Olimpiadas Matemáticas 2011

(OJM, OM, OMCC, OIM, IMO)

Problemas y Soluciones

José Heber Nieto Said
Rafael Sánchez Lamoneda
Laura Vielma Herrero

Índice general

Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas son competencias dirigidas principalmente a jóvenes de escuela elemental y secundaria. Actualmente esta actividad se ha extendido por todo el mundo, debido a su gran efectividad en la popularización de las matemáticas y en la detección de jóvenes con talento para el estudio de esta ciencia.

El presente libro reúne todos los problemas propuestos en la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, OJM 2011. También presentamos los problemas de las tres competencias internacionales a las cuales asistimos durante este año, la 52^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO, celebrada en Amsterdam, Países Bajos, del 12 al 24 de Julio. La XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe, OMCC, celebrada en Colima, México, del 16 al 26 de Mayo y la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM, celebrada en San José, Costa Rica, del 23 de Septiembre al 1 de Octubre. Cada una de estas tres competencias internacionales consta de dos exámenes, presentados en días consecutivos. Cada prueba tiene 3 problemas y los participantes disponen de cuatro horas y media para resolverlos. El valor de cada pregunta es de 7 puntos, para un máximo posible de 42 puntos en la competencia. Los ganadores reciben medallas de oro, plata o bronce y mención honorífica, según sea su desempeño. En los tres eventos nuestros alumnos ganaron premios. Diego Peña del colegio Los Hipocampitos de los Altos Mirandinos, ganó Mención Honorífica en la IMO y Medalla de Bronce en la OIM. Carlos Lamas del colegio Independencia de Barquisimeto, ganó Mención Honorífica en la IMO. Rubmary Rojas, del colegio Divina Pastora de Barquisimeto, ganó Medalla de plata en la OMCC y Mención Honorífica en la OIM. Sergio Villarroel, del colegio San Lázaro de Cumaná, ganó Medalla de Bronce en la OMCC y Mención Honorífica en la OIM. También incluimos en este libro los problemas de la Olimpiada Matemática de Mayo, competencia por correspondencia que se plantea a dos niveles para alumnos no mayores de 13 y 15 años y de carácter iberoamericano. Agradecemos a la Fundación Olimpiada Matemática Argentina, organizadores de esta competencia, por permitirnos publicar aquí los problemas y sus soluciones. Al final del libro aparece la lista de alumnos ganadores en esta competencia y los premios que obtuvieron.

La OJM consta de tres etapas o pruebas. La primera de ellas es el *Canguro Ma-*

temático, un examen de treinta problemas de selección simple, que fue presentado por 58.894 estudiantes provenientes de 21 estados del país. La segunda etapa de la competencia es la *Prueba Final Regional*. La misma consta de un examen de cinco problemas de desarrollo y compiten los alumnos que quedaron ubicados en el diez por ciento superior en el Canguro Matemático. Esta prueba se organiza en cada estado que participa en la OJM y los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce. La tercera y última fase es la *Prueba Final Nacional*, en ella participan los alumnos ganadores de medalla de oro en la Prueba Final Regional. En la primera fase de la competencia los alumnos presentan la prueba en sus colegios. La Prueba Regional la presentan juntos todos los estudiantes de cada estado, en una sede previamente seleccionada por el coordinador local. Para la Final Nacional se elige cada año una sede y allí se organiza el evento, permitiendo a los participantes, sus profesores y representantes estrechar lazos de amistad y compartir una experiencia educativa enriquecedora. La Prueba Final Nacional 2011 se realizó en la *Universidad Simón Bolívar*, en Caracas y participaron 104 alumnos representando a 15 estados.

Esta obra consta de siete capítulos, en los tres primeros se estudian los problemas de la OJM, dedicando un capítulo a cada fase de la competencia. Los últimos cuatro capítulos versan sobre las competencias internacionales. En ellos se presentan los problemas y sus soluciones. Al final del libro incluimos un glosario de conceptos matemáticos que son utilizados a los largo del texto. Esperamos que este libro sea de gran utilidad tanto para profesores como para estudiantes, y que les permita conocer las matemáticas desde un punto de vista interesante y entretenido.

Aprovechamos la oportunidad para agradecer a nuestros patrocinadores, en especial a la *Fundación Empresas Polar*, al *Banco Central de Venezuela*, a la *Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales*, a la *Facultad de Ciencias de la UCV* junto a la *Fundación Amigos de Ciencias*,a la *Universidad Simón Bolívar*,la *Universidad Rafael Urdaneta*, a *Acumuladores Duncan*,y *Transporte Ayacucho*, a *MRW* y a la *Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman*, así como a todos los colegas que con su trabajo y esfuerzo, permiten que la Olimpiada Juvenil de Matemáticas sea una realidad.

Capítulo 1

Prueba Preliminar (Canguro Matemático)

1.1. Prueba de Primer Año y Segundo Año

Problema 1. Basilio escribe la palabra CANGURO, una letra por día. Si comienza el miércoles, ¿en qué día terminará?

Ⓐ lunes; Ⓑ martes; Ⓒ miércoles; Ⓓ jueves; Ⓔ viernes.

Problema 2. Un motociclista recorrió una distancia de 28 km en 30 minutos. ¿A qué velocidad media (km/h) lo hizo?

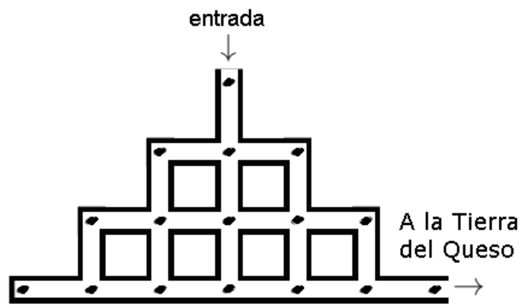
Ⓐ 28; Ⓑ 36; Ⓒ 56; Ⓓ 58; Ⓔ 62.

Problema 3. Un cuadrado de papel se divide en dos piezas con un corte rectilíneo. ¿Cuál de las siguientes formas no puede ser el resultado del corte?

Ⓐ un rectángulo; Ⓑ un cuadrado; Ⓒ un triángulo rectángulo;
Ⓓ un pentágono; Ⓔ un triángulo isósceles.

Problema 4. El ratón Pérez va a la Tierra del Queso. Pero para llegar a esa tierra legendaria tiene que pasar a través de un sistema de túneles, como se muestra en la figura. No se le permite volver a una intersección en la que ya haya estado. En cada intersección se encuentra una caraota. ¿Cuántas caraotas, como máximo, puede recoger el ratón Pérez?

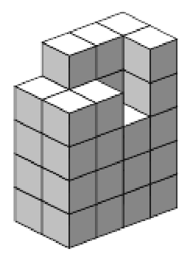
Ⓐ 13; Ⓑ 15; Ⓒ 12; Ⓓ 14; Ⓔ 16.

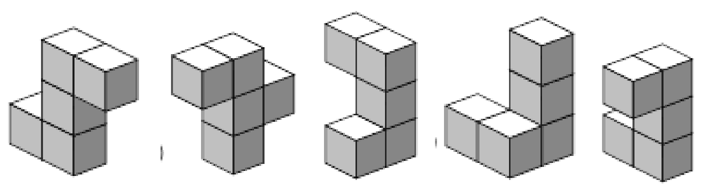


Problema 5. En Ciudad Numérica, las casas del lado derecho de la calle Número tienen números impares. Sin embargo, no se utilizan números que contengan el dígito 3. Si la primera casa del lado derecho de la calle lleva el número 1, ¿cuál es el número de la decimoquinta casa en ese mismo lado?

Ⓐ 29; Ⓑ 41; Ⓒ 43; Ⓓ 45; Ⓔ 47.

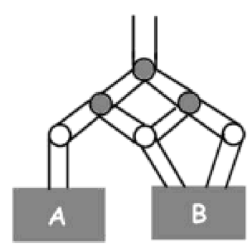
Problema 6. Dado el sólido que se ve a la derecha, ¿cuál de las cinco piezas de abajo se le puede agregar para completar un prisma?





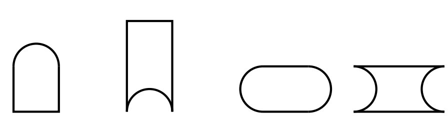
Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

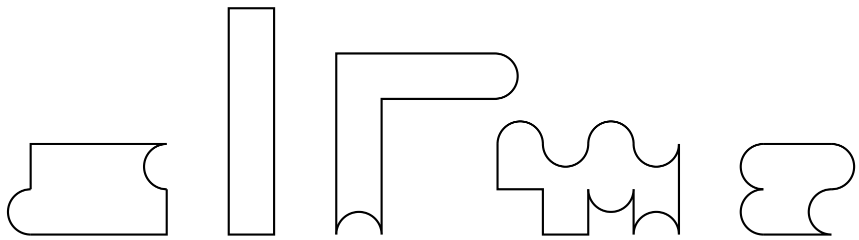
Problema 7. Se han vertido 1000 litros de agua en la parte superior de la tubería. En cada bifurcación el agua se divide en dos partes iguales. ¿Cuántos litros de agua llegarán al recipiente B?



Ⓐ 800; Ⓑ 500; Ⓒ 666,67; Ⓓ 660; Ⓔ 750.

Problema 8. Usando piezas de cartón de las que se muestran a la derecha se forma una figura. ¿Cuál de las cinco figuras de abajo es imposible de hacer?





Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

Problema 9. La fecha 01-03-05 (1 de marzo de 2005) contiene tres números impares consecutivos en orden creciente. Esta es la primera fecha con esa propiedad en el siglo 21. Incluyendo la fecha dada como ejemplo, ¿cuántas fechas (expresadas en el formato dd-mm-aa) tienen esa propiedad en el siglo 21?

Ⓐ 16; Ⓑ 13; Ⓒ 5; Ⓓ 6; Ⓔ 8.

Problema 10. Si la gata Laura descansa durante el día, bebe 60 ml de leche. Si en cambio caza ratones, bebe un tercio más de leche. Durante las dos últimas semanas ha cazado ratones un día si y otro no. ¿Cuánta leche ha bebido en las últimas dos semanas?

Ⓐ 840 ml; Ⓑ 1960; Ⓒ 1050 ml; Ⓓ 1120 ml; Ⓔ 980 ml.

Problema 11. Andrés escribe cada letra de la palabra CANGURO en un tablero de 4×2, cada letra en una casilla diferente. La primera letra la escribe en cualquier casilla, pero cada letra posterior la escribe en una casilla que tenga al menos un punto en común con la casilla en la que escribió la letra anterior. ¿Cuál de los siguientes tableros no puede ser de Andrés?

Ⓐ

C	A
N	
O	G
R	U

;

Ⓑ

N	G
A	U
C	R
	O

;

Ⓒ

O	
C	R
A	U
G	N

;

Ⓓ

C	A
N	G
O	
R	U

;

Ⓔ

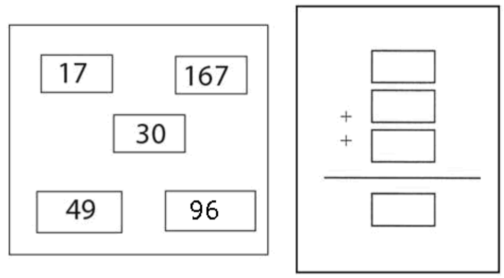
C	
A	O
R	N
U	G

.

Problema 12. Todos los números enteros de 4 dígitos con los mismos dígitos que el número 2011 (dos unos, un cero y un dos) se escriben en orden creciente. ¿Cuál es la diferencia entre los dos vecinos del número 2011 en esta lista?

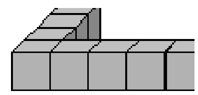
Ⓐ 891; Ⓑ 900; Ⓒ 890; Ⓓ 909; Ⓔ 990.

Problema 13. Mueva cuatro de los números de la izquierda a las celdas de la derecha de modo que la adición sea correcta. ¿Qué número queda del lado izquierdo?



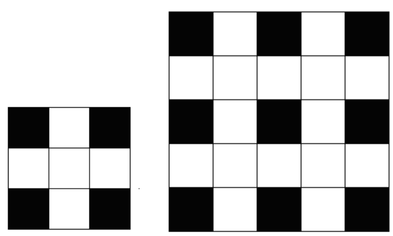
Ⓐ 17; Ⓑ 30; Ⓒ 49; Ⓓ 96; Ⓔ 167.

Problema 14. Nina usó 36 cubos idénticos para construir una cerca de cubos alrededor de una región cuadrada (parte de ella se muestra en la figura). ¿Cuántos cubos se necesitan para llenar la región?



Ⓐ 36; Ⓑ 64; Ⓒ 49; Ⓓ 100; Ⓔ 81.

Problema 15. Las figuras muestran cómo embaldosar pisos cuadrados de lados 3 y 5 con baldosas blancas y negras, colocando una baldosa negra en cada esquina y de modo que cada baldosa negra esté rodeada por baldosas blancas. Si para embaldosar un piso cuadrado con este mismo patrón se utilizaron 25 baldosas negras, ¿cuántas baldosas blancas se utilizaron?



Ⓐ 56; Ⓑ 39; Ⓒ 45; Ⓓ 25; Ⓔ 72.

Problema 16. Pablo quería multiplicar un número entero por 301, pero se le olvidó el cero y lo multiplicó por 31, obteniendo como resultado 372. De no haberse equivocado, ¿qué resultado debería haber obtenido?

Ⓐ 3720; Ⓑ 3702; Ⓒ 3010; Ⓓ 3612; Ⓔ 30720.

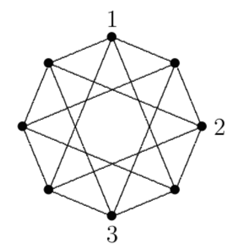
Problema 17. En tres partidos la “vino tinto” anotó 3 goles y le hicieron un gol. En esos tres partidos el equipo ganó un partido, empató uno y perdió uno. ¿Cuál fue el resultado del partido ganado?

Ⓐ 2:0; Ⓑ 3:0; Ⓒ 1:0; Ⓓ 2:1; Ⓔ 0:1.

Problema 18. Nos dan tres puntos que forman un triángulo. Queremos añadir un cuarto punto para formar un paralelogramo. ¿Cuántas posibilidades hay para el cuarto punto?

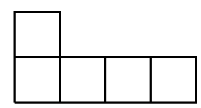
Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 3; Ⓓ 4; Ⓔ Depende del triángulo inicial.

Problema 19. En cada uno de los 8 puntos marcados en la figura debe escribirse uno de los números 1, 2, 3 ó 4, de tal manera que los extremos de cada segmento tengan números diferentes. Tres números ya han sido escritos. ¿Cuántas veces habrá que usar el número 4?



Ⓐ 1 ; Ⓑ 2 ; Ⓒ 3 ; Ⓓ 4 ; Ⓔ 5.

Problema 20. Daniel quiere hacer un cuadrado utilizando solamente piezas como la de la figura. ¿Cuál es el menor número de piezas que debe utilizar?



Ⓐ 20; Ⓑ 16; Ⓒ 12; Ⓓ 10; Ⓔ 8.

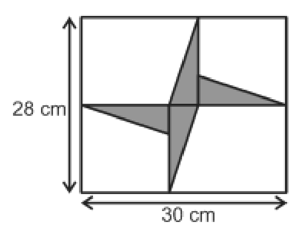
Problema 21. En una clase de baile hay 10 alumnos, entre niños y niñas. El maestro tiene 80 caramelos. Si le da a cada niña el mismo número de caramelos, le sobran 3 caramelos. ¿Cuántos niños hay en la clase?

Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 3; Ⓓ 5; Ⓔ 7.

Problema 22. Una gata tiene 7 gatitos: blanco, negro, marrón, blanco-negro, blanco-marrón, negro-marrón y blanco-negro-marrón. ¿Cuántas maneras hay de escoger 4 gatitos de modo que dos cualesquiera de ellos tengan un color común?

Ⓐ 1; Ⓑ 3; Ⓒ 4; Ⓓ 6; Ⓔ 7.

Problema 23. Se tienen cuatro triángulos rectángulos idénticos en el interior de un rectángulo, como muestra la figura. Calcule el área total de los cuatro triángulos.



Ⓐ 64 cm^2; Ⓑ 56 cm^2; Ⓒ 54 cm^2; Ⓓ 52 cm^2; Ⓔ 46 cm^2.

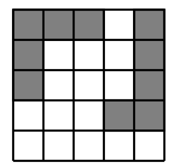
Problema 24. Alejo dice que Pedro está mintiendo. Pedro dice que Marcos está mintiendo. Marcos dice que Pedro está mintiendo. Tomás dice que Alejo está mintiendo. ¿Cuántos niños están mintiendo?

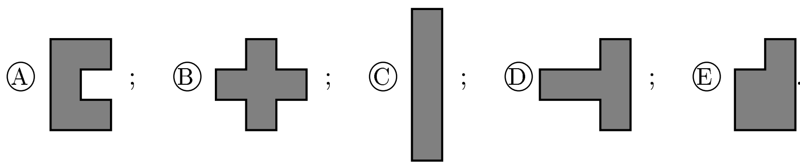
Ⓐ 2; Ⓑ 1; Ⓒ 0; Ⓓ 3; Ⓔ 4.

Problema 25. Se dibujan cuatro circunferencias en la pizarra de manera que cada par de ellas tengan exactamente un punto en común. ¿Cuál es el mayor número de puntos que pueden pertenecer a más de una circunferencia?

