligned} x_{k+1}x_{k+2} + 2011 &= x_{k+1}(x_k + k_{k+1} + 2\sqrt{x_k x_{k+1} + 2011}) + 2011 \\ &= x_{k+1}^2 + 2x_{k+1}\sqrt{x_k x_{k+1} + 2011} + x_k x_{k+1} + 2011 \\ &= (x_{k+1} + \sqrt{x_k x_{k+1} + 2011})^2, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

2. (Solución Alternativa) Primero note que para $a = 2$ y $b = 2011$, $x_3 = 2011 \cdot 2^2 - 1$ y $x_4 = 2011 \cdot 3^2 - 1$ y que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Lema: Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = 2011u^2 - v^2, x_{i+1} = 2011w^2 - z^2$, para ciertos $u, v, w, z \in \mathbb{N}$. Si $\begin{vmatrix} u & v \\ w & z \end{vmatrix}^2 = 1$, entonces $x_{i+2} = 2011(u + w)^2 - (v + z)^2 \in \mathbb{N}$.

Demostración: Como $\begin{vmatrix} u & v \\ w & z \end{vmatrix}^2 = (uz - vw)^2 = 1$ implica $u^2z^2 + v^2w^2 - 1 = 2uvwz$, resulta

$$x_i \cdot x_{i+1} + 2011 = 2011^2u^2w^2 + v^2z^2 - (u^2z^2 + v^2w^2 - 1)2011 = (2011uw - vz)^2.$$

Entonces,

$$x_{i+2} = 2011u^2 - v^2 + 2011w^2 - z^2 + 2(2011uw - vz) = 2011(u + w)^2 - (v + z)^2 \in \mathbb{N},$$

lo que concluye la demostración del lema.

Como $\begin{vmatrix} w & z \\ u+w & v+z \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} w & z \\ u & v \end{vmatrix}^2 = 1$ y $x_{i+2} = 2011(u+w)^2 - (v+z)^2$ se puede aplicar sucesivamente el lema y concluir que $x_{i+n} \in \mathbb{N}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

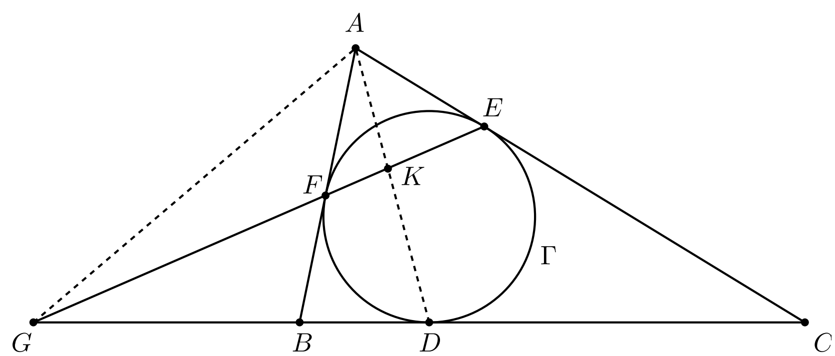
3. La solución tiene tres partes:

I) $\frac{GB}{GC} = DBDC$ y por lo tanto, la circunferencia de diámetro GD es el círculo de Apolonio de BC;

II) RX pasa por los puntos medios de BC y PQ.

III) M y N son los puntos medios de QR y PR, respectivamente.

Parte I. Hay varias posibles demostraciones para este hecho, veamos dos de ellas.



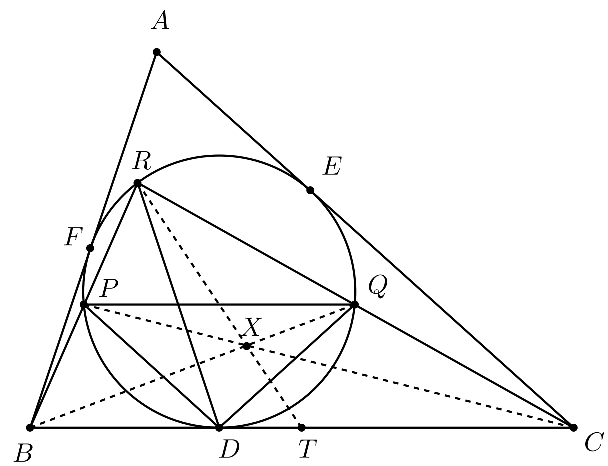
Demostración 1: Usando el teorema de Menelao para ABC y la terna G, F, E se obtiene: $\frac{GB}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$.

Como $AF = AE, FB = DB$ y $CE = CD$ entonces $\frac{GB}{GC} = \frac{DB}{DC}$.

Demostración 2 (geometría proyectiva):

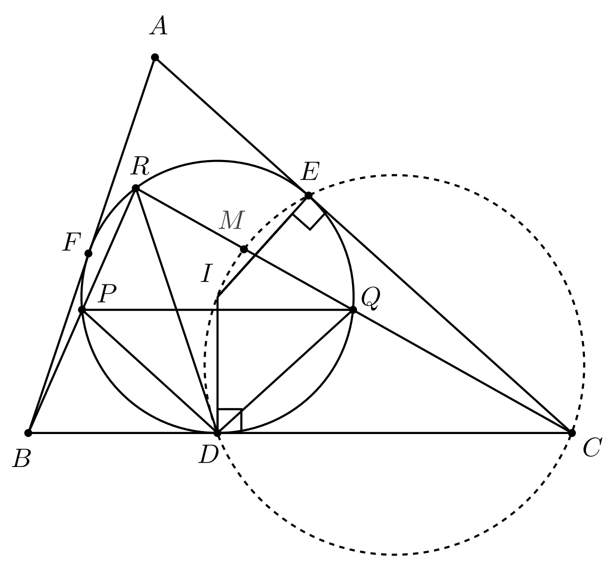
Considere el incírculo como referencia. Siendo G la intersección de la recta EF, polar de A, y de la recta BC, polar de D, entonces la recta polar de G es AD. Es bien conocido que las intersecciones de una recta con un punto, su polar y el círculo de referencia, o sea, G, F, K y E forman una cuaterna armónica. Por lo tanto, AG, AF, AK y AE forman un haz de rayos armónico y luego las intersecciones G, B, D, C de BC con el haz forman una cuaterna armónica, y el resultado sigue.

Parte II. Como R está en el círculo de Apolonio de BC y razón $\frac{DB}{DC}$, se tiene $\frac{RB}{RC} = \frac{DB}{DC}$, y por lo tanto, por el teorema de la bisectriz, RD es la bisectriz interna del ángulo $\angle BRC$.



De este modo, $\angle PDB = \angle PRD = \angle BRD = \angle CRD = \angle QRD = \angle DPQ$, lo que prueba que las rectas PQ y BC son paralelas. Por lo tanto, $\frac{RP}{PB} = \frac{RQ}{QC}$ y, por el teorema de Menelao, $\frac{BT}{TC} \cdot \frac{CQ}{QR} \cdot \frac{RP}{PB} = 1 \iff BT = TC$ o sea, RX para por el punto medio BC y, siendo PQ y BC paralelas, por el punto medio de PQ también.