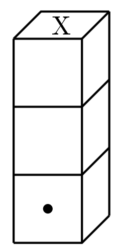
(A) 1; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 8.

Problema 26. Luisa ha colocado dos fichas (cada una formada por cinco cuadrados de 1×1) en un tablero de 5×5, como se muestra en la figura. ¿Cuál de las siguientes cinco fichas podría colocarse en la parte vacía del tablero, de modo que no se pueda agregar ninguna de las otras cuatro fichas?





Problema 27. Un dado es *normal* si los puntos en cada par de caras opuestas suman 7. La figura muestra tres dados normales apilados uno encima del otro. Se sabe que la suma de los puntos de cualquier par de caras en contacto es 5. Además, una de las caras laterales del dado inferior tiene un punto. ¿Cuántos puntos tiene la cara marcada X?



(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5; (E) 6.

Problema 28. En un mes hubo 5 sábados y 5 domingos, pero sólo 4 viernes y 4 lunes. En el mes que viene habrá

(A) 5 jueves; (B) 5 miércoles; (C) 5 sábados; (D) 5 domingos; (E) 5 viernes.

Problema 29. Se dan cuatro números positivos a, b, c y d tales que $a < b < c < d$. Se pide aumentar uno de ellos en 1 de tal manera que, luego del aumento, el producto de los cuatro números sea lo más pequeño posible. ¿Cuál se debe aumentar?

(A) a; (B) b; (C) c; (D) d; (E) b o c indistintamente.

Problema 30. ¿Cuántos enteros se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, usando cada dígito exactamente una vez, de tal manera que el primer dígito del número sea divisible entre 1, el número formado por los dos primeros dígitos sea divisible entre 2, el número formado por los tres primeros dígitos sea divisible entre 3, el número formado por los cuatro primeros dígitos sea divisible entre 4 y el número formado por los cinco dígitos sea divisible entre 5?

(A) Ninguno; (B) 1; (C) 2; (D) 5; (E) 10.

1.1.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (B), martes.

2. La respuesta correcta es la (C). Como 30 minutos es media hora, la velocidad media es $28/(1/2) = 56$ km/h.

3. La respuesta correcta es la (B), un cuadrado. Todas las otras figuras pueden obtenerse.

4. La respuesta correcta es la (A), 13, y se consigue bajando un piso, siguiendo hacia la derecha, bajando otro piso, siguiendo hacia la izquierda hasta el final, bajando otro piso y siguiendo hacia la derecha hasta el final.

5. La respuesta correcta es la (E), 47. Las primeras 15 casas llevan números 1, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 41, 45 y 47.

6. La respuesta correcta es la (C).

7. La respuesta correcta es la (E). Los 500 litros que van a la derecha en la primera bifurcación, van a parar al recipiente B. Pero de los 500 litros que van hacia la izquierda, la mitad (250) van a la derecha en la segunda bifurcación y también terminan en B.

8. La respuesta correcta es la (E), ya que no se puede lograr la parte inferior de esta figura. Las otras cuatro sí se pueden formar.

9. La respuesta correcta es la (C). Las cinco fechas son 01-03-05, 03-05-07, 05-07-09, 07-09-11 y 09-11-13.

10. La respuesta correcta es la (E). En cada dís de cacería bebió $60 + \frac{1}{3}60 = 60+20 = 80$ ml de leche. Por lo tanto en total bebió $7\times 80+7\times 60 = 560+420 = 980$ ml de leche.

11. La respuesta correcta es la (D), pues las casillas que contienen a la G y a la U no tienen ningún punto en común.

12. La respuesta correcta es la (A). El número anterior al 2011 es el 1210, el siguiente el 2101, y $2101 - 1210 = 891$.

13. La respuesta correcta es la (E). Como $17 + 30 + 49 = 96$, si movemos estos cuatro números a la derecha, a la izquierda queda el 167.

14. La respuesta correcta es la (B). Tomando como unidad el lado del cubo, la región encerrada es de 8×8 y se llena con 64 cubos.

15. La respuesta correcta es la (A). Para el cuadrado de lado 9 se necesitan $5^2 = 25$ baldosas negras y $9^2 - 5^2 = 56$ baldosas blancas-

16. La respuesta correcta es la (D). Si $31n = 372$ entonces $n = 372/31 = 12$ y $12 \times 301 = 3612$.

17. La respuesta correcta es la (B). El resultado del partido perdido sólo pudo haber sido 0:1, entonces el empatado terminó 0:0 y el ganado 3:0.

18. La respuesta correcta es la (C). El cuarto punto debe ser el simétrico de un vértice respecto al punto medio del lado opuesto y por lo tanto hay 3 posibilidades.

19. La respuesta correcta es la (D). Hay cuatro puntos que están conectados por segmentos a los que están marcados con 1, 2 y 3 y por lo tanto deben llevar necesariamente un 4.

20. La respuesta correcta es la (A). Como las piezas se componen de 5 cuadraditos, el área del cuadrado que se forme (y por lo tanto su lado) deben ser múltiplos de 5. Pero es fácil convencerse de que un cuadrado de lado 5 no se puede formar. La siguiente posibilidad, el cuadrado de lado 10, sí se puede. En efecto, con dos piezas se puede formar un rectángulo de 2×5 y con 10 de estos rectángulos se llena el cuadrado de lado 10. Por lo tanto se necesitan como mínimo 20 piezas.

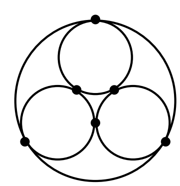
21. La respuesta correcta es la (C). Al dividir 80 entre 1, 2,$\ldots$, 9 se obtienen los restos 0, 0, 2, 0, 0, 2, 3, 0 y 8. Por lo tanto el número de niñas es 7, y el de niños es 3.

22. La respuesta correcta es la (C). Las cuatro maneras son: los 4 que tienen blanco, los 4 que tienen marrón, los 4 que tienen negro y los 4 que tienen al menos dos colores.

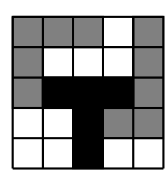
23. La respuesta correcta es la (B). El cateto menor de los triángulos mide $30-28=2$ cm, y el cateto mayor mide $28/2=14$ cm. Por lo tanto cada uno tiene área 14 cm^2 y los 4 tienen área 56 cm^2.

24. La respuesta correcta es la (A). Si Tomás dice la verdad entonces Alejo miente, por tanto Pedro dice la verdad y Marcos miente. Si en cambio Tomás miente entonces Alejo dice la verdad, por tanto Pedro miente y Marcos dice la verdad. En cualquier caso los que mienten son dos.

25. La respuesta correcta es la (D). Como hay 6 pares de circunferencias, el máximo número de puntos es 6. Este máximo se alcanza si tres circunferencias son tangentes exteriormente y la cuarta es tangente exteriormente (o interiormente) a las tres primeras.



26. La respuesta correcta es la (D). Colocando la pieza T como se muestra en la figura no se puede agregar ninguna de las otras cuatro fichas.



27. La respuesta correcta es la (E). La cara superior del dado inferior no puede tener un 1. Si tiene un número mayor que 2, la cara inferior del dado medio tendría un número < 3, la cara superior del dado medio un número > 4 y no podría sumar 5 con la cara inferior del dado superior. La única posibilidad es que la cara superior del dado inferior tenga un 2. Entonces la cara inferior del dado medio tiene un 3, la cara superior del dado medio un 4, la cara inferior del dado superior un 1 y la cara superior del dado superior un 6.

28. La respuesta correcta es la (B). El primer día del mes debe haber sido sábado y el último domingo, teniendo el mes 30 días. Rl mes siguiente tiene 31 días y comienza por lunes, por lo tanto tiene 5 lunes, 5 martes, 5 miércoles y sólo 4 de cada uno de los días restantes de la semana.

29. La respuesta correcta es la (D). Si se aumenta a el producto de los cuatro se incrementa en $(a+1)bcd - abcd = bcd$. Análogamente si se aumentan b, c o d el producto de los cuatro se incrementa respectivamente en acd, abd o abc. El menor entre bcd, acd, abd y abc es abc, que se obtiene cuando el que se aumenta es d.

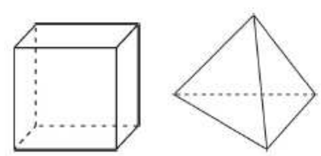
30. La respuesta correcta es la (A). Si un número $abcde$ cumple las condiciones, entonces debe ser $e = 5$ (para que sea divisible entre 5). Además b y d deben ser pares (2 y 4) y por lo tanto a y c deben ser 1 y 3 (en algún orden). Como abc debe ser divisible entre 3, $a + b + c = 4 + b$ debe ser divisible entre 3, por lo tanto $b = 2$ y en consecuencia $d = 4$. Pero entonces $abcd$ sería 1234 ó 3214, ninguno de los cuales es divisible entre 4.

1.2. Prueba de Tercer Año

Problema 1. ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

Ⓐ 2011^1; Ⓑ $1 + 2011$; Ⓒ 1×2011; Ⓓ 1^{2011}; Ⓔ $1 \div 2011$.

Problema 2. Elsa juega con cubos y tetraedros. Si tiene 5 cubos y 3 tetraedros. ¿Cuántas caras hay en total?



Ⓐ 50; Ⓑ 56; Ⓒ 42; Ⓓ 52; Ⓔ 48.

Problema 3. En un cruce peatonal se alternan franjas blancas y negras, cada una de anchura 50 cm. Uno de estos cruces comienza y termina con una franja blanca y tiene 8 franjas blancas en total. ¿Cuál es la anchura total del cruce?

Ⓐ 7 m; Ⓑ 7,5 m; Ⓒ 8 m; Ⓓ 8,5 m; Ⓔ 9 m.

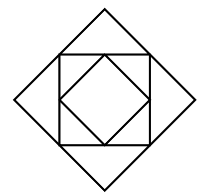
Problema 4. Mi calculadora divide en vez de multiplicar y resta en lugar de sumar. Si tecleo $(12 \times 3) + (4 \times 2)$, ¿qué muestra la calculadora?

Ⓐ 2; Ⓑ 6; Ⓒ 12; Ⓓ 28; Ⓔ 38.

Problema 5. Mi reloj digital acaba de mostrar la hora 20:11. ¿Cuántos minutos más tarde mostrará una hora con los dígitos 0, 1, 1, 2, en algún orden?

Ⓐ 40; Ⓑ 45; Ⓒ 60; Ⓓ 55; Ⓔ 50.

Problema 6. El diagrama muestra tres cuadrados. El cuadrado mediano une los puntos medios del cuadrado grande. El cuadrado pequeño une los puntos medios del cuadrado mediano. El área del cuadrado pequeño en la figura es de 6 cm^2. ¿Cuál es la diferencia entre el área del cuadrado grande y el área del cuadrado mediano, en cm^2?



Ⓐ 6; Ⓑ 9; Ⓒ 12; Ⓓ 15; Ⓔ 18.

Problema 7. En la calle donde vivo hay 17 casas. A un lado de la calle las casas están numeradas con números pares y al otro con números impares. Mi casa es la última del lado par y su número es 12. Mi primo vive en la última del lado impar. ¿Cuál es el número de su casa?

Ⓐ 5 ; Ⓑ 7 ; Ⓒ 13 ; Ⓓ 17 ; Ⓔ 21

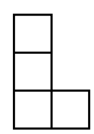
Problema 8. Félix el Gato capturó 12 peces en 3 días. Cada día, después del primero, capturó más peces que el día anterior. En el tercer día, capturó menos peces que en los dos primeros días juntos. ¿Cuántos peces capturó el tercer día?

Ⓐ 9; Ⓑ 8; Ⓒ 7 ; Ⓓ 6; Ⓔ 5.

Problema 9. De todos los números de tres dígitos con suma de dígitos igual a 8, se escogen el más grande y el más pequeño. ¿Cuál es su suma?

Ⓐ 707; Ⓑ 916; Ⓒ 907; Ⓓ 1001; Ⓔ 1000.

Problema 10. El diagrama muestra cuatro cuadrados idénticos dispuestos en forma de L. Se desea agregar un quinto cuadrado de modo que se forme una figura con un eje de simetría. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?



Ⓐ 1; Ⓑ 6; Ⓒ 2; Ⓓ 5; Ⓔ 3.

Problema 11. $\dfrac{2011 \cdot 2{,}011}{201{,}1 \cdot 20{,}11} =$

Ⓐ 0,01 ; Ⓑ 0,1 ; Ⓒ 10; Ⓓ 1; Ⓔ 100.

Problema 12. María tiene 9 perlas que pesan 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 7 g, 8 g y 9 g. Ella hace cuatro anillos con dos perlas en cada uno. Los pesos de las perlas en estos cuatro anillos son 17 g, 13 g, 7 g y 5 g. ¿Cuál es el peso de la perla restante?

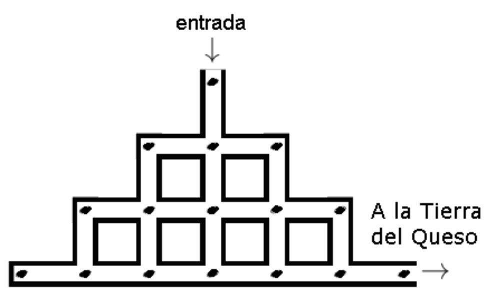
(A) 3 g; (B) 2 g; (C) 4 g; (D) 1 g; (E) 5 g.

Problema 13. Dados los números 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12 y 16, ¿qué par de ellos se puede quitar sin modificar el promedio?

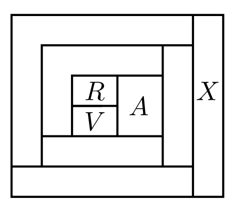
(A) 12 y 17; (B) 5 y 17; (C) 9 y 16; (D) 10 y 12; (E) 14 y 10.

Problema 14. El ratón Pérez va a la Tierra del Queso. Pero para llegar a esa tierra legendaria tiene que pasar a través de un sistema de túneles, como se muestra en la figura. No se le permite volver a una intersección en la que ya haya estado. En cada intersección se encuentra una caraota. ¿Cuántas caraotas, como máximo, puede recoger el ratón Pérez?

(A) 12 ; (B) 13 ; (C) 14 ; (D) 15 ; (E) 16

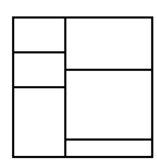


Problema 15. Cada región en el diagrama se pinta con uno de los cuatro colores: rojo (R), verde (V), azul (A) o blanco (B). Dos regiones con un borde común deben tener colores diferentes. Entonces el color de la región X es:



(A) rojo ; (B) azul ; (C) verde ; (D) blanco ; (E) no es posible determinarlo.

Problema 16. Un trozo cuadrado de papel se corta en seis piezas rectangulares como muestra la figura. La suma de los perímetros de las seis piezas rectangulares es 120 cm. Encuentre el área de la pieza cuadrada de papel.



(A) 48 cm^2; (B) 64 cm^2; (C) 110,25 cm^2; (D) 144 cm^2; (E) 256 cm^2.

Problema 17. En tres partidos la “vino tinto” anotó 3 goles y le hicieron un gol. En esos tres partidos la vino tinto ganó un partido, empató uno y perdió uno. ¿Cuál fue el resultado del partido ganado?

(A) 2:0; (B) 3:0; (C) 1:0; (D) 2:1; (E) 0:1.

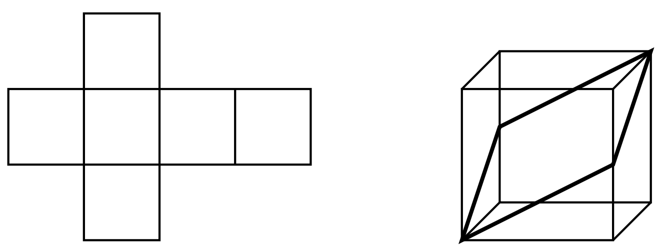
Problema 18. Darío dibuja un segmento de recta DE de longitud 2 en un pedazo de papel. ¿Cuántos puntos diferentes F puede dibujar en el papel de forma que el triángulo DEF sea rectángulo y tenga área 1?

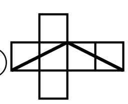
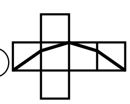
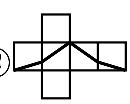
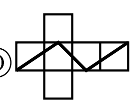
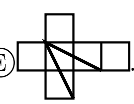
(A) 2; (B) 4; (C) 6; (D) 8; (E) 10.

Problema 19. El número positivo a es menor que 1, y el número b es mayor que 1. ¿Cuál de los siguientes números tiene el mayor valor?

(A) $a \cdot b$; (B) b; (C) $a \div b$; (D) $a + b$; (E) La respuesta depende de a y b.

Problema 20. Un cubo se construye con papel plegado como muestra la figura. Por la superficie del cubo se traza una línea oscura que divide a la superficie del cubo en dos partes idénticas. ¿Cómo queda el papel después de que el cubo se desdobla?

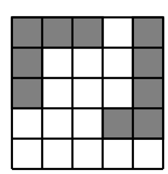


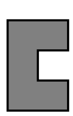
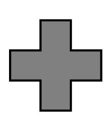
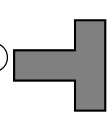
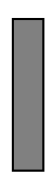
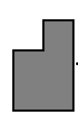
(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

Problema 21. El número de cinco dígitos $24X8Y$ es divisible por 4, 5 y 9. ¿Cuál es la suma de los dígitos X e Y?

(A) 9; (B) 10; (C) 4; (D) 13; (E) 5.

Problema 22. Luisa ha colocado dos fichas (cada una formada por cinco cuadrados de 1×1) en un tablero de 5×5. ¿Cuál de las siguientes cinco fichas podría colocarse en la parte vacía del tablero, de tal manera que no se pueda agregar ninguna de las otras cuatro fichas?

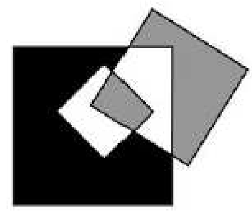


(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

Problema 23. Cada uno de los tres loros Isaac, Mario y Oscar tiene un nido propio. Isaac dice: «Yo estoy más del doble de lejos de Mario que de Oscar». Mario dice: «Yo estoy más del doble de lejos de Oscar que de Isaac». Oscar dice: «Yo estoy más que el doble de lejos de Mario que de Isaac». Al menos dos de ellos están diciendo la verdad. ¿Cuál es el que miente?

Ⓐ Isaac; Ⓑ Mario; Ⓒ Oscar; Ⓓ Ninguno de ellos;
Ⓔ No se puede determinar con los datos suministrados.

Problema 24. Dentro de un cuadrado de lado 7 cm dibujé un cuadrado de lado 3 cm. Luego dibujé otro cuadrado de lado 5 cm, que intersecta a los dos primeros. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas de la parte negra y la parte gris?



Ⓐ 15 cm^2; Ⓑ 11 cm^2; Ⓒ 10 cm^2; Ⓓ 0 cm^2; Ⓔ imposible determinarlo.

Problema 25. Miguel dispara al blanco. En cada disparo acertado puede obtener 5, 8 ó 10 puntos. Su puntuación total fue 99, y obtuvo 8 tantas veces como 10. Si en el 25 % de sus tiros no acertó al blanco, ¿cuántos disparos hizo Miguel en total?

Ⓐ 10; Ⓑ 12; Ⓒ 16; Ⓓ 20; Ⓔ 24.

Problema 26. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ con $AB = AC$, los siguientes ángulos son conocidos: $\angle BAD = 80°$, $\angle ABC = 75°$, $\angle ADC = 65°$. ¿Cuánto mide $\angle BDC$?

Ⓐ 45°; Ⓑ 30°; Ⓒ 20°; Ⓓ 15°; Ⓔ 10°.

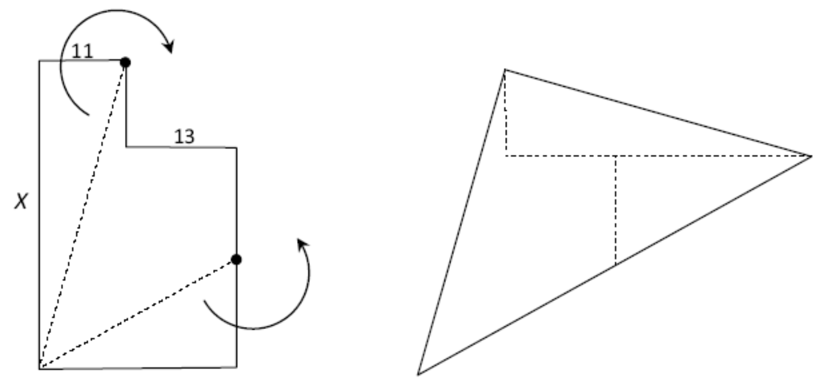
Problema 27. Hace siete años, la edad de Eva era un múltiplo de 8, y dentro de ocho años será un múltiplo de 7. Hace ocho años, la edad de Rafael era un múltiplo de 7, y dentro de siete años será un múltiplo de 8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones puede ser verdadera?

Ⓐ Rafael es dos años menor que Eva;
Ⓑ Rafael es un año menor que Eva;
Ⓒ Rafael y Eva tienen la misma edad;
Ⓓ Rafael es un año mayor que Eva;
Ⓔ Rafael es dos años mayor que Eva.

Problema 28. En la expresión $\dfrac{A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot B \cdot E \cdot F \cdot F}{D \cdot B \cdot G \cdot H}$ cada letra representa un dígito diferente de cero. Letras iguales representan dígitos iguales y letras diferentes representan dígitos diferentes. ¿Cuál es el valor entero positivo más pequeño posible de esta expresión?

Ⓐ 1 ; Ⓑ 2 ; Ⓒ 3 ; Ⓓ 5 ; Ⓔ 7

Problema 29. La siguiente figura se compone de dos rectángulos. Las longitudes de dos lados están marcadas: 11 y 13. La figura se corta en tres partes y las partes se reorganizan en un triángulo. ¿Cuál es la longitud del lado x?



Ⓐ 40; Ⓑ 39; Ⓒ 38; Ⓓ 37; Ⓔ 36.

Problema 30. Marcos juega un juego de computador en una cuadrícula de 4×4. Cada celda es roja o azul, pero el color sólo se ve si se hace clic en ella. Se sabe que sólo hay dos celdas azules, y que tienen un lado común. ¿Cuál es el menor número de clics que Marcos tiene que hacer para estar seguro de ver las dos celdas azules en la pantalla?

Ⓐ 10; Ⓑ 9; Ⓒ 12; Ⓓ 11; Ⓔ 13.

1.2.1. Soluciones

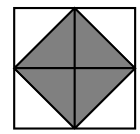
1. La respuesta correcta es la (B). Las cinco alternativas propuestas son (A) $2011^1 = 2011$, (B) $1 + 2011 = 2012$, (C) $1 \times 2011 = 2011$, (D) $1^{2011} = 1$ y (E) $1/2011$, la mayor de las cuales es (B) 2012.

2. La respuesta correcta es la (C). Los cubos tienen 6 caras y los tetraedros 4, por lo tanto el número total de caras es $5 \times 6 + 3 \times 4 = 30 + 12 = 42$.

3. La respuesta correcta es la (B). Si hay 8 franjas blancas, las negras deben ser 7 y el total 15. Por lo tanto la anchura total es $15 \times 50 = 750$ cm, o 7,5 m.

4. La respuesta correcta es la (A). La calculadora mostrará $(12 \div 3) - (4 \div 2) = 4 - 2 = 2$.

5. La respuesta correcta es la (E). La siguiente hora con los mismos dígitos será la 21:01, para lo cual faltan 50 minutos.



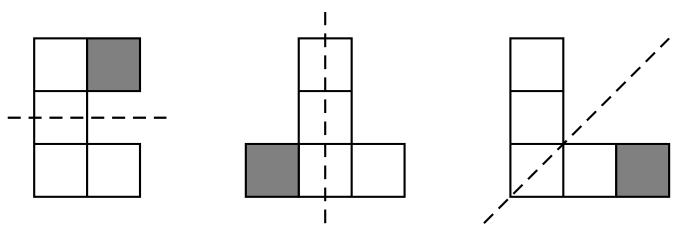
6. La respuesta correcta es la (C). Es fácil ver que el área del cuadrado medio es el doble del área del pequeño, es decir 12 cm^2 (pues el cuadrado pequeño se divide en 4 triángulos idénticos, y el cuadrado medio se divide en 8 de esos triángulos). Análogamente el área del cuadrado grande es el doble del área del medio, es decir 24 cm^2, y la diferencia pedida es $24 - 12 = 12$ cm^2.

7. La respuesta correcta es la (E). Las casas del lado par están numeradas 2, 4, 6, 8, 10 y 12. Entonces del lado impar debe haber 11 casas, numeradas 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 y 21.

8. La respuesta correcta es la (E), 5. El tercer día Félix capturó menos de la mitad del total, es decir que capturó a lo sumo 5 peces. Pero no pudo haber capturado menos de 5, pues si así fuese el total sería a lo sumo $2 + 3 + 4 = 9$.

9. La respuesta correcta es la (C). El más pequeño es 107 y el mayor es 800, por lo tanto la suma es 907.

10. La respuesta correcta es la (E).

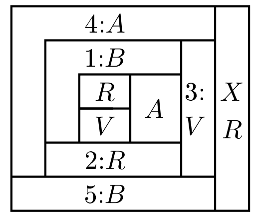


11. La respuesta correcta es la (D). Multiplicando numerador y denominador por 1000 la fracción es equivalente a $2011^2/2011^2 = 1$.

12. La respuesta correcta es la (A). El peso de todas las perlas es $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$, mientras que el de las perlas en los 4 anillos es $17+13+7+5 = 42$. La diferencia $45 - 42 = 3$ g es el peso de la perla restante.

13. La respuesta correcta es la (E). El promedio de todo el conjunto es $(17+13+5+10+14+9+12+16)/8 = 96/8 = 12$. El promedio de los que se quiten, para no alterar el promedio de los restantes, debe ser 12. De los 5 pares propuestos como alternativas, el único con promedio 12 es el formado por 14 y 10.

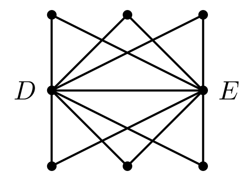
14. La respuesta correcta es la (B). Ver explicación para el problema 4 de primer y segundo año, página 9.



15. La respuesta correcta es la (A). La región marcada 1 en la figura no puede ser sino blanca, ya que tiene bordes comunes con regiones de color R, V y A. Por razones análogas la región 2 debe ser roja, la 3 debe ser verde, la 4 azul, la 5 blanca y finalmente la región X debe ser roja.

16. La respuesta correcta es la (D). Si a es el lado del cuadrado, la suma de los perímetros de los rectángulos es igual al perímetro del cuadrado más dos veces los segmentos interiores. Pero los segmentos interiores verticales suman a y los horizontales $2a$, por lo tanto $120 = 4a + 2(a + 2a) = 10a$, de donde $a = 12$ y el área del cuadrado es $12^2 = 144$ cm^2.

17. La respuesta correcta es la (B). Ver explicación para el problema 17 de primer y segundo año, página 10.



18. La respuesta correcta es la (C). Se pueden formar 4 triángulos rectángulos que tienen a DE como cateto mayor, con el otro cateto de longitud 1, y dos triángulos isorrectángulos que tienen a DE como hipotenusa y altura 1.

19. La respuesta correcta es la (D). Como $a < 1 < b$, se tiene que $a \cdot b < b < a + b$ y $a \div b < a < a + b$, por lo tanto el mayor es $a + b$.

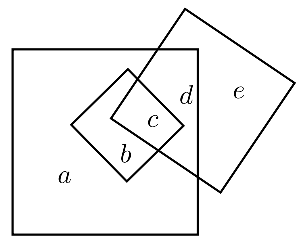
20. La respuesta correcta es la (A), como puede verse armando el desarrollo. Por otra parte (B), (C) y (D) claramente deben descartarse pues la línea oscura corta a algunas aristas en puntos diferentes de los puntos medios de éstas, y (E) se descarta porque una cara contiene dos segmentos de la línea oscura.

21. La respuesta correcta es la (C). Como el número es divisible entre 5 y 4, Y debe ser 0. Y como la suma de dígitos $2+4+X+8+Y = 14+X$ debe ser divisible entre 9, X sólo puede ser 4. Por lo tanto $X + Y = 4$.

22. La respuesta correcta es la (C). Ver explicación para el problema 26 de primer y segundo año, página 10.

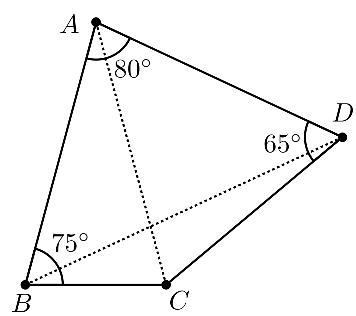
23. La respuesta correcta es la (B). Las afirmaciones de Isaac, Mario y Oscar son respectivamente (1) $IM > 2IO$, (2) $MO > 2IM$ y (3) $MO > 2IO$. Pero (1) y (2) son contradictorias, pues sumándolas resulta $IM + MO > 2IO + 2IM$, de donde $MO > 2IO + IM > IO + IM$, violando la desigualdad triangular. También son contradictorias (2) y (3), pues sumándolas se llega a $MO > IM + IO$. La única forma de que haya dos verdaderas es que Isaac y Oscar sean honestos y Mario sea mentiroso.

24. La respuesta correcta es la (A). Sean a, b, c, d y e las áreas de las 5 regiones en que se descompone la figura. Lo que se pide es $a - c - e$. Pero $a-c-e = a+b+c+d+e-(c+d+e)-(b+c) = 7^2 - 5^2 - 3^2 = 15$.



25. La respuesta correcta es la (D). Si x el número de veces que obtuvo 5 puntos y y el número de veces que obtuvo 8 puntos, entonces $5x + 8y + 10y = 99$, es decir que $5x + 18y = 99$. Como $5x = 99 - 18y$ es impar y múltiplo de 9, también debe serlo x. Esto deja como única posibilidad $x = 9$ (pues si $x \geq 27$ entonces $5x \geq 135 > 99$), de donde $y = 3$. Si n es el número total de disparos, entonces $(3/4)n = x + 2y = 9 + 6 = 15$, de donde $n = (4/3)15 = 20$.

26. La respuesta correcta es la (D). Como ABC es isósceles se tiene $\angle ACB = \angle ABC = 75°$. Por lo tanto $\angle BAC = 180° - 75° - 75° = 30°$ y $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 50°$. Entonces $\angle ACD = 180° - 65° - 50° = 65°$ y ACD es isósceles, de donde $AD = AC = AB$ y ABD también es isósceles. Por lo tanto $\angle ADB = \angle ABD = (180° - 80°)/2 = 50°$ y finalmente $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = 65° - 50° = 15°$.



27. La respuesta correcta es la (E). Sean E y R las edades de Eva y Rafael, respectivamente. Entonces $E - 7$ y $R + 7$ son múltiplos de 8, mientras que $E + 8$ y $R - 8$ son múltiplos de 7. La opción (C) es imposible, pues si $E = R$ entonces $E - 7$ y $R + 7 = E + 7$ serían múltiplos de 8, lo cual es absurdo pues difieren en 14. Como $E + R = (E - 7) + (R + 7)$ es múltiplo de 8 (y por lo tanto par) E y R deben ser de la misma paridad; esto descarta las opciones (B) y (D). Tampoco puede ser cierta (A), ya que si $R = E - 2$ entonces $E - 7$ y $R + 7 = E + 5$ serían ambos múltiplos de 8, absurdo pues difieren en 12. La única posibilñidad que queda es la (E), es decir $R = E + 2$. Esto efectivamente puede ocurrir, por ejemplo si $E = 55$ y $R = 57$.

28. La respuesta correcta es la (B). La expresión es igual a $\frac{ABCEF^2}{GH}$ y su mínimo es $\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1^2}{8\cdot 9} = \frac{15}{9} > 1$. Como $\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6}{8\cdot 9} = 2$ éste es el mínimo valor entero y se alcanza para $A = 2$, $B = 3$, $C = 4$, $D = 5$, $E = 6$, $F = 1$, $G = 8$ y $H = 9$.

29. La respuesta correcta es la (D). El ancho de la figura de la izquierda es $11 + 13 = 24$. En la figura de la derecha es claro que $x = 13 + 24 = 37$.

30. La respuesta correcta es la (A). Si se agrupan las 16 casillas en 8 pares de casillas adyacentes, resulta claro que se requieren al menos 8 clics para encender con certeza una casilla azul, y al menos 2 más para encender la otra. Diez clics siempre son suficientes. Para ello hagamos clic sucesivamente en las casillas marcadas 1, 2, 3, ... en la figura, hasta ver una casilla azul. Si la primera que se ve es la 8, haciendo clic en las 2 adyacentes se descubre la otra azul. Si la primera que se ve es la 7, haciendo clic en las 3 adyacentes se descubre la otra. Y si es alguna de la 1 a la 6, haciendo clic en las adyacentes (que son a lo sumo 4) se descubre la otra.

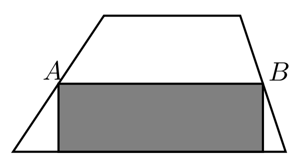
1		2	
	3		4
5		6	
	7		8

1.3. Prueba de Cuarto Año y Quinto Año

Problema 1. En un cruce peatonal se alternan franjas blancas y negras, cada una de anchura 50 cm. Uno de estos cruces comienza y termina con una franja blanca y tiene 8 franjas blancas en total. ¿Cuál es la anchura total del cruce?

Ⓐ 7 m; Ⓑ 7,5 m; Ⓒ 8 m; Ⓓ 8,5 m; Ⓔ 9 m.

Problema 2. El rectángulo sombreado tiene un área de 13 cm^2. A y B son los puntos medios de los lados del trapecio. ¿Cuál es el área del trapecio?

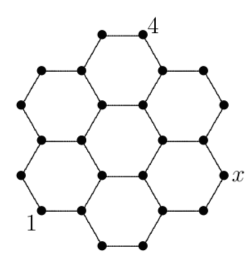


Ⓐ 24; Ⓑ 25; Ⓒ 26; Ⓓ 27; Ⓔ 28.

Problema 3. Dadas las expresiones, $S_1 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$, $S_2 = 2^2 + 3^2 + 4^2$, $S_3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

Ⓐ $S_2 < S_1 < S_3$; Ⓑ $S_3 < S_2 < S_1$; Ⓒ $S_1 < S_2 < S_3$;
Ⓓ $S_1 < S_2 = S_3$; Ⓔ $S_1 = S_2 < S_3$.