Parte III. Como D y E son puntos de tangencia, los ángulos $\angle CDI$ y $\angle CEI$ son ambos rectos, y por lo tanto el cuadriátero $CDIE$ es cíclico, o sea, I pertenece al cincuncírculo de CDE, y el segmento CI es su diámetro.



Como M pertenece a ese círculo, $\angle CMI$ es recto, es decir, IM es perpendicular a QR. Pero QR es una cuerda del incírculo de ABC, y por lo tanto, M es su punto medio. Análogamente, N es punto medio de PR.

Con esos tres hechos, el problema se termina fácilmenteÑ note que PM, QR, y RX son medianas del triángulo PQR, y tienen su baricentro con punto común.

3. (Solución Alternativa)

Suponga sin pérdida de generalidad, que el radio de Γ es 1. Considere un sistema de ejes cartesianos cuyo origen es el centro de Γ y el eje x es paralelo a BC. Sean $D = (0, -1), E = (\operatorname{sen}\beta, \cos\beta)$ y $F = (\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$. Es fácil verificar que si $B = (b, -1)$ y $C = (c, -1)$ entonces $b = \frac{1}{\tan\alpha/2}$ y $c = \frac{1}{\tan\beta/2}$. Siendo G, E y F colineales y $G = (g, -1)$, es fácil probar que $g = \frac{2}{\tan\alpha/2+\tan\beta/2}$. Por otro lado, siendo $R = (\operatorname{sen}\gamma, \cos\gamma)$,

$$\overrightarrow{RG} \cdot \overrightarrow{RD} = 0 \iff (\operatorname{sen}\gamma - g, \cos\gamma) \cdot (\operatorname{sen}\gamma, \cos\gamma + 1) = 0 \iff g = \frac{2(1+\cos\gamma)}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Como P pertenece a la recta BR, existe un número real t tal que $P = tB + (1-t)R = (\operatorname{sen}\gamma + t(b - \operatorname{sen}\gamma), \cos\gamma + t(1 - \cos\gamma))$. Como P pertenece también a Γ,

$$(\operatorname{sen}\gamma + t(b - \operatorname{sen}\gamma))^2 + (\cos\gamma + t(1-\cos\gamma))^2 = 1 \iff t = \frac{2(1+\cos\gamma - b\operatorname{sen}\gamma)}{b^2 + 2 - 2b\operatorname{sen}\gamma + 2\cos\gamma}.$$

Análogamente, Q es de la forma $uC + (1-u)R$ con,

$$u = \frac{2(1+\cos\gamma - c\operatorname{sen}\gamma)}{c^2 + 2 - 2c\operatorname{sen}\gamma + 2\cos\gamma}$$

Así, PQ es paralelo a BC si y sólo si

$$\begin{aligned}
\frac{RP}{PB} = \frac{RQ}{QC} &\iff t = u \\
&\iff \frac{b^2 + 2 - 2b\operatorname{sen}\gamma + 2\cos\gamma}{2(1+\cos\gamma - b\operatorname{sen}\gamma)} = \frac{c^2 + 2 - 2c\operatorname{sen}\gamma + 2\cos\gamma}{2(1+\cos\gamma - c\operatorname{sen}\gamma)} \\
&\iff 2 + \frac{b^2}{1+\cos\gamma - b\operatorname{sen}\gamma} = 2 + \frac{c^2}{1+\cos\gamma - c\operatorname{sen}\gamma} \\
&\iff (1+\cos\gamma)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) = \operatorname{sen}\gamma\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \\
&\iff \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{1+\cos\gamma}
\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} = \frac{2}{g} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{1+\cos\gamma},$$

y por lo tanto, de hecho, PQ es paralelo a BC.

4. Sean a y b los números y d su máximo común divisor. Entonces $a = dm$ y $b = dn$ con $\text{mcd}(m, n) = 1$. Como $\sqrt{ab}$ es entero, $ab = d^2mn$ es cuadrado perfecto y luego m también es cuadrado perfecto. Siendo m y n coprimos, son también cuadrados perfectos. Luego $a = dt^2$ y $b = du^2$, con t y u enteros positivos y $\text{mcd}(t, u) = 1$.

La media armónica $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2dt^2u^2}{t^2+u^2}$ es un entero. Siendo $\text{mcd}(t^2 + u^2, t^2) = \text{mcd}(t^2 + u^2, u^2) = \text{mcd}(t^2, u^2) = 1$, $t^2 + u^2$ divide a $2d$.

Por lo tanto, $2a = k(t^2 + u^2)t^2$ y $2b = k(t^2 + u^2)u^2$. Como a y b son distintos, $t \neq u$ y $\frac{a+b}{2} = \frac{k(t^2+u^2)^2}{4}$ es entero.

Si $t^2 + u^2$ es impar, k es múltiplo de 4 y $\frac{a+b}{2} \geq \frac{4(l^2+2^2)^2}{4} = 25$.

Si $t^2 + u^2$ es par, t y u son impares (pues $\text{mcd}(t, u) = 1$) y $\frac{a+b}{2} \geq \frac{(l^2+3^2)^2}{4} = 25$.

Por lo tanto, el valor mínimo de la media aritmética es 25, obtenido para $a = 10$ y $b = 40$ o $a = 5$ y $b = 45$.

4. (Solución alternativa 2).

Sea $d = \text{mcd}(x, y)$. Entonces existen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}^+$ tales que $x = x_0d, y = y_0d$. La condición de media armónica es:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x + y} \in \mathbb{Z}^+.$$

En particular, $x + y \mid 2xy$. Así, $(x_0 + y_0)d \mid 2x_0y_0d^2$. Como $\text{mcd}(x_0, y_0) = 1$, $\text{mcd}(x_0 + y_0, x_0y_0) = 1$, y entonces $x_0 + y_0 \mid 2d$.

La condición de media geométrica es $\sqrt{xy} = d\sqrt{x_0y_0} \in \mathbb{Z}^+$. Como x_0, y_0 son primos relativos, ambos deben ser cuadrados perfectos.

Como la media aritmética es un número entero, x e y deben tener la misma paridad.

Con $x_0 = 1, y_0 = 4$, el menor valor d que cumple las propiedades anteriores es 10, para el cual la media aritmética es 25. Para $x_0 = 1, y_0 = 9$, las condiciones anteriores se verifican con $d = 5$ y la media aritmética es 25.

Si $x_0 + y_0 > 10$, de $x_0 + y_0 \mid 2d$ resulta que $d > 5$ y $MA = \frac{(x_0+y_0)d}{2} > 25$.

Esto descarta todos los demás valores de x_0, y_0 y el mínimo valor para la media aritmética es 25.

4. (Solución alternativa 3).

Sea $m = \frac{a+b}{2}$. Reescribiendo las medias geométrica y armónica en función de a y m resulta:

$$\sqrt{2ma - a^2} \in \mathbb{Z}^+, \tag{5.1}$$

$$2a - \frac{a^2}{m} \in \mathbb{Z}^+. \tag{5.2}$$

De (5.2) se sigue que $m \mid a^2$. Suponga que $m \mid a$. Por (5.1) se tiene que $2ma - a^2 = m^2u(2 - u)$ debe ser un cuadrado perfecto, donde $u = a/m$. La única posibilidad es $u = 1$, en cuyo caso $a = m = b$, lo que no cumple con la condición. Entonces, $m \nmid a$.