Problema 4. En la siguiente figura debe haber un número en cada vértice, de tal manera que la suma de los números en los extremos de cada segmento sea la misma. Dos de los números ya están allí. ¿Qué número debe ir en el punto x?



Ⓐ 1; Ⓑ 3; Ⓒ 4; Ⓓ 5; Ⓔ la información no es suficiente.

Problema 5. Cuando 2011 se dividió por un cierto número, el resto fue 1011. ¿Cuál de los números siguientes fue el divisor?

Ⓐ 100; Ⓑ 500; Ⓒ 1000; Ⓓ 2000; Ⓔ no es posible obtener ese resto.

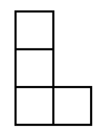
Problema 6. Un mosaico rectangular con 360 cm^2 de área está hecho de baldosas cuadradas, todas del mismo tamaño. El mosaico tiene 24 cm de alto y 5 baldosas de ancho. ¿Cuál es el área de cada baldosa en cm^2?

Ⓐ 1; Ⓑ 4; Ⓒ 9; Ⓓ 16; Ⓔ 25.

Problema 7. Todos los números de cuatro dígitos cuyos dígitos suman 4 se escriben en orden descendente. ¿En qué lugar de esta secuencia está ubicado el número 2011?

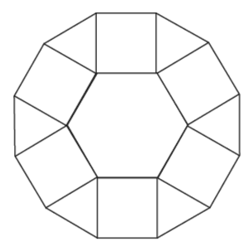
Ⓐ 6º; Ⓑ 8º; Ⓒ 7º; Ⓓ 10º; Ⓔ 9º.

Problema 8. El diagrama muestra cuatro cuadrados idénticos dispuestos en forma de L. Se desea agregar un quinto cuadrado de modo que se forme una figura con un eje de simetría. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?



Ⓐ 1 ; Ⓑ 6 ; Ⓒ 2 ; Ⓓ 5 ; Ⓔ 3.

Problema 9. El diagrama muestra una figura compuesta por un hexágono regular de lado unidad, seis triángulos y seis cuadrados. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



Ⓐ $6(1+\sqrt{2})$; Ⓑ $6(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$; Ⓒ 12; Ⓓ $6+3\sqrt{2}$; Ⓔ 9.

Problema 10. Un dado es *normal* si los puntos en cada par de caras opuestas suman 7. Tres dados normales son apilados uno encima del otro de modo que la suma de puntos en cualquier par de caras en contacto es 5. Una de las caras visibles del dado inferior muestra un punto. ¿Cuántos puntos tiene la cara superior del dado superior?

Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ 4; Ⓓ 5; Ⓔ 6.

Problema 11. En un determinado mes se produjeron 5 lunes, 5 martes y 5 miércoles. En el mes anterior hubo sólo cuatro domingos. Entonces el próximo mes incluirá necesariamente:

Ⓐ 5 domingos; Ⓑ 5 miércoles; Ⓒ exactamente 4 viernes;
Ⓓ exactamente 4 sábados; Ⓔ la situación es imposible.

Problema 12. Dado que $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$, ¿cuál es el valor de n?

Ⓐ 1005; Ⓑ 1006; Ⓒ 2010; Ⓓ 2011; Ⓔ ninguno de ellos.

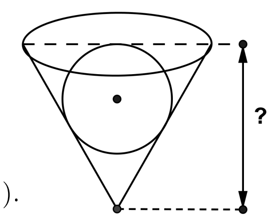
Problema 13. Tres deportistas participaron en una carrera: Miguel, Fernando y Sebastián. Inmediatamente después del comienzo, Miguel iba primero, Fernando segundo y Sebastián tercero. Durante la carrera, Miguel y Fernando se pasaron uno al otro 9 veces, Fernando y Sebastián lo hicieron 10 veces, y Miguel y Sebastián 11. ¿En qué orden finalizaron la carrera?

(A) Miguel, Fernando, Sebastián; (B) Fernando, Miguel, Sebastián;
(C) Sebastián, Miguel, Fernando; (D) Sebastián, Fernando, Miguel;
(E) Fernando, Sebastián, Miguel.

Problema 14. Se tienen dos cubos con lados de longitudes x cm y $x+1$ cm. El cubo grande está lleno de agua y el pequeño está vacío. Se vierte agua del cubo grande en el cubo pequeño hasta llenarlo, y quedan 217 litros en el cubo grande. ¿Cuánta agua se vertió en el cubo pequeño?

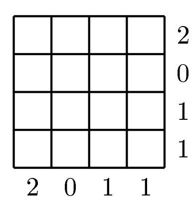
(A) 243 l; (B) 512 l; (C) 125 l; (D) 1.331 l; (E) 729 l.

Problema 15. Una esfera con radio 15 rueda dentro de un agujero cónico y encaja exactamente. La vista lateral del agujero cónico es un triángulo equilátero. ¿Qué tan profundo es el hoyo?



(A) 45; (B) $25\sqrt{3}$; (C) 60; (D) $30\sqrt{2}$; (E) $60(\sqrt{3}-1)$.

Problema 16. Algunas celdas de una cuadrícula blanca de 4×4 deben pintarse de negro. En la figura se indica, al lado de cada fila o columna, el número de celdas en esa fila o columna que deben pintarse de negro. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?



(A) 0; (B) 1; (C) 3; (D) 5; (E) 9.

Problema 17. ¿Cuál es el mayor número de enteros consecutivos de 3 dígitos que tienen al menos un dígito impar?

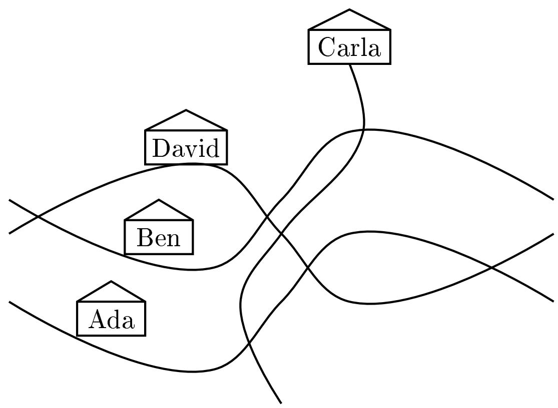
(A) 221; (B) 111; (C) 110; (D) 10; (E) 1.

Problema 18. Nicolás quiere escribir números enteros en las celdas de una cuadrícula de 3×3 de manera que la suma de los números en cada cuadrado de 2×2 sea igual a 10. Ya ha escrito cinco números, como se muestra en la figura. Encuentra la suma de los cuatro números restantes.

1		0
	2	
4		3

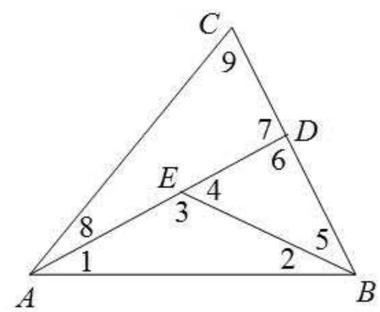
(A) 9; (B) 10; (C) 12; (D) 13; (E) 11.

Problema 19. Durante un viaje muy movido, Juana trató de esbozar un mapa de su aldea natal. Se las arregló para dibujar las cuatro calles, sus siete cruces y las casas de sus amigos, pero en realidad tres de las calles son rectas y sólo una es curva. ¿Quién vive en la calle curva?



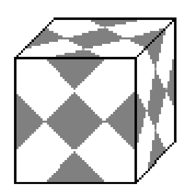
Ⓐ Ada; Ⓑ Ben; Ⓒ Carla; Ⓓ David; Ⓔ La información es insuficiente.

Problema 20. En el triángulo ABC, se elige un punto D en el segmento BC, y luego se elige el punto E en el segmento AD. Se obtienen así 9 ángulos denotados en la figura por los números 1, 2,..., 9. Encuentre el mínimo número posible de valores diferentes que los ángulos 1, 2,..., 9 podrían tomar.



Ⓐ 3; Ⓑ 5; Ⓒ 2; Ⓓ 6; Ⓔ 4.

Problema 21. Simón tiene un cubo de vidrio de 1 dm de lado, en cuyas caras pegó varios cuadrados idénticos de papel oscuro, de modo que el cubo se ve igual desde todos los lados (ver figura). ¿Cuántos cm^2 son de papel oscuro?



Ⓐ 37,5; Ⓑ 150; Ⓒ 225; Ⓓ 300; Ⓔ 375.

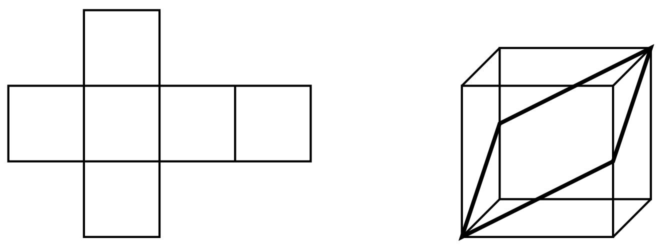
Problema 22. Llamemos a un número de cinco dígitos *abcde interesante* si sus cifras son todas diferentes y $a = b + c + d + e$. ¿Cuántos números interesantes hay?

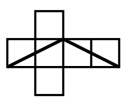
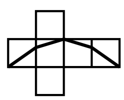
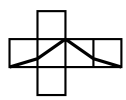
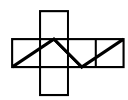
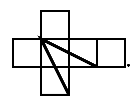
Ⓐ 72; Ⓑ 144; Ⓒ 168; Ⓓ 216; Ⓔ 288.

Problema 23. Los números x e y son ambos mayores que 1. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene el mayor valor?

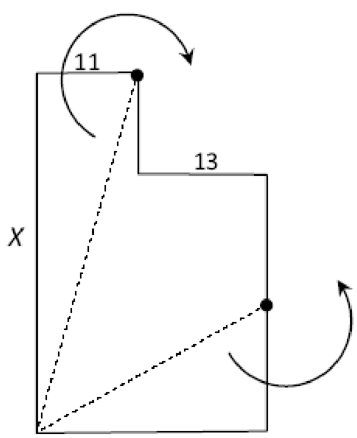
Ⓐ $\dfrac{x}{y+1}$; Ⓑ $\dfrac{x}{y-1}$; Ⓒ $\dfrac{2x}{2y+1}$; Ⓓ $\dfrac{2x}{2y-1}$; Ⓔ $\dfrac{3x}{3y+1}$.

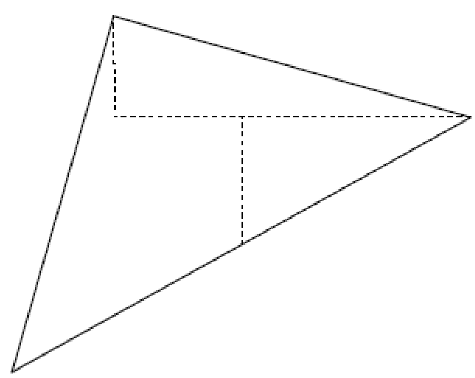
Problema 24. Un cubo se construye con papel plegado como muestra la figura. Por la superficie del cubo se traza una línea oscura que divide a la superficie del cubo en dos partes idénticas. ¿Cómo queda el papel después de que el cubo se desdobla?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 25. La siguiente figura se compone de dos rectángulos. Las longitudes de dos lados están marcadas: 11 y 13. La figura se corta en tres partes y las partes se reorganizan en un triángulo. ¿Cuál es la longitud del lado x?





Ⓐ 40; Ⓑ 39; Ⓒ 38; Ⓓ 37; Ⓔ 36.

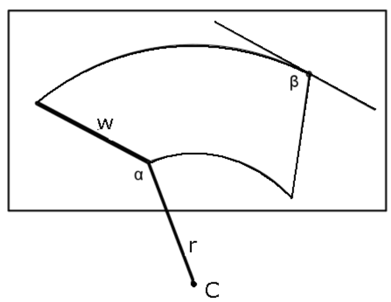
Problema 26. ¿Cuántos pares ordenados de números naturales (x, y) satisfacen la ecuación $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}$?

Ⓐ 0; Ⓑ 1; Ⓒ 2; Ⓓ 3; Ⓔ 4.

Problema 27. Para un entero $n \geq 2$ denotemos por $\langle n \rangle$ al mayor número primo que no exceda a n. ¿Cuántos enteros positivos k satisfacen la ecuación $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$?

Ⓐ 0; Ⓑ más de 3; Ⓒ 2; Ⓓ 3; Ⓔ 1.

Problema 28. El limpiavidrios trasero de un carro está construido de tal manera que la escobilla w y el brazo r tienen igual longitud y en el punto de unión forman un ángulo α. El limpiavidrios pivota en el centro C y limpia el área que se ve en la figura.



Determine el ángulo β (en radianes) formado por el lado recto derecho del área limpiada con la tangente.

Ⓐ $\frac{3\pi-\alpha}{2}$; Ⓑ $\pi - \frac{\alpha}{2}$; Ⓒ $\frac{3\pi}{2} - \alpha$; Ⓓ $\frac{\pi}{2} + \alpha$; Ⓔ $\pi + \frac{\alpha}{2}$.

Problema 29. Los hermanos Andrés y Bruno dieron respuestas verdaderas a la pregunta de cuántos miembros tiene su club escolar de ajedrez. Andrés dijo: «Todos los miembros de nuestro club, excepto cinco, son varones». Bruno dijo: «En cualquier grupo de seis miembros del club, al menos cuatro son niñas». ¿Cuántos miembros tiene el club?

Ⓐ 18; Ⓑ 12; Ⓒ 8; Ⓓ 7; Ⓔ 6.

Problema 30. ¿Cuántas cuaternas de aristas de un cubo poseen la propiedad de que ningún par de aristas de la cuaterna tiene vértices comunes?

Ⓐ 9; Ⓑ 8; Ⓒ 6; Ⓓ 12; Ⓔ 18.

1.3.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (B). Ver explicación para el problema 3 de tercer año, página 16.

2. La respuesta correcta es la (C). El área del trapecio es el producto de la semisuma de las bases por la altura. Pero la semisuma de las bases es igual al lado del rectángulo, y la altura del trapecio es el doble de la del rectángulo, por lo tanto el área del trapecio es el doble de la del rectángulo, es decir 26 cm^2.

3. La respuesta correcta es la (B). Para verlo basta calcular $S_1 = 38$, $S_2 = 29$, $S_3 = 20$ y sustituir estos valores en las expresiones dadas.

4. La respuesta correcta es la (A). Si la suma de los números en los extremos de cada segmento es S, al recorrer un camino partiendo del vértice marcado con 1 se van encontrando vértices con los números $S - 1$ y 1, alternadamente. Como al vértice marcado con x se llega atravesando 6 segmentos, es claro que $x = 1$.

5. La respuesta correcta es la (E). Si el cociente es q y el divisor d, por el algoritmp de la división se tendría $2011 = qd + 1011$, de donde $qd = 1000$ y $d \leq 1000$. Pero entonces el resto 1011 sería mayor que el divisor, lo que es absurdo.

6. La respuesta correcta es la (C). Si el qncho de cada baldosa es x cm, entonces $360 = 24 \cdot 5 \cdot x = 120x$, de donde $x = 3$ y el área de cada baldosa es 9 cm^2.

7. La respuesta correcta es la (E). Los números que se escriben son 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, etc.

8. La respuesta correcta es la (E). Ver explicación para el problema 10 de tercer año, página 17.

9. La respuesta correcta es la (C). Como los ángulos internos del hexágono son $120°$, el ángulo de cada triángulo en el vértice común con el hexágono es $360° - 120° - 90° - 90° = 60°$, y como son isósceles resultan también equiláteros (de lado 1). Por lo tanto el perímetro de la figura es 12.

10. La respuesta correcta es la (E). Ver explicación para el problema 27 de primero y segundo años, página 8.

11. La respuesta correcta es la (D). Para tener 5 lunes, 5 martes y 5 miércoles el mes debió comenzar en lunes y tener 31 días. El mes anterior finalizó en domingo, y como sólo tuvo 4 domingos debió tener 28 días, es decir que fue febrero. El mes siguiente fue entonces abril, que tiene 30 días, y comenzó en jueves, por lo tanto tuvo 5 jueves, 5 viernes y 4 de cada uno de los demás días de la semana. La única alternativa compatible con esta situación es la (D).

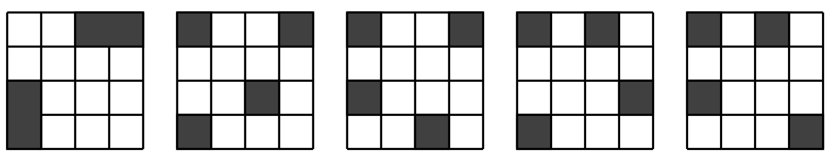
12. La respuesta correcta es la (A). $9^n + 9^n + 9^n = 3 \cdot 9^n = 3 \cdot (3^2)^n = 3 \cdot 3^{2n} = 3^{2n+1} = 3^{2011}$. Igualando los exponentes $2n + 1 = 2011$ resulta $n = 1005$.

13. La respuesta correcta es la (E). Como Fernando y Sebastián se pasaron uno al otro un número par de veces, quedaron en el mismo orden relativo en que estaban, es decir Fernando adelante de Sebastián. En cambio Miguel y Fernando se pasaron uno al otro un número impar de veces, por lo tanto quedaron en un orden diferente al inicial, es decir Fernando adelante de Miguel. Del mismo modo Miguel y Sebastián quedaron en un orden diferente al inicial, es decir Sebastián adelante de Miguel. En conclusión, terminaron en el orden Fernando, Sebastián, Miguel.

14. La respuesta correcta es la (B). Se tiene $(x+1)^3 - x^3 = 217$, de donde $3x^2 + 3x - 216 = 0$, $x^2 + x - 72 = 0$, cuya única raíz positiva es 8. Luego el volumen del cubo pequeño es $8^3 = 512$ litros.

15. La respuesta correcta es la (A). El radio de la esfera es la tercera parte de la altura del triángulo equilátero, luego ésta es 45.

16. La respuesta correcta es la (D). Las 5 soluciones son:



17. La respuesta correcta es la (B), 11, y se logra por ejemplo con los números desde el 289 hasta el 399.

18. La respuesta correcta es la (C). Si x es uno de los números que faltan, los restantes son $7-x$, $8-x$ y $x-3$ (ver figura). Por lo tanto la suma pedida es $x+(7-x)+(8-x)+(x-3)=12$. Alternativamente, si la suma pedida es S, sumando los 4 cuadrados de 2×2 se obtiene $40 = 1+4+3+0+4\times 2+2S$, es decir $24 = 2S$, de donde $S = 12$.

1	x	0
$7-x$	2	$8-x$
4	$x-3$	3

19. La respuesta correcta es la (D). Dos calles rectas pueden tener a lo sumo un punto de intersección. Como las calles de Ben y de David se cortan dos veces, una de ellas debe ser curva. Pero las calles de Ada y de David también se cortan dos veces, por lo tanto una de ellas debe ser curva. Se concluye que la calle curva es la de David.

20. La respuesta correcta es la (A). Como $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ y $\angle 7 = \angle 4 + \angle 5$, debe haber al menos tres ángulos diferentes. Este mínimo se alcanza si $\angle 1 = \angle 2 = \angle 5 = \angle 8 = \angle 9 = 36°$, pues en ese caso $\angle 3 = 108°$, $\angle 4 = \angle 6 = 72°$ y $\angle 7 = 108°$.

21. La respuesta correcta es la (C). La superficie lateral total es 600 cm^2, de la cual 3/8 están cubiertos por papel oscuro, es decir 225 cm^2.

22. La respuesta correcta es la (C). Los dígitos $bcde$ deben ser una permutación de 0123, 0124, 0125, 0126, 0134, 0135 o 0234. Por lo tanto la respuesta es $7 \cdot 4! = 7 \cdot 24 = 168$.

23. La respuesta correcta es la (B). Las expresiones dadas pueden escribirse como $A = \frac{x}{y+1}$, $B = \frac{x}{y-1}$, $C = \frac{x}{y+\frac{1}{2}}$, $D = \frac{x}{y-\frac{1}{2}}$, $E = \frac{x}{y+\frac{1}{3}}$, con lo cual resulta claro que $A < C < E < D < B$.

24. La respuesta correcta es la (A). Ver explicación para el problema 20 de tercer año, página 18.

25. La respuesta correcta es la (D). Ver explicación para el problema 29 de tercer año, página 19.

26. La respuesta correcta es la (D). Multiplicando por $3xy$ se ve que la ecuación es equivalente a $3x+3y = xy$, que a su vez se puede escribir como $(x-3)(y-3) = 9$, de donde se obtienen las soluciones (4,12), (6,6) y (12,4).

27. La respuesta correcta es la (E). Para $k = 1$ se cumple $\langle 2 \rangle + \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$. Si $k > 1$, el miembro izquierdo de la ecuación es la suma de dos primos mayores que 2, por lo tanto es par por ser la suma de dos impares, mientras que el miembro derecho es impar. Por lo tanto $k = 1$ es la única solución.

28. La respuesta correcta es la (B). El ángulo β es la suma de un recto y un ángulo de un triángulo isósceles con ángulo al vértice α, es decir

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi - \alpha}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2}.$$

29. La respuesta correcta es la (D). El club tiene cinco niñas y al menos dos varones (Andrés y Bruno). Pero no puede haber más varones, pues entonces se podría formar un grupo de seis con tres niñas y tres varones.

30. La respuesta correcta es la (A). Hay dos tipos de cuaternas de aristas disjuntas: (1) las formadas por cuatro aristas paralelas y (2) las que tienen dos aristas paralelas de una cara y dos dos aristas paralelas de la cara opuesta, pero ortogonales a las dos primeras. Las cuaternas del tipo (1) son 3, una para cada dirección posible. Las del tipo (2) son 6, pues para cada par de caras opuestas se pueden elegir los pares de aristas de 2 maneras. Por lo tanto la respuesta es $3 + 6 = 9$.

Capítulo 2

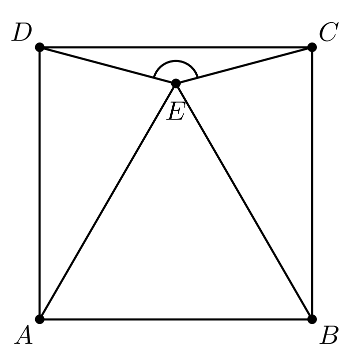
Prueba Regional

La prueba regional de la OJM consta de cinco problemas, que se valoran en una escala de 1 a 5. Los participantes disponen de tres horas para resolverlos.

2.1. Prueba de Primer Año

Problema 1.
Si $2^x = 15$ y $15^y = 32$, ¿cuál es el valor del producto xy?

Problema 2.
$ABCD$ es un cuadrado y ABE es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle CED$?



Problema 3.
Se tienen tres números de tres dígitos cada uno, abc, bca y cab, cuya suma es 2664. ¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

Problema 4.
El promedio de calificaciones de los 35 estudiantes de un curso es 15,75. Si el promedio de los chicos es 14,25 y el de las chicas es 18, ¿cuántas chicas hay en la clase?

Problema 5.
Un lenguaje tiene alfabeto ABDEFGIJLMNOPRSTU (5 vocales pero sólo 12 consonantes). Las palabras se forman con tres letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: PAS, INA, LUL y ONO son palabras, pero TRI, AAN, MIA y UGG no lo son.

(a) ¿Cuántas palabras hay en ese lenguaje?

(b) Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contenga la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo?

2.1.1. Soluciones

1. $2^{xy} = (2^x)^y = 15^y = 32$, por lo tanto $xy = 5$.

2. $\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE = 90° - 60° = 30°$. Como $EA = AB = AD$ el triángulo EAD es isósceles y $\angle ADE = (180° - \angle EAD)/2 = 75°$. Por lo tanto $\angle EDC = 15°$ y obviamente también $\angle ECD = 15°$, por lo tanto $\angle CED = 180° - 15° - 15° = 150°$.

3. La suma de los tres números es

$$(100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) = (100 + 10 + 1)(a + b + c),$$

por lo tanto $111(a + b + c) = 2664$ y $a + b + c = 2664/111 = 24$.

4. Sea x el número de chicas. Entonces

$$35 \cdot 15{,}75 = 14{,}25(35 - x) + 18x,$$

de donde

$$35(15{,}75 - 14{,}25) = (18 - 14{,}25)x = 3{,}75x,$$

$$x = \frac{35 \cdot 1{,}5}{3{,}75} = 14.$$

Hay 14 chicas.

5. (a) $5 \cdot 12 \cdot 5 + 12 \cdot 5 \cdot 12 = 300 + 720 = 1020$.

(b) Para cada letra hay 60 palabras que comienzan por ella, y como la letra del medio es la L, la respuesta será la palabra 31 que comience con L. Hay 12 palabras que comienzan con LA, 5 con LB y 5 con LD. Las palabra que siguen son LEB, LED, LEF, LEG, LEJ, LEL, LEM, LEN y LEP, que es la respuesta.

2.2. Prueba de Segundo Año

Los problemas 1, 2, 4 y 5 de segundo año son los mismos que los de primer año (ver pág. 29). Las pruebas sólo se diferencian en el problema 3, que se enuncia a continuación.

Problema 3.
a) ¿Cuál es el dígito de las unidades de $3^{2011} + 5^{2011}$?
(b) El número $3^{2011} + 5^{2011}$, ¿puede ser un cuadrado perfecto?

2.2.1. Soluciones

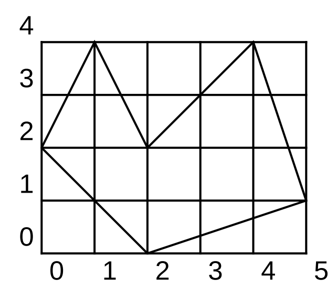
Las soluciones de los problemas 1, 2, 4 y 5 se encuentran en la página 30.

3. (a) Las potencias de 3 terminan sucesivamente en 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1,... La periodicidad permite afirmar que 3^{2011} termina en 7. Y es claro que 5^{2011} (como todas las potencias de 5) termina en 5.

(b) Como 3^{2011} termina en 7 y 5^{2011} termina en 5, la suma termina en 2. Pero los cuadrados perfectos sólo pueden terminar en 0, 1, 4, 5, 6 ó 9. Por lo tanto $3^{2011} + 5^{2011}$ no es un cuadrado perfecto.

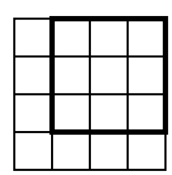
2.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1
Calcule el área del hexágono de la figura, sabiendo que el lado de la cuadrícula mide 1 cm.



Problema 2. Idéntico al Problema 3 de Segundo Año (ver más arriba).

Problema 3
Un tablero cuadrado de 4×4 tiene cuatro subtableros de 3×3 (en la figura se muestra uno de ellos limitado por la línea gruesa).



(a) Muestre cómo marcar 8 de las 16 casillas del tablero de manera que cada subtablero de 3×3 contenga exactamente 5 casillas marcadas.
(b) Muestre cómo marcar 8 de las 16 casillas del tablero de manera que cada subtablero de 3×3 contenga exactamente 6 casillas marcadas.

(c) ¿Es posible marcar 8 de las 16 casillas del tablero de manera que cada subtablero de 3×3 contenga exactamente 7 casillas marcadas? Justifique su respuesta.

Problema 4. A continuación se muestran dos de los dieciseis dígitos de una tarjeta de crédito:

			3								5				

Sabiendo que la suma de cualesquiera tres dígitos consecutivos es 14, ¿puede completar el número?

Problema 5. Halle todos los valores de k para los cuales las dos raíces de $x^2 - 30x + k = 0$ son números primos.

2.3.1. Soluciones

1. El hexágono está dentro de un rectángulo de lados 4 y 5 y área 20. La diferencia entre el rectángulo y el hexágono con 5 triángulos de áreas 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, 3 y 1, que suman 9 cm^2. Por lo tanto el área del hexágono es $20 - 9 = 11$ cm^2. Alternativamente: por el teorema de Pick el área es $8 + \frac{8}{2} - 1 = 11$ cm^2.

2. Ver solución al problema 2 de Tercer Año pág. 31.

3. (a) Hay varias maneras de hacerlo. A continuación se muestran dos de ellas:

X			X
	X	X	
	X	X	
X			X

X		X	X
	X		
	X	X	
	X	X	

(b) Hay dos maneras de hacerlo:

	X	X	
	X	X	
	X	X	
	X	X	

X	X	X	X
X	X	X	X

(c) Es imposible, ya que debería haber dos casillas sin marcar en cada subtablero 3×3, pero como cada subtablero tiene solamente una casilla que no pertenece a ninguno de los otros tres (la de la esquina) esas 8 casillas no pueden ser todas diferentes, y el tablero tendría menos de 8 casillas sin marcar.

4. Los dos dígitos a la derecha del 5 deben sumar 9, luego el penúltimo número es 5. Por la misma razón en las posiciones 9, 6 y 3 va el 5:

		5	3		5			5			5			5	

Ahora se ve que en la segunda casilla va el 6 y en la primera el 3. El resto se completa fácilmente de izquierda a derecha:

3	6	5	3	6	5	3	6	5	3	6	5	3	6	5	3

5. La suma de las raíces debe ser 30 y su producto k. Entonces, para cada descomposición de 30 como suma de dos primos p y q, se tiene una solución $k = pq$. Las descomposiciones válidas son $7+23 = 11+19 = 13+17$, por lo tanto los valores buscados de k son $7 \cdot 23 = 161$, $11 \cdot 19 = 209$ y $13 \cdot 17 = 221$.

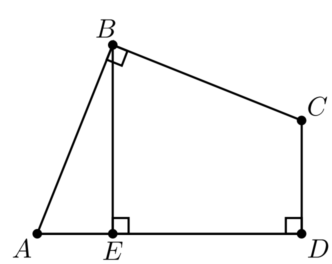
2.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Idéntico al Problema 4 de Tercer Año (ver pág. 32).

Problema 2. Halle todos los enteros n, $1 \leq n \leq 8$, tales que sea posible marcar algunas casillas en un tablero de 5×5 de modo tal que haya exactamente n casillas marcadas en cada cuadrado de 3×3.

Problema 3. Halle todos los valores de k para los cuales las dos raíces de $x^2 - 30x + k = 0$ son números primos.

Problema 4
Halle el área del cuadrilátero $ABCD$, sabiendo que $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = \angle BED = 90°$ y $BE = 5$.



Problema 5. Digamos que un número natural es *capicuadrado* si es un cuadrado perfecto y además se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo $484 = 22^2$ es un capicuadrado de 3 cifras.

a) Escriba al menos tres capicuadrados de 5 cifras.

b) ¿Existen capicuadrados de 4 cifras?

2.4.1. Soluciones

1. Ver página 33.

2. Es posible para todos los enteros desde el 1 hasta el 8, como muestran los siguientes diagramas:

		X		

$n = 1$

		X		
		X		
		X		

$n = 2$

		X		
		X		
		X		
		X		
		X		

$n = 3$

		X		
		X		
	X	X		X
		X		
		X		

$n = 4$

X	X		X	X
X	X		X	X
X			X	
X	X		X	X
X	X		X	X

$n = 5$

X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X

$n = 6$

X	X	X	X	X
X	X		X	X
X	X		X	X
X	X	X	X	X
X	X		X	X

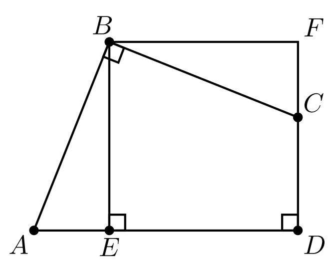
$n = 7$

X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X		X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X

$n = 8$

3. La suma de las raíces debe ser 30 y su producto k. Entonces, para cada descomposición de 30 como suma de dos primos p y q, se tiene una solución $k = pq$. Las descomposiciones válidas son $7+23 = 11+19 = 13+17$, por lo tanto los valores buscados de k son $7 \cdot 23 = 161$, $11 \cdot 19 = 209$ y $13 \cdot 17 = 221$.

4. Tracemos por B la paralela a AD hasta cortar en F a la prolongación de DC. Los triángulos rectángulos ABE y CBF son congruentes por tener $AB = BC$ y $\angle ABE = \angle CBF$, por lo tanto $BF = BE = 5$ y área$(ABCD)$ = área$(EBFD) = 25$.



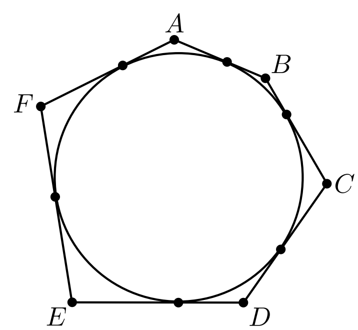
5. a) Es razonable probar con el cuadrado de un capicúa de tres cifras pequeñas (para evitar acarreos), así se obtienen $101^2 = 10201$, $111^2 = 12321$, $121^2 = 14641$, $202^2 = 40804$ y $212^2 = 44944$. Hay otro más difícil de hallar: $307^2 = 94249$.

b) No hay. Un capicuadrado n de 4 cifras sería de la forma $abba$, es decir $n = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$. Por lo tanto sería múltiplo de 11. Si $n = k^2$, entonces k debe ser múltiplo de 11. Si $k = 11r$ entonces $n = (11r)^2 = 121r^2$. Para que el resultado sea de 4 cifras r debe ser al menos 3 y a lo sumo 9, pero ninguno de los números $121r^2$ con $3 \leq r \leq 9$ (a saber 1089, 1936, 3025, 4356, 5929, 7744 y 9801) es capicúa, por lo tanto la respuesta es hegativa.

2.5. Prueba de Quinto Año

El problema 1 de quinto año es el mismo problema 4 de tercer año (ver pág. 32). Los problemas 2 y 3 de quinto año son los mismos que los problemas 2 y 3 de cuarto año (ver pág. 33). Los problema 4 y 5 se enuncian a continuación.

Problema 4
El hexágono $ABCDEF$ está circunscripto a una circunferencia (es decir que todos sus lados son tangentes a la circunferencia). Si las longitudes de los lados AB, BC, CD, DE y EF son 4, 5, 6, 7 y 8 respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado FA?