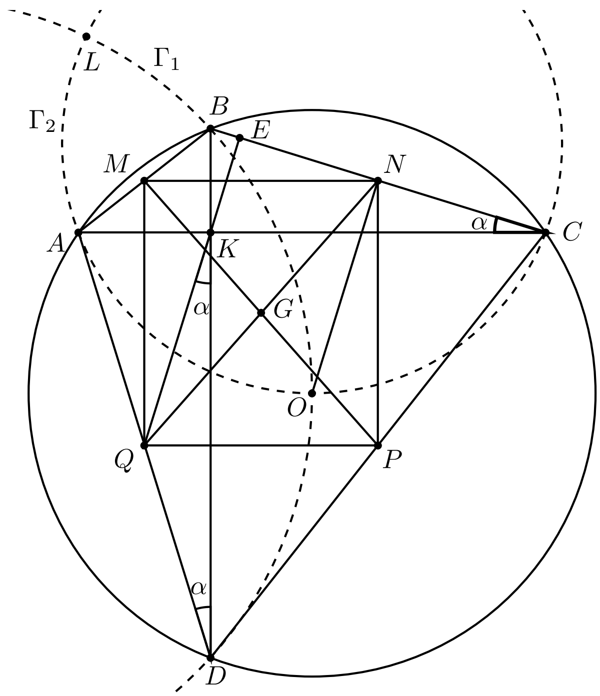
Sea $a = p_1^{e1} p_2^{e2} \dots p_n^{en}$ con $p_1, p_2, \dots, p_n$ primos y $e_j > 0$. Como $m \nmid a, m \mid a^2$, existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $p_i^{ei+1} \mid m$. Luego m puede escribirse como $m = p_i^q x$ con $2e_i > q > e_i > 0$ y $p_i \nmid x$. Se ve que si $p_i = 5, m = 25$ y $a = 5$ es un par que satisface (5.1).

Se puede comprobar que para los casos $m = 2^2, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^3, 2^3 \cdot 3, 2^4, 3^2, 3^2 \cdot 3$ no satisfacen (5.1). Por tanto, $m = 25$ es el mínimo.

4. (Solución alternativa 4). Sea $m = \frac{a+b}{2}$. Entonces como en la solución anterior se tienen (5.1) y (5.2). De (5.1) se sigue que existe un entero positivo c tal que $2ma - a^2 = c^2$, o sea, $m^2 - (a-m)^2 = c^2$, o $(a-m)^2 + c^2 = m^2$. Así, $(a-m, c, m)$ es una terna pitagórica. Por lo tanto, existen enteros positivos d, u, c con $\text{mcd}(u, v) = 1$ y $u + v$ impar tales que $a - m = d(u^2 - v^2), c = 2duv, m = d(u^2 + v^2)$ o $a - m = 2duv, c = d(u^2 - v^2), m = d(u^2 + v^2)$.

De (5.1) se sigue que $m \mid a^2$, y luego $m \mid a^2 - 2am + m^2 = (a - m^2)$. Por lo tanto, en el primer caso, $d(u^2 + v^2) \mid d^2(u^2 - v^2)$, o sea, $u^2 + v^2 \mid d(u^2 - v^2)^2$, y el segundo $d(u^2 + v^2) \mid 4d^2u^2v^2)$, o sea, $u^2 + v^2 \mid 4du^2v^2$. Como u y v son coprimos y de paridades distintas, $\text{mcd}(u^2 + v^2, u^2 - v^2) = 1$ y $\text{mcd}(u^2 + v^2, 4u^2v^2) = 1$, y por lo tanto, en cualquier caso, $u^2 + v^2 \mid d$ y luego $(u^2 + v^2)^2 \mid d(u^2 + v^2) = m$. Como u y v tienen paridades distintas, tenemos $u^2 + v^2 \geq 1^2 + 2^2 = 5 \Longrightarrow m \geq (u^2 + v^2) \geq 5^2 = 25$. Haciendo $d = 2^2 + 1^2 = 5, u = 2, v = 1$ tenemos por ejemplo la solución $a - m = 5(2^2 - 1^2) = 15, c = 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20$ y $m = 5(2^2 + 1^2) = 25$ (o sea, $a = 40, b = 2m - a = 10$). Así, el menor valor posible para la media aritmética es 25.

5. (Solución de Carlos Lamas Bárcenas). Sean M, N, P, Q los puntos medios de AB, BC, CD y AD, respectivamente. Entonces es cierto que $MQPN$ es un paralelogramo con diagonales que se cortan en el punto G que es el punto medio de NQ y MP. Puesto que AC es perpendicular a BD, se tiene que KQ es perpendicular a BC debido a que $\angle KDQ = \angle QKD = \alpha$. Por tanto, $\angle CKE = 90 - \alpha$ y $\angle BCA = \angle KDQ = \alpha$. Adicionalmente, ON es perpendicular a BC pues N es punto medio entonces ON y KQ son paralelas. Así mismo, NK y OQ son paralelas por lo que entonces $NOQK$ es un paralelogramo y KO y NQ se cortan en el mismo punto medio. Entonces esto prueba que K, G y O son colineales. Sean Γ_1 y Γ_2 las circunferencias circunscritas de los triángulos OBD y ADC, respectivamente. Supongamos por reducción al absurdo que OK no corta en L a Γ_1 y Γ_2. Entonces, sean L_1 y L_2 los puntos de corte de Γ_1 y Γ_2 con OK, es decir, que se deben cumplir una de las siguientes desigualdades: $OL_1 < OL_2$ ó $OL_2 < OL_1$. Por potencia de un punto se tiene que $AK \cdot KC = BK \cdot KD = OK \cdot KL_1 = OK \cdot KL_2$. Con esto acabamos de obtener que $KL_1 = KL_2$ lo que implica una contradicción que se deriva de suponer que OK no corta en L a Γ_1 y Γ_2, por tanto, L es el punto de corte de OK con Γ_1, Γ_2 y por ello, K, O y L son colineales.



6. Sean P_1, P_2,..., P_{12} los puntos (personas), con los subíndices tomados módulo 12. Si un florero está situado en la intersección de k segmentos P_iP_j diremos que cada segmento está bloqueado por $1/k$ de florero. El *bloqueo* de un segmento es la suma de las fracciones correspondientes a los floreros que estén sobre él. Es claro que la suma de los bloqueos de todos los segmentos es igual al número de floreros colocados sobre los segmentos.

Supongamos ahora que todas las visuales P_iP_j están bloqueadas por los floreros. Entonces es claro que el bloqueo de cada segmento P_iP_{i+1} es al menos 1. El de cada segmento P_iP_{i+2} es al menos $1/2$, ya que un florero sobre P_iP_{i+2} puede bloquear a lo sumo un segmento adicional $P_{i+1}P_j$. De manera análoga el bloqueo de cada segmento P_iP_{i+3} es al menos $1/3$, el de cada segmento P_iP_{i+4} es al menos $1/4$, el de cada segmento P_iP_{i+5} es al menos $1/5$ y el de cada segmento P_iP_{i+6} es al menos $1/6$. por lo tanto el bloqueo total es

$$12 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{3} + 12 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{1}{5} + 12 \cdot \frac{1}{6} = 28 + \frac{2}{5} > 28,$$

lo que muestra que 28 floreros no son suficientes para bloquear todas las visuales.