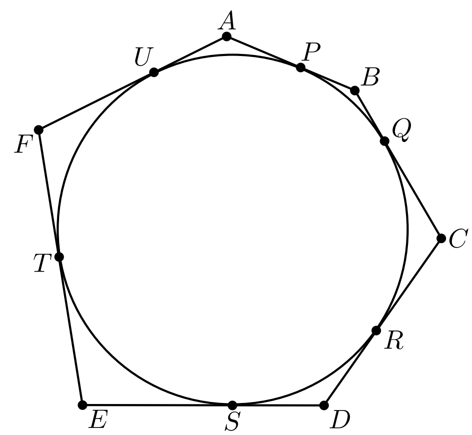
Problema 5. Halle todos los números naturales n tales que la suma de todos sus divisores (incluidos 1 y el mismo n) sea igual a 156.

2.5.1. Soluciones

La solución del problema 1 se encuentra en la página 33. Las soluciones de los problemas 2 y 3 se encuentran en la página 34.

4. Como los segmentos de tangente desde un punto exterior a una circunferencia son iguales, se tiene $AP = PB$, $BQ = QC$, $CR = RD$, $DS = SE$, $ET = TF$ Y $FU = UA$. Entonces $AB - BC + CD - DE + EF - FA = 0$, ya que en la suma alternada cada segmento de tangente se cancela con otro igual. Por lo tanto

$$FA = AB - BC + CD - DE + EF = 4 - 5 + 6 - 7 + 8 = 6.$$



5. Si $p^a q^b \cdots$ es la descomposición en factores primos de n entonces la suma de sus divisores es

$$(1+p+\cdots+p^a)(1+q+\cdots+q^b)\cdots$$

Los factores $(1+p+\cdots+p^a)$ que no superan 156 son: a) los de la forma $(1+p)$ con $p<156$ primo, b) $1+2+2^2=7$, $1+3+3^2=13$, $1+5+5^2=31$, $1+7+7^2=57$, $1+11+11^2=133$, c) $1+2+2^2+2^3=15$, $1+3+3^2+3^3=40$, $1+5+5^2+5^3=156$, d) $1+2+2^2+2^3+2^4=31$, $1+3+3^2+3^3+3^4=121$, e) $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5=63$, f) $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=127$.

Como $156=2^2\cdot 3\cdot 13$ tenemos las siguientes posibilidades:

$156=3\cdot 4\cdot 13=(1+2)(1+3)(1+3+3^2)$, que no sirve pues se está repitiendo el 3.

$156=3\cdot 52$, $156=4\cdot 39$, $156=6\cdot 26$, que no sirven pues 52, 39 y 26 no están en la lista.

$156=12\cdot 13=(1+11)(1+3+3^2)$, que nos da $n=11\cdot 3^2=99$.

$156=1+5+5^2+5^3$, que nos da $n=5^3=125$.

Por lo tanto hay dos soluciones, 99 y 125.

Capítulo 3

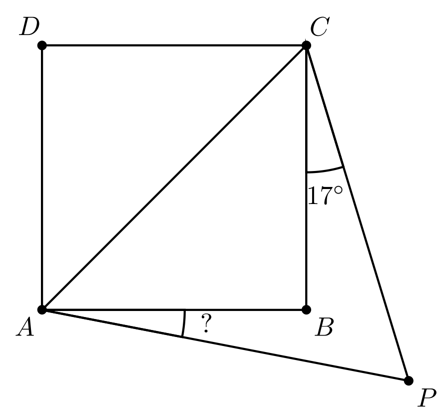
Prueba Final

La prueba final de la OJM 2011 se realizó en la Universidad Simón Bolívar, el sábado 11 de junio. La prueba constó de cuatro problemas, cada uno de ellos valorado en una escala de 1 a 7. Los participantes dispusieron de tres horas y media para resolverlos.

3.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. Sea n un entero positivo y sea k el entero que resulta al borrar la cifra de las unidades de n (por ejemplo, si n fuese 7492 entonces k sería 749). Si $n - k = 2011$, ¿cuál es el valor de n?

Problema 2. En la figura de la derecha $ABCD$ es un cuadrado y P es un punto exterior tal que $AP = AC$ y $\angle BCP = 17°$. Calcule la medida del ángulo $\angle BAP$.



Problema 3. Se forma una larga lista de dígitos escribiendo los enteros del 1 al 2011 uno a continuación del otro:

$$12345678910111213\ldots200920102011.$$

¿Cuántas veces aparece la secuencia 12 en esa lista?

Problema 4. En cierto pueblo, $\frac{2}{3}$ del total de hombres están casados con $\frac{3}{5}$ del total de mujeres. Si nunca se casan con forasteros, ¿cuál es la proporción de personas solteras respecto a la población total del pueblo?

Nota: Lo que se pide es $\dfrac{\text{número de personas solteras}}{\text{número total de personas}}$.

3.1.1. Soluciones

1. Es claro que n debe ser un número de 4 cifras $abcd$ y que a debe ser 2 (si $a = 3$ entonces $abcd - abc \geq 3000 - 399 > 2011$, y si $a > 3$ entonces $abcd - abc \geq 4000 - 999 > 2011$). Ahora debe cumplirse $2bcd - 2bc = 2011$, o bien $bcd - 2bc = 11$, lo que se logra con $b = 2$, $c = b + 1 = 3$ y $d = c + 1 = 4$.

1. (Solución alternativa). Si la cifra de las unidades de n es x entonces $n = 10k + x$ y $n - k = 9k + x = 2011$. Como $2011 = 9 \cdot 223 + 4$, resulta $x = 4$ y $k = 223$. Por lo tanto $n = 10 \cdot 223 + 4 = 2234$.

2. $\angle ACP = \angle ACB + \angle BCP = 45° + 17° = 62°$. Como ACP es isósceles, $\angle APC = \angle ACP = 62°$ y $\angle CAP = 180° - 2 \cdot 62° = 56°$. Entonces $\angle BAP = \angle CAP - \angle CAB = 56° - 45° = 11°$.

3. La secuencia 12 puede aparecer como los dos últimos dígitos de los enteros 12, 112, 212,..., 912, 1012, 1112,..., 1912 (20 veces). También como cifras de las centenas y las decenas de los enteros 120, 121, ..., 129 (10 veces) y de 1120, 1121, ..., 1129 (10 veces). También como cifra de las unidades de 1000 y cifra de las centenas en los enteros 1200, 1201,..., 1299 (100 veces).

Además puede aparecer como última cifra de un número y primera del siguiente, en los casos 1–2, 21–22, 201–202, 211–212, 221–222, 231–232, 241–242, 251–252, 261–262, 271–272, 281–282, 291–292 y 2001–2002 (13 veces). En total la secuencia 12 aparece $10 + 10 + 10 + 10 + 100 + 13 = 153$ veces.

4. Sean h el total de hombres, m el total de mujeres y $n = h + m$ el total de habitantes del pueblo. Las personas solteras son $s = (1/3)h + (2/5)m$. Pero el número de hombres casados debe ser igual al de mujeres casadas, es decir $(2/3)h = (3/5)m$, de donde $h = (9/10)m$. Por lo tanto la proporción pedida es

$$\frac{s}{n} = \frac{\frac{1}{3}h + \frac{2}{5}m}{h + m} == \frac{\frac{3}{10}m + \frac{2}{5}m}{\frac{9}{10}m + m} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{19}{10}} = \frac{7}{19}.$$

3.2. Prueba de Segundo Año

Los problemas 2, 3 y 4 de segundo año son los mismos que los de primer año (ver pág. 37). Las pruebas sólo se diferencian en el problema 1.

Problema 1. En la suma que se ve a la derecha las letras A, B y C representan dígitos diferentes no nulos. ¿Cuál es el valor de cada una de ellas?

$$\begin{array}{rr} & ABC \\ + & ABC \\ \hline & BBA \end{array}$$

3.2.1. Soluciones

Las soluciones de los problemas 2, 3 y 3 se encuentran a partir de la página 38.

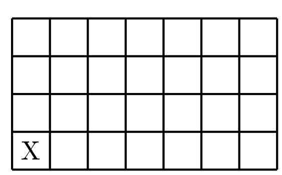
1. Al sumar la columna de la derecha nos debemos llevar una, de lo contrario el único valor posible para B sería 0. Si llevamos una entonces $B = 9$ y $A + A + 1 = B = 9$, de donde $A = 4$. Finalmente de $C + C = 14$ se sigue $C = 7$.

3.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Halle todos los números formados por los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, en algún orden, tales que el número formado por los dos primeros dígitos (de izquierda a derecha) es divisible entre 2, el formado por el segundo y el tercer dígitos es divisible entre 3, y así sucesivamente hasta que el formado por el octavo y el noveno dígitos es divisible entre 9.

Problema 2. El *promedio de bateo* de un beisbolista se calcula como el número de *hits* obtenidos dividido entre el número de turnos al bate y multiplicado por 1000. Por ejemplo, si en 10 turnos bateó 3 *hits*, el promedio de bateo es 300. Supongamos que en cierto momento de la temporada el promedio de un beisbolista es menor que 250 pero que más adelante es mayor que 250, ¿puede afirmarse que en algún momento fue *exactamente* 250? Y a la inversa, si en cierto momento el promedio es mayor que 250 y más adelante es menor que 250, ¿fue en algún momento *exactamente* 250?

Problema 3. Una barra de chocolate tiene forma de cuadrícula de 4×7, con un cuadrito en una esquina marcado con X. Andrés y Berta juegan de la siguiente manera: cada uno en su turno, comenzando por Andrés, debe partir la barra en dos por una de las líneas rectas de la cuadrícula, comerse el trozo que no contiene a la X y pasarle lo que queda al otro jugador.



El que no pueda partir la barra (lo que ocurrirá cuando reciba solamente un cuadrito) pierde el juego. Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, y explique cuál es.

Nota: una *estrategia ganadora* es un método de juego que asegura la victoria del que lo aplica, juegue lo que juegue su adversario.

Problema 4. Sean $ABCD$ un rectángulo, E el punto medio del lado CD, F y G puntos en el lado AB tales que $AF = FG = GB$, H y K los puntos de intersección de la diagonal AC con EF y EG, respectivamente. (a) Calcule $\frac{HC}{AH}$ y $\frac{AK}{KC}$.
(b) Calcule $\frac{HK}{AC}$. (c) Calcule $\frac{\text{área del triángulo } EHK}{\text{área del rectángulo } ABCD}$.

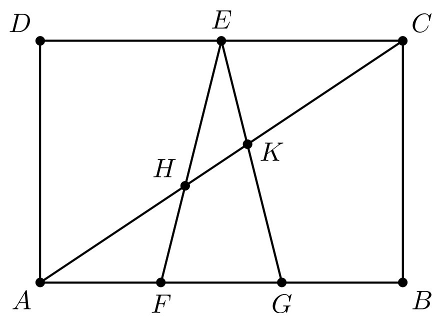
3.3.1. Soluciones

1. Sea $abcdefghi$ el número. Para que de sea divisible entre 5, el quinto dígito e sólo puede ser 5. Ahora para que $5f$ sea divisible entre 6, f debe ser 4; para que $4g$ sea divisible entre 7, g debe ser 9; para que $9h$ sea divisible entre 8, h debe ser 6 y para que $6i$ sea divisible entre 9, i debe ser 3. Para los primeros cuatro dígitos quedan 1, 2, 7 y 8. Para que cd sea divisible entre 4 debe ser $d = 2$, ya que ni 18 ni 78 son divisibles entre 4. Entonces b debe ser el par que nos queda, es decir 8. Ahora quedan dos posibilidades para acomodar el 1 y el 7, que dan lugar a los números 187254963 y 781254963. Ambos cumplen las condiciones y son las únicas soluciones.

2. Si en su primer turno no hace hit su promedio es 0, y si en el segundo turno batea un hit su promedio sube a 500, por lo tanto puede pasar de ser menor de 250 a ser mayor de 250 sin tomar el valor 250. A la inversa la situación es diferente. Supongamos que el promedio pasa de ser mayor a ser menor que 250. Si en el último turno en que era mayor de 250 el jugador había bateado h hits en n turnos, entonces $1000h/n > 250$, o $4h > n$. En el turno siguiente no puede haber bateado hit pues en ese caso su promedio no disminuiría, ya que pasaría a ser $1000(h+1)/(n+1)$ y $(h+1)/(n+1) - h/n = (n-h)/(n(n+1)) \geq 0$. Pero si no batea hit su promedio pasa a ser $1000h/(n+1) \leq 250$. Es decir que $4h \leq n+1$. Entonces $n < 4h \leq n+1$ y como h y n son enteros debe ser $4h = n+1$ y el promedio llega a ser exactamente 250.

3. Andrés tiene una estrategia ganadora, que consiste en partir la barra dejándole siempre un cuadrado a Berta. En su primera jugada le dejará un cuadrado de 4×4. En lo sucesivo, si Berta recibe un cuadrado de $k \times k$ con $k > 1$, deberá partirlo dejando un rectángulo de $k \times h$, con $h < k$, el cual Andrés partirá dejando un cuadrado de $h \times h$. Así eventualmente Berta recibirá un cuadrado de 1×1 y perderá. **3.** (Solución alternativa).

4.



(a) Como los triángulos HAF y HCE son semejantes, se tiene

$$\frac{HC}{AH} = \frac{EC}{AF} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{3}AB} = \frac{3}{2}.$$

Análogamente, como los triángulos KAG y KCE son semejantes, se tiene

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AG}{EC} = \frac{\frac{2}{3}AB}{\frac{1}{2}AB} = \frac{4}{3}.$$

(b) De (a) se sigue que $\dfrac{AC}{AH} = \dfrac{AH+HC}{AH} = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Análogamente $\dfrac{AC}{KC} = \dfrac{AK+KC}{KC} = 1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3}$.

Por lo tanto $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{KC}{AC} = \dfrac{3}{7}$, de donde

$$\frac{HK}{AC} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35}.$$

c)

$$[EHK] = \frac{6}{35}[EAC] = \frac{6}{35}\cdot\frac{1}{2}[DAC] = \frac{6}{35}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[ABCD],$$

es decir

$$\frac{[EHK]}{[ABCD]} = \frac{3}{70}.$$

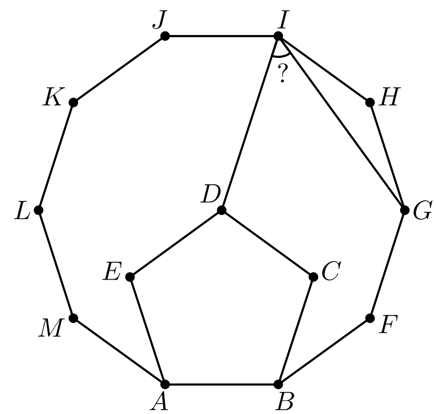
3.4. Prueba de Cuarto Año

El problema 1 de cuarto año es igual al de tercer año (ver pág. 39).

Problema 2. En la figura de la derecha $ABCDE$ es un pentágono regular y $ABFGHIJKLM$ es un decágono regular.

(a) Pruebe que D es el centro del decágono,

(b) Calcule la medida del ángulo $\angle DIG$.



Problema 3. Cada entero positivo (1, 2, 3...) se pinta de amarillo, azul o rojo, de modo que haya al menos un número de cada color. ¿Es posible hacer esto de manera que, para cada par de números de diferente color, su suma sea del color diferente al de ambos sumandos?

Problema 4. Cada uno de los miembros de la familia de Luis tomó café con leche en el desayuno. Todos tomaron igual cantidad, aunque la proporción de café y leche variaba en cada taza. Si Luis tomó un cuarto del total de la leche y un sexto del total del café,

(a) ¿Cuántos miembros hay en la familia de Luis?

(b) ¿En promedio, cuál era el porcentaje de leche en el café con leche?

3.4.1. Soluciones

La solución del problema 1 se encuentran a partir de la página 40.

2. (a) El centro Q del pentágono $ABCDE$ es el centro de la circunferencia circunscripta al pentágono, por tanto $\angle AQD = 360°/5 = 72°$. Como un ángulo inscripto es la mitad del central, se tiene $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AQD = 72°/2 = 36°$ (esto se puede probar de muchas maneras, algo más largas que la anterior, por ejemplo: como AED es isósceles y $\angle AED = 108°$ resulta $\angle EDA = \angle EAD = (180° - 108°)/2 = 36°$; análogamente $\angle BDC = 36°$ y entonces $\angle ADB = \angle EDC - \angle EDA - \angle BDC = 108° - 36° - 36° = 36°$).

Ahora bien, $DA = DB$ (esto se sigue de la simetría del pentágono regular, o del hecho de que los triángulos DAE y DBC son obviamente congruentes). Por lo tanto D está en la mediatriz de AB, igual que el centro O del decágono. Además $\angle AOB = 360°/10 = 36° = \angle ADB$, por lo tanto $O = D$.

(b)Como GDI es isósceles y $\angle GDI = \angle GDH + \angle HDI = 36° + 36° = 72°$, resulta $\angle DIG = \angle DGI = (180° - 72°)/2 = 54°$.

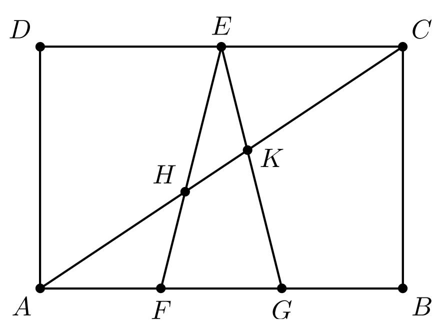
3. No es posible. Supongamos por absurdo que fuera posible. Entonces, dada una coloración que cumpla la condición, consideremos dos casos:

(1) Que 1 y 2 sean de distinto color, digamos 1 amarillo y 2 azul. Entonces $3 = 1+2$ debería ser rojo y $4 = 1 + 3$ debería ser azul. Pero ahora 5, por ser $1 + 4$ debería ser rojo, mientras que por ser $2 + 3$ debería ser amarillo, absurdo.

(2) Que 1 y 2 sean del mismo color, digamos amarillo. Sea n un entero de otro color, digamos azul. Entonces tanto $n+1$ como $n+2$ deberían ser rojos. Pero por ser $n + 2 = (n + 1) + 1$ (rojo más amarillo) debería ser azul, absurdo.

3. (Solución alternativa). No es posible. Supongamos por absurdo que fuese posible y sea n un entero de color diferente al del 1. Digamos que 1 es de color A y que n es de color B. Entonces $n + 1$ debe ser del tercer color, digamos C. Ahora $n+2 = (n+1)+1$ debe ser de color B, $n+3 = (n+2)+1$ debe ser C, $n+4 = (n+3)+1$ debe ser B y así sucesivamente, es decir que a partir de n los colores B y C se alternan. Pero entonces $2n + 1$ sería de color B o C, mientras que, por ser $2n + 1 = n + (n + 1)$ (suma de un B y un C) debería ser A.

4.



(a) Como los triángulos HAF y HCE son semejantes, se tiene

$$\frac{HC}{AH} = \frac{EC}{AF} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{3}AB} = \frac{3}{2}.$$

Análogamente, como los triángulos KAG y KCE son semejantes, se tiene

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AG}{EC} = \frac{\frac{2}{3}AB}{\frac{1}{2}AB} = \frac{4}{3}.$$

(b) De (a) se sigue que $\dfrac{AC}{AH} = \dfrac{AH + HC}{AH} = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Análogamente $\dfrac{AC}{KC} = \dfrac{AK + KC}{KC} = 1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3}$.

Por lo tanto $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{KC}{AC} = \dfrac{3}{7}$, de donde

$$\frac{HK}{AC} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35}.$$

c)

$$[EHK] = \frac{6}{35}[EAC] = \frac{6}{35} \cdot \frac{1}{2}[DAC] = \frac{6}{35} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}[ABCD],$$

es decir

$$\frac{[EHK]}{[ABCD]} = \frac{3}{70}.$$

3.5. Prueba de Quinto Año

Los problemas 2, 3 y 4 de quinto año son los mismos que los de cuarto año (ver pág. 42). Las pruebas sólo se diferencian en el problema 1.

Problema 1. Halle todos los primos $p \geq 2$ tales que $11p - 8$ es un cubo perfecto.

3.5.1. Soluciones

Las soluciones de los problemas 2, 3 y 4 se encuentran a partir de la página 42.

1. Si $11p - 8 = x^3$ entonces $11p = x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$. Como $p = 2$ no es solución, buscamos $p \geq 3$ con lo cual $x^3 \geq 11 \cdot 3 - 8 = 25$ y $x \geq 3$. Por lo tanto $x^2 - 2x + 4 = x(x - 2) + 4 \geq x + 4 > x + 2$ y hay que considerar dos casos:

a) $x + 2 = p$ y $x^2 - 2x + 4 = 11$. Esto no es posible pues $x^2 - 2x - 7 = 0$ no tiene raíces enteras, o bien porque $5 \leq x + 2 = p < 11$ sólo deja para p dos posibilidades, 5 y 7, y ni $11 \cdot 5 - 8 = 47$ ni $11 \cdot 7 - 8 = 69$ son cubos perfectos.

b) $x + 2 = 11$ y $x^2 - 2x + 4 = p$. En este caso $x = 9$ y como $9^2 - 2 \cdot 9 + 4 = 67$ es primo, $p = 67$ es la única solución.

Capítulo 4

Olimpiada de Mayo

La Olimpiada de Mayo es una competencia matemática internacional coordinada por la Olimpiada Matemática Argentina (OMA). Consiste en una prueba escrita de 3 horas de duración y consta de dos niveles: el primer nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 13 años hasta el 31 de diciembre del año anterior a la prueba; el segundo nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 15 años hasta el 31 de Diciembre del año anterior a la prueba. Cada país participante tiene un comité que califica las pruebas de acuerdo a un patrón común de corrección. Una vez calificadas se eligen las 10 mejores de cada nivel y se envían los resultados a Argentina, junto a las pruebas que ocuparon los lugares 1º, 3º y 7º en cada nivel. De esta manera el país organizador tiene una muestra que le permite validar la corrección hecha en cada país y ratificar las mismas, para luego proceder a la premiación.

4.1. Problemas del Primer Nivel

Problema 1. Las 4 palabras codificadas

$$\diamond * \otimes \qquad \oplus \# \bullet \qquad * \diamond \bullet \qquad \otimes \star \oplus$$

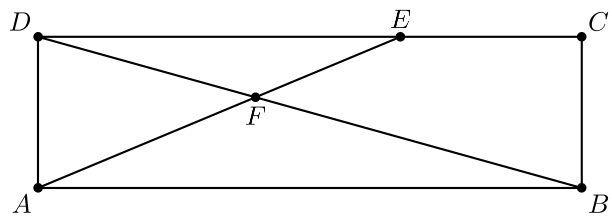
son en algún orden

$$\text{AMO} \qquad \text{SUR} \qquad \text{REO} \qquad \text{MAS.}$$

Descifrar $\otimes \star \diamond * \oplus \# \diamond \bullet \otimes$.

Problema 2. Utilizando una sola vez cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 se escriben el cuadrado y el cubo de un número entero positivo. Determinar cuánto puede valer dicho número.

Problema 3. En el rectángulo $ABCD$, $BC = 5$, $EC = \frac{1}{3}CD$ y F es el punto donde se cortan AE y BD. El triángulo DFE tiene área 12 y el triángulo ABF tiene área 27. Hallar el área del cuadrilátero $BCEF$.



Problema 4. Utilizando varios cubitos blancos de arista 1 Guille arma un cubo grande. Luego elige 4 caras del cubo grande y las pinta de rojo. Finalmente desarma el cubo grande y observa que los cubitos con al menos una cara pintada de rojo son 431. Hallar la cantidad de cubitos que utilizó para armar el cubo grande. Analizar todas las posibilidades.

Problema 5. Consideramos todos los números enteros positivos de 14 dígitos, divisibles por 18, cuyos dígitos son exclusivamente 1 y 2, pero no hay dígitos 2 consecutivos. ¿Cuántos de estos números hay?

4.2. Soluciones del Primer Nivel

1. Hay sólo dos palabras que terminan con la misma letra, AMO y REO, y también dos que terminan con $\bullet$. Entonces $\bullet = \text{O}$.

Hay coincidencia en primera y segunda letra, excepto el orden, en $\diamond$ y $*$, y en AMO y MAS, de modo que $\diamond$ y $*$ son, en algún orden, A y M. Como $\bullet = \text{O}$, AMO$= * \diamond \bullet$, de donde A$=*$ y M$=\diamond$.

Hay coincidencia de primera y tercera letra en $\otimes$ y $\oplus$, y en SUR y MAS, y en SUR y REO. Como O$=\bullet$, entonces REO$=\oplus\#\bullet$ con $\oplus = \text{R}$, $\# = \text{E}$ y MAS$=\diamond * \otimes$, o sea que $\otimes = \text{S}$.

Finalmente, $\star = \text{U}$, pues SUR$=\otimes \star \oplus$. Entonces A$=*$, E$=\#$, M$=\diamond$, O$=\bullet$, R$=\oplus$, S$=\otimes$, U$=\star$ y la palabra es SUMAREMOS.

2. Sean los números escritos $A = n^2$ y $B = n^3$, donde n es un entero positivo. Entonces $n > 20$, pues en caso contrario A y B en conjunto tienen menos de 8 dígitos ($202 = 400$, $203 = 8000$, en total 7 dígitos). También $n < 32$, pues $322 = 1024$ y $323 = 32768$ tienen en total 9 dígitos. El dígito de las unidades de n no puede ser 1, 5 ó 6, pues $A = n^2$ y $B = n^3$ terminarían los dos con el mismo dígito. Además el último dígito de n no es 3 ó 7, pues en caso contrario $A = n^2$ terminaría en 9. Por lo tanto, el último dígito de n es 2, 4 u 8, es decir, $n = 22$, 24 ó 28. Si $n = 22$, entonces $A = 484$ y $B = 10648$, y hay dígitos repetidos. Si $n = 24$, entonces $A = 576$ y $B = 13824$. Si $n = 28$, entonces $A = 784$ y $B = 21952$, pero no se puede usar el dígito 9. En conclusión, la única posibilidad es $n = 24$.

3. Llamemos $a = EC$ y x el área del triángulo DAF. Entonces

$$\text{área}(DAE) = \text{área}(DAF) + \text{área}(DFE) = x \div 12 = \frac{DE \cdot DA}{2} = \frac{2a \cdot 5}{2},$$

$$\text{área}(DAB) = \text{área}(DAF) + \text{área}(ABF) = x \div 27 = \frac{DA \cdot AB}{2} = \frac{3a \cdot 5}{2}.$$

Luego, $x + 12 = 5a$, $x + 27 = \dfrac{15 \cdot a}{2}$, por lo que $x = 18$ y $a = 6$. Es decir que área$(DAF) = 18$ y $AB = DC = 3a = 18$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{área}(BCEF) &= \text{área}(ABCD) - \text{área}(DFE) - \text{área}(DAF) - \text{área}(ABF) \\ &= 18 \cdot 5 - 12 - 18 - 27 = 33. \end{aligned}$$

Solución alternativa: Si h y H son las alturas de los triángulos DFE y AFB desde el vértice F resulta que $h + H = 5$. Luego

área$(DFE) = \dfrac{2a \cdot h}{2} = 12$, de donde $ah = 12$,

área$(AFB) = \dfrac{3a \cdot H}{2} = 27$, de donde $aH = 18$, y tenemos $\frac{ah}{aH} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Como $h + H = 5$ resulta $h = 2, H = 3$ y $a = 6$. Entonces $AB = 3 \cdot 6 = 18$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{área}(BCEF) &= \text{área}(ABCD) - \text{área}(AED) - \text{área}(AFB) \\ &= 5 \cdot 18 - \frac{5 \cdot 12}{2} - \frac{18 \cdot 3}{2} = 33. \end{aligned}$$

Nota. Si se resuelve usando semejanza, el problema tiene un dato que sobra.

4. Sea a la cantidad de cubitos de cada arista del cubo grande. Tenemos dos casos.

Si deja sin pintar dos caras opuestas y pinta las otras cuatro caras habrá pintado $P = 4a(a-1)$ cubitos. Como este número es par, no hay solución.

Si deja sin pintar dos caras con una arista común y pinta las otras 4 caras habrá pintado $P = a^2 + 2a(a-1) + (a-1)(a-2) = 4a^2 - 5a + 2$. Si $P = 431$, entonces $4a^2 - 5a + 2 = 431$, o sea, $4a^2 - 5a - 429 = 0$, y tenemos $a = 11$.

Si $a = 11$, entonces $a^3 = 11^3 = 1331$ es la cantidad de cubitos usados.

5. Si N es uno de estos números, entonces N es divisible por 9, de modo que si tiene x dígitos 2 y $14-x$ dígitos 1, la suma de los dígitos es $2 \cdot x + 1(14-x) = 14+x$

que debe ser divisible por 9. En consecuencia x tiene resto 4 en la división por 9, es decir, $x = 4, 13, \ldots$ Pero es imposible que sea $x \geq 13$ pues en tal caso el número N de 14 dígitos tendría dígitos 2 consecutivos. Luego $x = 4$, o sea que N tiene 4 dígitos 2 y 10 dígitos 1.

Además, N es par, entonces su último dígito es 2. El siguiente dígito, hacia la izquierda, es 1, pues no hay 2 consecutivos. Luego debemos hallar cuántos son los números de 12 dígitos que usan 9 dígitos 1 y 3 dígitos 2, en los que no hay dígitos 2 consecutivos.

La cantidad total de números de 12 dígitos con 9 dígitos 1 y 3 dígitos 2 es igual al número de formas de elegir 3 posiciones para los dígitos 2 entre 12 posibles, es decir, $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$. De éstas, primero restamos los 10 casos en los que los tres 2 ocupan posiciones consecutivas. Queda por contar las opciones con exactamente dos 2 consecutivos, y también restarlos de 220. Si el par de 2 consecutivos está en las posiciones 1, 2 ó 11, 12, hay 9 posibilidades para el tercer 2. Si tal par está en cualquier otra posición, de las cuales hay 9, el tercer 2 se puede elegir de 8 maneras. De modo que hay $2 \cdot 9 + 9 \cdot 8 = 90$ números con exactamente dos 2 consecutivos.

Por lo tanto, el número que buscamos es $220 - 10 - 90 = 120$.

4.3. Problemas del Segundo Nivel

Problema 1. Hallar un número entero positivo x tal que la suma de los dígitos de x sea mayor que 2011 veces la suma de los dígitos del número $3x$(3 por x).

Problema 2. Decimos que un número de cuatro dígitos $abcd(a \neq 0)$ es *porá* si se cumplen las siguientes condiciones:

$a \geq b$;

$ab - cd = cd - ba$.

Por ejemplo, 2011 es porá porque $20 - 11 = 11 - 02$.

Hallar todos los números porá.

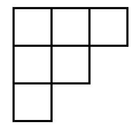
Problema 3. En un triángulo rectángulo ABC tal que $AB = AC, M$ es el punto medio de BC. Sea P un punto de la mediatriz de AC que pertenece al semiplano determinado por BC que no contiene a A. Las rectas CP y AM se cortan en Q. Calcular el ángulo que forman AP y BQ.

Problema 4. Dados n puntos en una circunferencia se escribe al lado de uno de ellos un 1 y al lado de cada uno de los otros un 0. La operación permitida consiste en elegir un punto que tenga un 1 y cambiar el número de ese punto y también los números de sus dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha (donde hay 1 se escribe 0 y donde hay 0 se escribe 1).

a) Si $n = 101$, mostrar que se puede lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que cada uno de los n puntos tenga escrito un 0.

b) Si $n = 102$, demostrar que es imposible lograr todos 0.

Problema 5. Determinar para qué números naturales n es posible cubrir completamente un tablero de $n \times n$, dividido en casillas de 1×1, con piezas como la de la figura, sin huecos ni superposiciones y sin salirse del tablero. Cada una de las piezas cubre exactamente seis casillas.



Nota: Las piezas se pueden girar.

4.4. Soluciones del Segundo Nivel

1. Si $x = \dfrac{10^n - 1}{3} + 1 = \underbrace{33\ldots3}_{n-1 \text{ veces}}4$,

entonces

$3x = 10^n - 1 + 3 = 10^n + 2 = 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ veces}}0.$

La suma de los dígitos de x es $3n + 1$, y la suma de los dígitos de $3x$ es 3, cualquiera sea el valor de n. Para resolver nuestro problema, basta tomar $n = 2011$.

Nota. La suma de las cifras de $3x$ debe ser pequeña y múltiplo de 3. Otras posibilidades son

$3x = 1\underbrace{00\ldots0}_{n}11 \qquad x = \underbrace{33\ldots3}_{n+1}7$

$3x = 2\underbrace{00\ldots0}_{n}1 \qquad x = \underbrace{66\ldots6}_{n}7$

2. Partimos de la segunda condición, $ab - cd = cd - ba$, luego $2cd = ab + ba$, esto es, $2cd = 10a + b + 10b + a, 2cdd = 11(a + b)$, donde a, b son dígitos.

Por lo tanto tenemos que $11|2cd$. Dado que $mcd(2, 11) = 1, 11|cd$.

Para cd hay 10 posibilidades, $cd = 00, 11, 22, \ldots, 99$.

Si $cd = 00 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = 0$.

Si $cd = 11 \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow ab = 11$ ó 20.

Si $cd = 22 \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow ab = 40, 31$ ó 22.

Si $cd = 33 \Rightarrow a + b = 6 \Rightarrow ab = 60, 51, 42$ ó 33.

Si $cd = 44 \Rightarrow a + b = 8 \Rightarrow ab = 80, 71, 62, 53$ ó 44.

Si $cd = 55 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow ab = 91, 82, 73, 64$ ó 55.

Si $cd = 66 \Rightarrow a + b = 12 \Rightarrow ab = 93, 84, 75$ ó 66.

Si $cd = 77 \Rightarrow a + b = 14 \Rightarrow ab = 95, 86$ ó 77.

Si $cd = 88 \Rightarrow a + b = 16 \Rightarrow ab = 97$ u 88.

Si $cd = 99 \Rightarrow a + b = 18 \Rightarrow ab = 99$.

Conjunto solución: $\{1111, 2011, 4022, 3122, 2222, 6033, 3333, 5133, 4233, 8044, 7144, 6244, 5344, 4444, 9155, 8255, 7355, 6455, 5555, 9366, 8466, 7566, 6666, 9577, 8677, 7777, 9788, 8888, 9999\}$.

3. Como M es el punto medio de la hipotenusa del triángulo isósceles ABC, se tiene que AM es la mediatriz de BC. Dado que Q pertenece a $AM, BQ = CQ$, de donde el triángulo BQC es isósceles con $\angle QBC = \angle QCB = \beta$.