Capítulo 6

Olimpiada Internacional de Matemática

Esta sección está dedicada a la Olimpiada Internacional de Matemáticas 2010, celebrada del 2 al 14 de Julio en Kazajstán. El equipo venezolano estuvo integrado por los estudiantes Carmela Acevedo, de la Academia Washington de Caracas y David Urdaneta, del Liceo Los Robles de Maracaibo. El jefe de la delegación el profesor Rafael Sánchez Lamoneda, de la UCV, y el tutor el profesor Henry Martínez, de la UPEL. La estudiante Carmela Acevedo obtuvo mención de honor por su solución al problema 4. Las soluciones que damos a los problemas planteados son las oficiales del banco de problemas, salvo en el problema número 4, donde damos la solución de la estudiante Carmela Acevedo.

6.1. Problemas

(Primer Día)

Problema 1. Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \left\lfloor f(y) \right\rfloor$$

para todos los números $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que z.)

Problema 2. Sea ABC un triángulo, I su incentro y Γ su circunferencia circunscrita. La recta AI corta de nuevo a Γ en D. Sean E un punto en el arco $\widehat{BDC}$ y F un punto en el lado BC tales que

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Sea G el punto medio del segmento IF. Demuestre que las rectas DG y EI se cortan sobre Γ.

Problema 3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$\Big(g(m) + n\Big)\Big(m + g(n)\Big)$$

es un cuadrado perfecto para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

(Segundo Día)

Problema 4. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y P un punto en el interior del triángulo. Las rectas AP, BP y CP cortan de nuevo a Γ en los puntos K, L y M, respectivamente. La recta tangente a Γ en C corta a la recta AB en S. Si se tiene que $SC = SP$, demuestre que $MK = ML$.

Problema 5. En cada una de las seis cajas $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ hay inicialmente sólo una moneda. Se permiten dos tipos de operaciones:

Tipo 1: Elegir una caja no vacía B_j, con $1 \leq j \leq 5$. Retirar una moneda de B_j y añadir dos monedas a B_{j+1}.

Tipo 2: Elegir una caja no vacía B_k, con $1 \leq k \leq 4$. Retirar una moneda de B_k e intercambiar los contenidos de las cajas (posiblemente vacías) B_{k+1} y B_{k+2}.

Determine si existe una sucesión finita de estas operaciones que deja a las cajas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vacías y a la caja B_6 con exactamente $2010^{2010^{2010}}$ monedas. (Observe que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problema 6. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de números reales positivos. Se tiene que para algún entero positivo s,

$$a_n = \text{máx}\{a_k + a_{n-k} \text{ tal que } 1 \leq k \leq n-1\} \tag{1}$$

para todo $n > s$. Demuestre que existen enteros positivos ℓ y N, con $\ell \leq s$, tales que $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ para todo $n \geq N$.

6.2. Soluciones

1. Supongamos primero que $\lfloor f(y) \rfloor = 0$ para algún y. Entonces haciendo $x = 1$ en $f\Big(\lfloor x \rfloor y\Big) = f(x)\Big\lfloor f(y) \Big\rfloor$ nos queda, $f(y) = f(1)\lfloor f(y) \rfloor = 0$. Por lo tanto si para todo y, $\lfloor f(y) \rfloor = 0$, entonces $f(y) = 0$ para todo y. Además un simple cáculo demuestra que la función nula $f(x) = 0$ para todo x, satisface las condiciones del problema. Supongamos entonces que existe un número real a tal que $\lfloor f(a)\rfloor \neq 0$. En este caso tenemos que,

$$f(x\lfloor a\rfloor) = f(x)\lfloor f(a)\rfloor,$$

o bien

$$f(x) = \frac{f(x\lfloor a\rfloor)}{\lfloor f(a)\rfloor}.$$

En consecuencia, si $\lfloor x_1\rfloor = \lfloor x_2\rfloor$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$. Por lo tanto $f(x) = f(\lfloor x\rfloor)$ para todo x, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que a es un número entero.

Ahora tenemos:

$$f(a) = f(2a\cdot\frac{1}{2}) = f(2a)\lfloor f(\frac{1}{2})\rfloor = f(2a)\lfloor f(0)\rfloor,$$

y por lo tanto $\lfloor f(0)\rfloor \neq 0$

Esto nos permite suponer que $a = 0$ y entonces la ecuación $f(x) = \frac{f(x\lfloor a\rfloor)}{\lfloor f(a)\rfloor}$, nos da:

$$f(x) = \frac{f(0)}{\lfloor f(0)\rfloor} = C \neq 0$$

para todo x.

Pero por la ecuación que satisface la función f, tenemos que, $C = C\lfloor C\rfloor$, y entonces $\lfloor C\rfloor = 1$, es decir $1 \leq C < 2$.

Un simple cálculo demuestra que la función $f(x) = C$ con $1 \leq C < 2$, para todo x, satisface las condiciones del problema.

Por lo tanto una función f satisface la igualdad pedida si y solo, o bien $f(x) = 0$ para todo x, o bien para todo x, $f(x) = C$ con $1 \leq C < 2$.

2. Llamemos X al otro punto de intersección de la recta EI con Γ, y sea L el punto de intersección del lado BC con la bisectriz AI del ángulo $\angle BAC$. Llamemos G' y T a los puntos de intersección del segmento DX con las rectas IF y AF, respectivamente (ver figura 6.1). Para resolver el problema es suficiente con demostrar que $G = G'$ o que $IG' = G'F$. Como los puntos G' y T están en la recta DX, el teorema de Menelao afirma que:

$$\frac{AD}{ID}\cdot\frac{TF}{AT}\cdot\frac{G'F}{IG'} = 1.$$

Si demostramos que $\frac{AD}{ID}\cdot\frac{TF}{AT} = 1$, o que $\frac{AD}{ID} = \frac{TF}{AT}$, tendremos que $\frac{G'F}{IG'} = 1$, es decir, $G'F = IG'$.

Sea $K \neq A$ el otro punto de intersección de la recta AF con Γ. Como $\angle BAK = \angle CAE$, entonces $\widehat{BK} = \widehat{CE}$, por lo tanto las rectas KE y BC son paralelas.

Observemos ahora que $\angle IAT = \angle DAK = \angle EAD = \angle EXD = \angle IXT$, por lo tanto los puntos I, A, X y T son concíclicos.

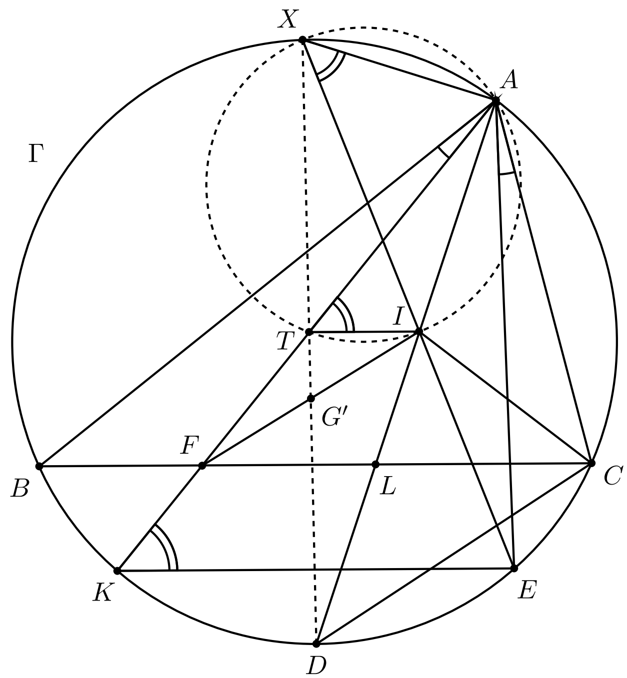


Figura 6.1: Problema 2

Entonces tenemos que $\angle ITA = \angle IXA = \angle EXA = \angle EKA$, por lo tanto las rectas IT y KE son paralelas y por transitividad lo son también las rectas IT y BC. De aquí tenemos la relación, $\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI}$.

Como CI es la bisectriz del ángulo $\angle ACL$, tenemos que, $\frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC}$. Además $\angle DCL = \angle DCB = \angle DAB = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC$, y por ello los triángulos DCL y DAC son semejantes, lo cual nos permite obtener la relación, $\frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD}$.

Finalmente, como D es el punto medio del arco $\widehat{BC}$, entonces, D equidista de los puntos I, B y C, por lo tanto, $\frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$.

Juntando todas estas igualdades tenemos:

$$\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$$

3. Supongamos primero que si p es un número primo y $p \mid (f(k) - f(l))$ para enteros positivos k y l, entonces $p \mid (k - l)$. Vamos a resolver el problema en este caso y luego veremos que esto es lo que siempre sucede.

Supongamos que $f(k) = f(l)$ para algún par de enteros positiovs k y l. Entonces todo número primo p divide a $k - l$, pues divide a $f(k) - f(l) = 0$. En consecuencia

$k-l=0$, y $k=l$. Por lo tanto la función f es inyectiva.

Consideremos ahora los números $f(k+1)$ y $f(k)$, para cualquier entero positivo k. Como $k+1-k=1$, entonces ningún número primo p divide a $k+1-k$ y en consecuencia $f(k+1)-f(k)$ no tiene divisores primos, es decir $|f(k+1)-f(k)|=1$.

Sea $q=f(2)-f(1)$, con $|q|=1$. Demostremos por inducción que para todo entero positivo n, $f(n)=f(1)+q(n-1)$.

Por la definición de q, la proposición es cierta para $n=1,2$. Supongamos ahora que la proposición es cierta para todo $1\leq m\leq n$, es decir $f(m)=f(1)+q(m-1)$, para $1\leq m\leq n$, y demostremos que $f(n+1)=f(1)+qn$. En efecto. $f(n+1)=f(n)\pm q=f(1)+q(n-1)\pm q$. Si $f(n+1)=f(n)-q$, entonces $f(n+1)=f(1)+q(n-1)-q=f(1)+q(n-2)=f(n-1)$. Pero la función f es inyectiva, por lo tanto, $f(n+1)\neq f(n-1)$, entonces $f(n+1)=f(1)+qn$.

En consecuencia para todo entero positivo n tenemos que $f(n)=f(1)+q(n-1)$ y $|q|=1$. Pero si $q=-1$, entonces $f(n)=f(1)+1-n$ y para $n\geq f(1)+1$, $f(n)\leq 0$, lo cual es absurdo, por lo tanto $q=1$ y $f(n)=(f(1)-1)+n$, para todo entero positivo n, como queríamos.

Falta ahora ver que nuestra suposición inicial es siempre cierta. Es decir: Sea p un número primo, k y l enteros positivos tales que $p\mid(f(k)-f(l))$, entonces $p\mid(k-l)$. En efecto:

Supongamos primero que $p^2\mid(f(k)-f(l))$. Entonces para algún entero m se cumple que $f(l)=f(k)+p^2m$. Sea D un entero positivo no divisible por p y tal que $D>\text{máx}\{f(k),f(l)\}$. Hagamos $n=pD-f(k)$. Entonces los enteros positivos $n+f(k)=pD$ y $n+f(l)=pD+(f(l)-f(k))=p(D+pm)$ son ambos divisibles por p pero no por p^2. Por la hipótesis del problema, tanto $(f(k)+n)(f(n)+k)$ como $(f(l)+n)(f(n)+l)$ son cuadrados y divisibles por p, (por lo tanto divisibles por p^2). En consecuencia $f(n)+k$ y $f(n)+l$, también son divisibles por p y por lo tanto $p\mid[(f(n)+k)-(f(n)+l)]=k-l$.

Por otra parte si $f(k)-f(l)$ es divisible por p pero no por p^2, entonces elegimos el mismo número D y tomamos $n=p^3D-f(k)$. Entonces $f(k)+n=p^3D$ es divisible por p^3 pero no por p^4 y $f(l)+n=p^3D+(f(l)-f(k))$ es divisible por p pero no por p^2. Entonces por un razonamiento análogo al anterior, $f(n)+k$ y $f(n)+l$ son divisibles por p y por lo tanto también lo es $(f(n)+k)-(f(n)+l)=k-l$.

4. (Solución de Carmela Acevedo). Como SC es tangente a la circunferencia Γ, por potencia del punto S con respecto a Γ se tiene que $SB\cdot SA=SC^2$. Pero al mismo tiempo sabemos que $SP=SC$, entonces $SB\cdot SA=SP^2$, por lo que $\frac{SB}{SP}=\frac{SP}{SA}$ y como $\angle BSP=\angle PSA$, podemos concluir que los triángulos SAP y SPB son semejantes (ver figura 6.2). Así, tenemos que $\angle SAP=\angle BPS$, pero al mismo tiempo $\angle SAP=\angle BLK$, pues están subtendidos por el mismo arco BK. Entonces $\angle BPS=\angle BLK$ y podemos concluir que las rectas PS y LK son paralelas, ya que estos ángulos son correspondientes.

Sea $\{X\}=MK\cap SP$. Sabemos que $\angle MKC=180^\circ-\angle MCS$ por estar subtendidos en arcos opuestos. Por ser el triángulo SPC isósceles en S, tenemos

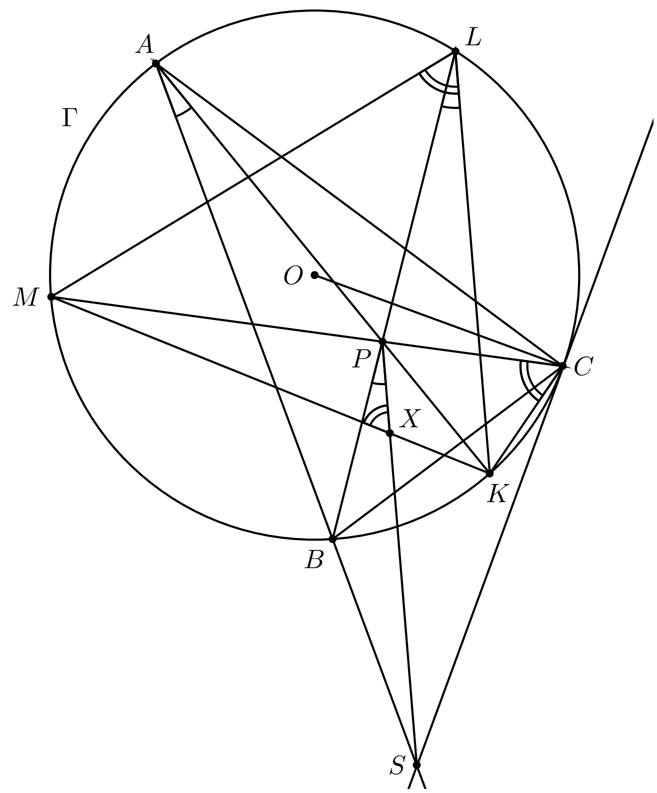


Figura 6.2: Problema 4

que $\angle MCS = \angle SPC$, por lo que $\angle MKC = 180 - \angle SPC$. En consecuencia el cuadrilátero $XPCK$ es concíclico y por lo tanto $\angle PXK = 180 - \angle MCK$ y $\angle MCK = \angle MXP$.

Finalmente, como $\angle MLK = \angle MCK$ pues están subtendidos por el mismo arco MK y como $\angle MXP = \angle MKL$ ya que son ángulos correspondientes con respecto a las paralelas SP y KL, podemos concluir que $\angle MLK = \angle MKL$ y por lo tanto el triángulo MKL es isósceles en M, es decir, $\overline{MK} = \overline{ML}$.

5. Sí existe una sucesión finita de operaciones como la pedida. Veamos:

Para comenzar denotemos por $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ lo siguiente: Si algunas cajas consecutivas contienen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ monedas, entonces será posible realizar varias de las operaciones permitidas tal que las cajas contengan $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, respectivamente, mientras que el contenido de cada una de las otras cajas permanece inalterado.

Sea $A = 2010^{2010^{2010}}$. Nuestra meta es demostrar que:

$$(1, 1, \ldots, 1) \to (0, 0, \ldots, 0, A).$$

Demostremos primero dos observaciones.

Lema 1. *$(a, 0, 0) \to (0, 2^a, 0)$ para todo $a \geq 1$.*

Demostración. Probaremos por inducción que $(a, 0, 0) \to (a - k, 2^k, 0)$ para todo $1 \leq k \leq a$. Si $k = 1$ aplicamos la Operación Tipo 1 a la primera caja:

$$(a, 0, 0) \to (a - 1, 2, 0) = (a - 1, 2^1, 0).$$

Ahora supongamos que $k < a$ y la proposición es cierta para algún $k < a$. Comenzando con $(a - k, 2^k, 0)$, apliquemos la Operación Tipo 1 a la caja del medio 2^k veces hasta que esta quede vacía. Una vez hecho esto aplicamos la Operación Tipo 2 a la primera caja:

$$(a - k, 2^k, 0) \to (a - k, 2^k - 1, 2) \to \cdots \to (a - k, 0, 2^{k+1}) \to (a - k - 1, 2^{k+1}, 0).$$

Por lo tanto tenemos

$$(a, 0, 0) \to (a - k, 2^k, 0) \to (a - k - 1, 2^{k+1}, 0).$$

□

Lema 2. *Para todo entero positivo n, sea $P_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n}$ (por ejemplo $P_3 = 2^{2^2} = 16$). Entonces $(a, 0, 0, 0) \to (0, P_a, 0, 0)$, para todo $a \geq 1$.*

Demostración. De manera similar al Lema 1, demostraremos que $(a, 0, 0, 0) \to (a - k, P_k, 0, 0)$ para todo $a \geq 1$.

Si $k = 1$, aplicamos la Operación Tipo 1 a la primera caja:

$$(a, 0, 0, 0) \to (a - 1, 2, 0, 0) = (a - 1, P_1, 0, 0).$$

Supongamos ahora que el lema es cierto para $k < a$. Comencemos por aplicar el Lema 1 a $(P_k, 0, 0)$ en $(a - k, P_k, 0, 0)$, y luego aplicamos la Operación Tipo 2 a la primera caja, de esta manera obtenemos:

$$(a - k.P_k, 0, 0) \to (a - k, 0, 2^{P_k}, 0) = (a - k, 0, P_{k+1}, 0, 0) \to (a - k - 1, P_{k+1}, 0, 0)$$

Por tanto:

$$(a, 0, 0, 0) \to (a - k.P_k, 0, 0) \to (a - k - 1, P_{k+1}, 0, 0)$$

Continuando de esta manera se termina la demostración. □

Volvamos ahora al problema original. Para demostrar que sí existe la secuencia de operaciones pedida, apliquemos primero la Operación Tipo 1 a la caja B_5, y luego la Operación Tipo 2 a las cajas B_4, B_3, B_2, y B_1, en ese orden. A continuación aplicamos dos veces el Lema 2 y obtenemos:

$$\begin{aligned}(1,1,1,1,1,1) &\to (1,1,1,1,0,3) \to (1,1,1,0,3,0) \to (1,1,0,3,0,0)\\ &\to (1,0,3,0,0,0) \to (0,3,0,0,0,0) \to (0,0,P_3,0,0,0)\\ &= (0,0,16,0,0,0) \to (0,0,0,P_{16},0,0)\end{aligned}$$

En este momento ya tenemos en la caja B_4 una cantidad de monedas mayor que A, pues:

$$\begin{aligned}A = 2010^{2010^{2010}} &< (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11,2010^{2010}}\\ &< 2^{2010^{2011}} < 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11,2011}} < 2^{2^{2^{15}}} < P_{16}.\end{aligned}$$

Para que el número de monedas en la caja B_4 disminuya, le aplicamos repetidas veces a esta caja la Operación Tipo 2, hasta que la cantidad de monedas sea igual a $\frac{A}{4}$. En cada paso, retiramos una moneda de B_4 e intercambiamos las cajas vacías, B_5 y B_6. Esto es:

$$\begin{aligned}(0,0,0,P_{16},0,0) &\to (0,0,0,P_{16}-1,0,0) \to (0,0,0,P_{16}-2,0,0) \to \dots\\ &\to (0,0,0,\frac{A}{4},0,0).\end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos la Operación Tipo 1 para vaciar las cajas B_4 y B_5, para obtener el resultado:

$$(0,0,0,\frac{A}{4},0,0) \to \dots \to (0,0,0,0,\frac{A}{2},0) \to \dots \to (0,0,0,0,0,A).$$

6. Para comenzar observemos que de las condiciones del problema se deduce que, cada a_n para $n > r$ se puede expresar como $a_n = a_s + a_t$, con $s,t < n$ y $s + t = n$. Por lo tanto si, digamos, $a_s > r$, entonces podemos proceder de la misma manera para a_s, como lo hicimos con a_n. De esta forma podemos expresar a a_n como la suma:

$$a_n = a_{i_1} + \dots + a_{i_k} \tag{2}$$

$$1 \le i_j \le r, \quad i_1 + \dots + i_k = n \tag{3}$$

Más aún, asumiendo sin pérdida de generalidad que a_{i_1} y a_{i_2} son los números en (2) que se obtienen en el último paso, entonces $i_1 + i_2 > r$.

Por lo tanto podemos acomodar (3) de la siguiente manera:

$$1 \le i_j \le r, \quad i_1 + \dots + i_k = n, \quad i_1 + i_2 > r. \tag{4}$$

Por otra parte, supongamos que los índices $i_1, \ldots i_k$ satisfacen las condiciones (4). Entonces, si denotamos $s_j = i_1 + \cdots + i_j$, por (1) deducimos que:

$$a_n = a_{s_k} \geq a_{s_{k-1}} + a_{i_k} \geq a_{s_{k-2}} + a_{i_{k-1}} + a_{i_k} \geq \cdots \geq a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}.$$

Resumiendo lo hecho hasta ahora, hemos demostrado que para todo $n > r$ se tiene que

$$a_n = \text{máx}\{a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} : (i_1, \ldots i_k) \text{ satisface } (4)\}.$$

Denotemos ahora

$$s = \max_{1 \leq i \leq r} (\frac{a_i}{i}),$$

y fijemos un índice $l \leq r$ tal que $s = \frac{a_l}{l}$.

Elijamos una expansión de a_n cuyos índices satisfagan (3) y (4). Entonces tenemos que $n = i_1 + \cdots + i_k \leq rk$. Por lo tanto $k \geq n/r$. Supongamos que $n \geq r^2 l + 2r$. Entonces $k \geq n/r \geq rl + 2$ y $k - 2 \geq rl$. Supongamos que ninguno de los $k-2$ números $i_3, \ldots i_k$, es igual a l. Por el Principio de las Casillas, existe un índice $1 \leq j \leq r$ que aparece entre los índices $i_3, \ldots i_k$ al menos l veces, y además $j \neq l$. Ahora borremos todas las veces que j aparece en $(i_1, \ldots, i_k)$, y pongamos en su lugar a l. Obtenemos así una nueva secuencia de índices $(i_1, i_2, i'_3, \ldots, i'_{k'})$ que también satisface (4). Por lo que demostramos antes, tenemos:

$$a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} = a_n \geq a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \cdots + a_{i'_{k'}}.$$

y luego de eliminar los términos comunes a ambos lados de la desigualdad, $la_j \geq ja_l$, por tanto $\frac{a_l}{l} \leq \frac{a_j}{j}$. Por la definión de l esto quiere decir que $la_j = ja_l$, por lo tanto:

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \cdots + a_{i'_{k'}}.$$

Luego, para $n \geq r^2 l + 2r$ hemos encontrado una representación de la forma (2), (4) con $i_j = l$, para algún $j \geq 3$. Reordenando ahora los índices podemos suponer que $i_k = l$.

Para finalizar, observemos que en esta representación, los índices $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ satisfacen las condiciones (4), con $n - l$ en vez de n. Luego, por lo demostrado al comienzo obtenemos:

$$a_{n-l} + a_l \geq a_{i_1} + \cdots + a_{i_{k-1}} + a_l = a_n,$$

y por (1) esto implica que

$$a_n = a_{n-l} + a_l,$$

para cada $n \geq r^2 l + 2r$, como queríamos.

Glosario

Ángulo inscripto. Si A, B y C son puntos de una circunferencia de centro O, se dice que el ángulo $\angle ABC$ está *inscripto* en la circunferencia y que *subtiende* el arco $\widehat{AC}$ que no contiene a B. La medida de $\angle ABC$ es igual a la mitad del ángulo central $\angle AOC$.

Ángulo semiinscripto. Es el que tiene el vértice en una circunferencia, un lado tangente a la misma y el otro secante.

Círculo de Apolonio. Es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su razón de distancias a dos puntos dados A y B es una constante dada $r > 0$, $r \neq 1$. Es una circunferencia cuyo centro está sobre el segmento AB. (Si $r = 1$ el lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB).

Circuncírculo. Es la (única) circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo.

Circunferencia circunscripta. Ver *Circuncírculo.*

Coeficiente binomial. Es el coeficiente de x^k en el desarrollo de $(1+x)^n$. También es igual al número de subconjuntos de k elementos que tiene un conjunto de n elementos. Se denota $\binom{n}{k}$ y puede calcularse así:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}.$$

Colineales. Dícese de los puntos que están sobre una misma línea recta.

Coprimos. (o **primos relativos**). Dícese de dos números enteros sin factores primos comunes (o, equivalentemente, cuyo máximo común divisor es 1).

Cuadrilátero cíclico (también llamado **concíclico** o **inscriptible**). Es un cuadrilatero que puede ser inscripto en una circunferencia, es decir, tal que alguna circunferencia pasa por sus cuatro vértices. Una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico es que tenga un par de ángulos opuestos suplementarios.

Cuaterna armónica. Los puntos alineados A, B, C y D forman una *cuaterna armónica* si y sólo si exactamente uno de los puntos A y B pertenece al segmento CD y además se cumple $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

Eje radical. Dadas dos circunferencias no concéntricas, es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto a ambas. Siempre es una recta perpendicular a la que une los centros de ambas circunferencias.

Incentro. Es el punto en que concurren las tres bisectrices de un triángulo. Como equidista de los tres lados del triángulo, es el centro de una circunferencia tangente internamente a ellos.

Incírculo. Es la circunferencia tangente internamente a los tres lados de un triángulo.

Potencia. Sean P un punto, Γ una circunferencia y r una recta que pase por P y corta a la circunferencia en A y B (si r es tangente a Γ consideramos que $A = B$). Entonces el producto $PA \cdot PB$ no depende de r, y su valor es por definición la *potencia* de P respecto a Γ, $\mathrm{Pot}(P, \Gamma)$. Las distancias PA y PB se consideran orientadas, es decir que la potencia es positiva o negativa según que P sea exterior o interior a Γ. Obviamente $\mathrm{Pot}(P, \Gamma) = 0$ si y sólo si P pertenece a Γ.

Principio de las casillas. Si n objetos se distribuyen en k cajas, y $n > k$, entonces alguna caja recibe más de un objeto.

Razón áurea. Se dice que un punto C divide a un segmento AB en *media y extrema razón* si $AB/BC = AC/AB$. En este caso a la razón AC/AB se le conoce como *razón áurea*, *número áureo*, *divina proporción* y varios otros nombres. Se suele denotar con la letra griega φ y su valor es

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Teorema de la bisectriz. Sean ABC un triángulo, V el punto en que la bisectriz desde A corta al lado BC y U el punto en que la bisectriz exterior por A corta a la prolongación del lado BC. Entonces

$$\frac{VB}{VC} = \frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AB + AC}.$$

Teorema de Menelao. Sea ABC un triángulo y sean P, Q y R tres puntos ubicados respectivamente en las rectas BC, CA y AB y diferentes de A, B y C. Entonces P, Q y R están alineados si y sólo si

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

Terna pitagórica. Es un conjunto de tres enteros positivos a, b y c que cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Si $\mathrm{mcd}(a, b, c) = 1$ la terna se dice *primitiva*. En ese caso a y b deben ser de diferente paridad, digamos a impar y b par, y se puede probar que existen enteros u y v, coprimos y de diferente paridad, tales que $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ y $c = u^2 + v^2$.

Estudiantes Premiados en la Final Nacional de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2010

Primer Año

Medallas de Oro

Jesús A. Bastardo C.	Iberoamericano	Edo. Bolívar
Elizabeth Baptiste	Las Colinas	Edo. Lara
Carlos R. Bravo N.	Los Robles	Edo. Zulia

Medallas de Plata

Luis Gabriel Gil Araujo	Joseph Lancaster	Edo. Carabobo
Juan Salvador Arvelo	Joseph Lancaster	Edo. Carabobo
Daniel Calderas	Colegio Francia	Dto. Capital
Yefferson Vílchez P.	Ramon Reinoso Núñez	Edo. Zulia
Shuyi Zheng	Nuestra Sra. de Lourdes I	Edo. Anzoátegui

Medallas de Bronce

Luis Eduardo Ruiz	Las Colinas	Edo. Lara
Ricardo Silva	San Gabriel Arcángel	Edo. Carabobo
Juan A. Cramer	San José	Edo. Aragua

Menciones de Honor

Valentina Cano Arcay	Cristo Rey	Dto. Capital
Luis Daniel Domínguez Orozco	Colegio San Ignacio	Dto. Capital
Jorge A. Navia G.	Bellas Artes	Edo. Zulia
José Ricardo Ortega	San Lázaro	Edo. Sucre
Armando J. Trombetta N.	Arco Iris	Edo. Nueva Esparta
Vicente Antonorsi	Colegio San Ignacio	Dto. Capital
Gerardo Carrillo	Nuestra Sra. de Belén	Edo. Aragua
Valeria A. Catari V.	Las Colinas	Edo. Lara
Mariángel I. Urdaneta G.	San Vicente de Paul	Edo. Zulia

Segundo Año

Medallas de Oro

Rubmary D. Rojas L.	Divina Pastora	Edo. Lara
Rodrigo Delgado	Academia Washington	Dto. Capital

Medallas de Plata

Wei M. Liang Z.	Iberoamericano	Edo. Bolívar
Juan Diego Ocando	República de venezuela	Edo. Trujillo
Alí A. Reyes R.	Andrés Eloy Blanco	Edo. Zulia
Rodolfo J. Márquez V.	María Santísima	Edo. Lara
Luis A. Medina B.	Andrés Eloy Blanco	Edo. Zulia

Medallas de Bronce

Mathías San Miguel	San Lázaro	Edo. Sucre
Mario Bocaranda	Academia Washington	Dto. Capital
Johel A. Arteaga R.	Juan XXIII	Edo. Carabobo
Daniel Nuñez Carlino	Colegio Valle Alto	Edo. Miranda
Luis Alvarez	Bella Vista	Edo. Aragua
Evelin C. Hernao H.	Altamira	Edo. Zulia

Menciones de Honor

Andrea López	San Lázaro	Edo. Sucre
Luisa Martínez	San Lázaro	Edo. Sucre
Fernanda Andreina Lagrange S.	San Gabriel Arcangel	Edo. Carabobo
Efigenia Sabelli	San Lázaro	Edo. Sucre
Rosa A. Tanzi G.	Loyola Gumilla	Edo. Bolívar
Miguel Alberto	Emil Friedman	Dto. Capital
Gianpaolo Cuticchia	San José	Edo. Aragua
Víctor Rafael Estévez	Andrés Bello	Edo. Nueva Esparta
Victoria E. Prado G.	Altamira	Edo. Zulia

Tercer Año

Medallas de Oro

Diego Leonardo Peña	Los Hipocampitos	Edo. Miranda

Medallas de Plata

Sergio Villaroel	San Lázaro	Edo. Sucre

Medallas de Bronce

Mariana Saavedra	Ntra. Sra. De Lourdes	Edo. Carabobo

Menciones de Honor

José A. Olivier R.	Loyola Gumilla	Edo. Bolívar
Ezequiel Quijada	Ntra Sra de la Paz	Edo. Anzoátegui
Francisco Coll Ovalle	Agustiniano Cristo Rey	Dto. Capital
Miguel A. Linares F.	San Pedro	Edo. Lara

Cuarto Año

Medallas de Oro

David E. Villalobos P.	Alemán	Edo. Zulia

Medallas de Plata

Carlos D. Lamas Bárcenas	Independencia	Edo. Lara

Medallas de Bronce

Edenys C. Hernao H.	Altamira	Edo. Zulia
Tomás A. Rodríguez O.	Arco Iris	Edo. Nueva Esparta

Menciones de Honor

Miguelángel Dahdah	Academia Washington	Dto. Capital
Rodrigo A. Sequeda C.	Las Colinas	Edo. Lara

Quinto Año

Medallas de Oro

Jesús Rangel	Santiago De León	Dto. Capital

Medallas de Plata

Freddy J. Sánchez G.	Cnel. Miguel A. Vásquez	Edo. Zulia

Menciones de Honor

Emery Dunia	La Esperanza	Edo. Carabobo
Félix R. Hernández H.	Francisco Javier	Edo. Lara

Premios Especiales

David E. Villalobos P. Alemán Edo. Zulia
Premio de la Fundación Empresas Polar a la mejor prueba.

Freddy J. Sánchez G. Cnel. Miguel A. Vásquez Edo. Zulia
Premio UNEXPO a la respuesta más creativa.

Rubmary D. Rojas L. Divina Pastora Edo. Lara
Premio UC a la mejor prueba de Primer y Segundo Años.

Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2010

Comité Organizador Nacional

Rafael Sánchez Lamoneda (Presidente)
Saturnino Fermín Reyes (Coordinador Administrativo)
José Heber Nieto Said (Coordinador Académico)
Henry Martínez León (Coordinador de Entrenamientos)
Laura Vielma Herrero (Calendario Matemático)
Eduardo Sarabia
Silvina María de Jesús

Coordinadores Regionales

Prof. Lisandro Alvarado (Altos Mirandinos)
Prof. Omar Sosa (Amazonas)
Prof. María de Mejias (Anzoátegui Norte)
Prof. Rafael Antonio Valdez Tovar (Apure)
Prof. Vilma Escalona (Aragua)
Prof. Mary Acosta (Bolívar)
Prof. Jorge W. Salazar (Carabobo)
Prof. Sonia Chacón (Cojedes)
Prof. Dibeth Bravo (Falcón)
Prof. Carlos Lira (Guárico)
Prof. Víctor Caruci (Lara)
Prof. José Toloza (Mérida)
Prof. Yelenny Guanipa (Monagas)
Prof. Emilia Peña (Nueva Esparta)
Prof. María Martínez G. (Portuguesa)
Prof. Luisa López (Sucre)
Prof. Jorge Lozada (Táchira)
Prof. Ramón Blanco (Trujillo)
Prof. Nancy Candiales (Yaracuy)
Prof. José Heber Nieto (Zulia)