Los triángulos APM y CPM son iguales ($AP = CP$ y $AM = CM$ pues P y M pertenecen a la mediatriz de AC y PM es común), luego $\angle PAM = \angle PCM = \angle QCB = \beta$.

Además, en el triángulo rectángulo $BQM, \angle BQM = 90° - \beta$.

Sea R el punto de intersección de las rectas BQ y AP (*). En el triángulo ARQ tenemos

$\angle ARQ = 180° - \angle RAQ - \angle RQA = 180° - \beta - (90° - \beta) = 90°$.

Otra solución desde (*): Si S es el punto de intersección de BC y AP, los triángulos BSR y ASM son semejantes ($\angle RBS = \angle MAS = \beta$ y los ángulos en S son opuestos por el vértice) de donde

$\angle BRS = \angle BRA = \angle AMS = 90°$.

Otra solución desde (*): El cuadrilátero $ABRM$ es cíclico pues $\angle RBM = \angle RAM = \beta$, de donde $\angle BRA = \angle BMA = 90°$.

4. a) La primera operación es obligada, $0100\ldots \to 10100\ldots$ A partir de entonces, elegimos el último 1 y queda $0111\ldots 10100\ldots 0 \to 0111\ldots 11010\ldots 0$, donde se çorrió" a la derecha el último 1 y disminuyó en uno la cantidad final de ceros. Repetimos hasta tener todos 1 y un 0: $11\ldots 1011$. Si ahora elegimos B queda $11\ldots 1100$, o sea 99 unos consecutivos y dos ceros. Los 99 unos los ponemos en grupos de 3 consecutivos, 111, y operamos sobre el central. Con esto se cumple el objetivo de llevar los 99 unos a ceros.

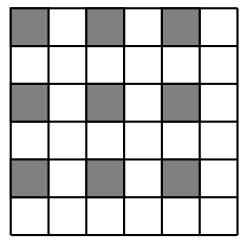
b) Supongamos que es posible obtener todos 0. Sea a_i el número de veces que se hace la operación con centro en A_i. Agrupamos

$(A_1A_2A_3)(A_4A_5A_6)\ldots(A_{100}A_{101}A_{102})$.

$a_1 + a_2 + a_3$ es par, pues es el número de veces que cambia A_2, que inicialmente es 0. Lo mismo ocurre con $a_4 + a_5 + a_6, a_7 + a_8 + a_9$, etc. Entonces $S = 1_a + a_2 + \ldots + a_{102}$ es suma de pares, luego es par. Por otra parte, si agrupamos $(A_{102}A_1A_2)(A_3A_4A_5)\ldots$, todo es como antes, excepto $a_{102} + a_1 + a_2$ que cuenta el número de cambios de A_1, que como es inicialmente 1 debe cambiar un número impar de veces para terminar en 0. Luego $a_{102} + a_1 + a_2 + \ldots + a_{101}$ es impar (un impar más todos pares). Contradicción.

5. El número de casillas del tablero es n^2, el cual tiene que ser múltiplo de 6. Esto implica que n también debe ser múltiplo de 6, digamos $n = 6k$.

Supongamos que k es impar. Pintemos las casillas de lugar impar, en las filas impares (en la figura siguiente se muestra el caso $k = 1$). Luego, cada pieza ubicada sobre el tablero cubre exactamente una o tres casillas pintadas.



Sea p el número de piezas que cubren exactamente una casilla pintada y sea q el número de piezas que cubren exactamente tres casillas pintadas. Si el tablero se pudiera cubrir completamente con las piezas, entonces

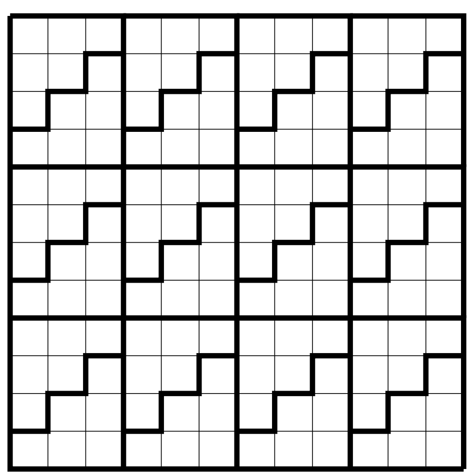
$$p+q=\frac{(6k)^2}{6}=6k^2.$$

Como todas las casillas pintadas también serán cubiertas, entonces

$$p+3q=\left(\frac{6k}{2}\right)^2=9k^2.$$

Resolviendo el sistema resulta $q=\dfrac{3k^2}{2}$ que no es un número entero puesto que k es impar.

Si k es par, resulta que n es múltiplo de 12. Con las piezas se puede cubrir un cuadrado de lado 12 de la siguiente forma:



Luego, para todo n múltiplo de 12, será posible cubrir el tablero con estas piezas.

Capítulo 5

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe tuvo lugar en Colima, México, desde el 21 de mayo hasta el 1º de junio de 2011. En la misma participaron doce países: Colombia, Costa Rica, El Salvador, Guatemala, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela.

Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Evelin Hernao (Colegio Altamira, Maracaibo), Rubmary Rojas (Colegio Divina Pastora, Barquisimeto) y Sergio Villaroel (Colegio San Lázaro, Cumaná). El Jefe de la delegación fué José Heber Nieto y la tutora Carmela Acevedo. Rubmary Rojas obtuvo una medalla de plata y Sergio Villaroel una medalla de bronce.

5.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato, cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero diagonalmente opuesto a éste. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

Problema 2. Sean ABC un triángulo escaleno, D el pie de la altura desde A, E la intersección del lado AC con la bisectriz del $\angle ABC$, y F un punto sobre el lado AB. Sea O el circuncentro del triángulo ABC y sean X, Y, Z los puntos donde se cortan las rectas AD con BE, BE con CF, CF con AD, respectivamente. Si

XYZ es un triángulo equilátero, demuestra que uno de los triángulos OXY, OYZ, OZX es un triángulo equilátero.

Problema 3. *Aplicar un desliz* a un entero $n \geq 2$ significa tomar cualquier primo p que divida a n y reemplazar n por $\frac{n+p^2}{p}$. Se comienza con un entero cualquiera mayor o igual a 5 y se le aplica un desliz. Al número así obtenido se le aplica un desliz, y así sucesivamente se siguen aplicando deslices. Demuestra que, sin importar los deslices aplicados, en algón momento se obtiene el número 5.

Segundo Día

Problema 4. Encuentra todos los enteros positivos p, q y r, con p y q números primos, que satisfacen la igualdad

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{(p+1)(q+1)}=\frac{1}{r}.$$

Problema 5. Los números reales positivos x, y, z son tales que

$$x+\frac{y}{z}=y+\frac{z}{x}=z+\frac{x}{y}=2.$$

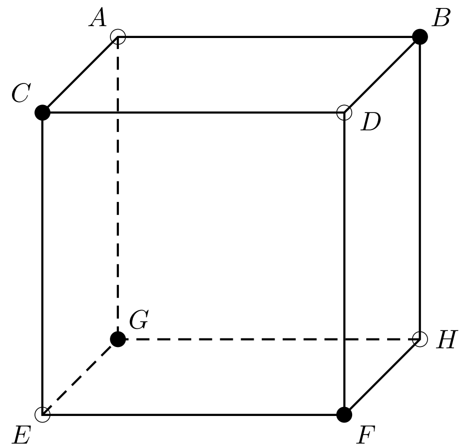
Determine todos los valores posibles de $x+y+z$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Sean Y y Z los pies de las perpendiculares desde B y C sobre FD y DE, respectivamente. Sea F_1 la reflexión de F con respecto a E y sea E_1 la reflexión de E con respecto a F. Si $3EF = FD + DE$, demuestre que $\angle BZF_1 = \angle CYE_1$.

Nota: La *reflexión* de un punto P respecto a un punto Q es el punto P_1 ubicado sobre la recta PQ tal que Q queda entre P y P_1, y $PQ = QP_1$.

5.2. Soluciones

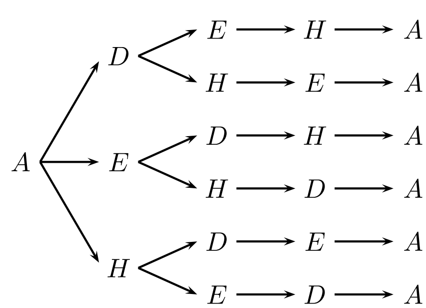
1. (Solución de Rubmary Rojas). A cada vértice del cubo se le asigna una letra de la A a la F, y se pintan de dos colores (digamos blanco y negro) de modo que dos vértices tengan el mismo color si y sólo si pertenecen a una misma cara y son diagonalmente opuestos. Así resulta el siguiente dibujo, donde A, D, E y H son blancos y B, C, F y G son negros. Una mosca sólo puede volar de un vértice a otro del mismo color.



Ahora contaremos las formas de volar las moscas ubicadas en vértices blancos, considerando varios casos.

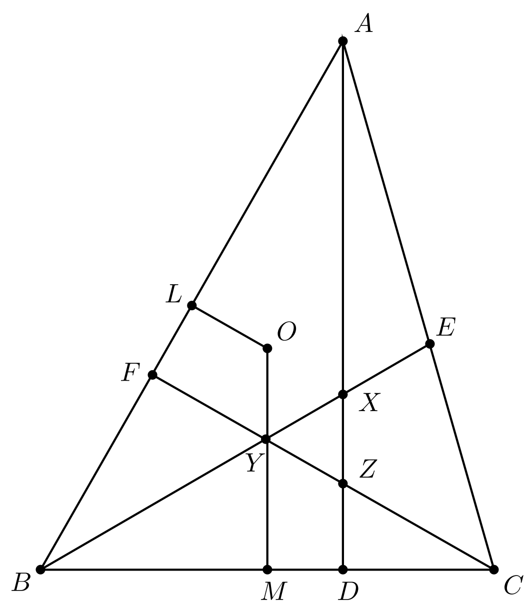
Caso 1: Dos moscas intercambian posiciones. Supongamos que la mosca en A vuela a D y la de D vuela a A. Luego la mosca en E sólo puede volar a H y la de H a D. Entonces, para este caso, basta contar el número de formas en que se puede dividir un conjunto de 4 elementos en dos pares, que son tres, a saber en nuestro caso $\{A, D\}$ y $\{E, H\}$, $\{A, E\}$ y $\{D, H\}$, $\{A, H\}$ y $\{D, E\}$.

Caso 2: Ningún par de moscas intercambian posiciones. La mosca en A puede volar a 3 vértices diferentes: D, H y E. Supongamos sin pérdida de generalidad que vuela al vértice D. Entonces la del vértice D vuela a E o H. Si vuela a E, la de E debe volar al vértice H (ya que si vuela a A la de H no tendría a donde volar) y la de H debe volar al vértice A. Análogamente si la mosca del vértice D vuela a H la de H debe volar a E y la de E a A. Es decir que para cada uno de los tres vértices adonde puede volar la mosca de A hay dos formas de completar el vuelo de las otras tres, para un total de 6 formas que se pueden observar en el siguiente diagrama:



Como para el caso 1 hay 3 formas y para el caso 2 hay 6 formas, las moscas ubicadas en vértices blancos pueden volar de 9 formas distintas. Análogamente las moscas ubicadas en vértices negros pueden volar de 9 formas distintas, y esto nos da un total de $9 \times 9 = 81$ formas diferentes.

2. Por hipótesis el triángulo XYZ es equilátero, de donde $\angle YXZ = 60^\circ$ y por tanto $\angle BXD = \angle YXZ = 60^\circ$. Como D es el pie de la altura por A se sigue que $\angle XDB = 90^\circ$ y por tanto $\angle DBX = 90^\circ - \angle BXD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Como BE es la bisectriz del $\angle ABC$ entonces $\angle XBA = \angle CBY = 30^\circ$. Luego en el triángulo rectángulo ABD se tiene que $\angle ABD = 60^\circ$ y entonces $\angle DAB = 30^\circ$. Sean L y M los puntos medios de AB y BC, respectivamente y O el circuncentro de ABC.



Dado que $\angle XBA = 30^\circ$ y $\angle XAB = \angle DAB = 30^\circ$, se sigue que el triángulo AXB es isósceles con $AX = XB$. Por lo tanto la mediatriz de AB pasa por L y por X. Análogamente por simetría (note que $\angle FYB = 60^\circ$, por lo que CF es también altura), se sigue que el triángulo BYC es isósceles con $BY = YC$ y por lo tanto la mediatriz de BC pasa por M y por Y. Finalmente, MY es paralela a AD y LX es paralela a CF. Por lo tanto $\angle XYO = \angle BYM = 60^\circ$ y $\angle OXY = \angle LXB = 60^\circ$. En consecuencia el triángulo XYO es equilátero.

3. La demostración se hará por inducción fuerte. Denotaremos un desliz con una flecha. El único desliz posible para el 5 es, $5 \to (5 + 5^2)/5 = 6$. Para 6 hay dos posibles deslices iniciales con $p = 2$ ó 3, pero ambos lo llevan a 5, ya que $(6 + 2^2)/2 = (6 + 3^2)/3 = 5$. Luego $5 \to 6 \to 5$. Esto es la base de la inducción. Observemos que en general para un primo p, el único desliz posible es $p \to (p+p^2)/p = p+1$. Supongamos que para los números enteros k con $6 \leq k < n$, hay una serie de deslices tales que en algún momento se cae en 5. Si n es compuesto, digamos $n = pm$ con p primo, y hacemos el desliz $n \to (pm + p^2)/p$, se obtiene $m + p$. Afirmamos que $m + p \leq n - 2$. Si no es así, es porque $m + p \geq mp - 1$, luego $(p-1)(m-1) \leq 2$. Pero como $m \geq 2$ y $p \geq 2$, las únicas soluciones enteras (p, m) que tiene esta desigualdad son $(3, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$. Pero entonces n sería 6, 4 ó 6, respectivamente, lo cual no es posible pues $n > k \geq 6$. Además, $m + p \geq 5$. Así, si $n > 6$ es un entero compuesto, un desliz lo lleva a un número al menos dos unidades menor, pero mayor o igual a 5. Por hipótesis inductiva, a partir de aquí debe llegar a 5.

Finalmente, si n es primo, entonces tras un desliz se transforma en $n + 1$, que no es primo. Por el caso anterior, en el siguiente paso se transforma en un número menor o igual a $(n+1)-2 = n-1$ y mayor o igual a 5. Así, por hipótesis inductiva, a partir de aquí debe llegar a 5.

4. (Solución de Sergio Villaroel).

La igualdad se puede escribir como

$$\frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)} = \frac{1}{r},$$

o bien $r(p+q+1) = (p+1)(q+1)$. Desarrollando y reagrupando queda

$$(r-1)(p+q+1) = pq.$$

Como p y q son primos debe darse alguno de los siguientes casos:

(1) $r - 1 = p$ y $p + q + 1 = q$, (2) $r - 1 = q$ y $p + q + 1 = p$,
(3) $r - 1 = pq$ y $p + q + 1 = 1$, (4) $r - 1 = 1$ y $p + q + 1 = pq$.

Pero $p + q + 1$ es mayor que p, que q y que 1, por lo tanto (1), (2) y (3) no son posibles y sólo puede darse (4). Es decir que $r = 2$ y $p+q+1 = pq$. Pero entonces $(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = 2$, lo que sólo puede ocurrir si $p = 2$ y $q = 3$ o si $p = 3$ y $q = 2$. Por lo tanto las soluciones son: $p = 2$, $q = 3$, $r = 2$ y $p = 3$, $q = 2$, $r = 2$.

5. Las ecuaciones $x + \frac{y}{z} = 2$, $y + \frac{z}{x} = 2$, $z + \frac{x}{y} = 2$ implican que

$$zx + y = 2z, \quad xy + z = 2x, \quad yz + x = 2y$$

y que

$$xyz + y^2 = 2yz, \quad xyz + z^2 = 2zx, \quad xyz + x^2 = 2xy.$$

Por lo que

$$xy + yz + zx = x + y + z \tag{1}$$

y

$$3xyz + (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + zx). \tag{2}$$

También tenemos que

$$1 = \frac{y}{z}\frac{z}{x}\frac{x}{y} = (2-x)(2-y)(2-z) = 8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz. \quad (3)$$

Si hacemos $a = x+y+z$, tenemos por (1) que $xy+yz+zx = a$ y también

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = a^2 - 2a.$$

Ahora de (2) se tiene que $3xyz = -a^2+4a$ y de (3) podemos concluir que

$$1 = 8 - 4a + 2a - \frac{-a^2+4a}{3},$$

lo que lleva a la ecuación $a^2 - 10a + 21 = 0$, cuyas raíces son $a = 3$ y $a = 7$. Por lo que $x+y+z$ es igual a 3 ó 7. Pero si $x+y+z = 7$, como $x + \frac{y}{z} + y + \frac{z}{x} + z + \frac{x}{y} = 6$, se tendría que $\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} = -1$, lo que no es posible para x, y, z positivos. La suma $x+y+z = 3$ se logra con $x = y = z = 1$, que también son soluciones de las ecuaciones, por lo que el único valor posible de $x+y+z$ es 3.

Solución de Esteban Arreaga, líder de Guatemala: Supongamos (sin pérdida de generalidad) que $\max\{x,y,z\} = z$. Entonces

$2 = x + \frac{y}{z} \le x + 1$, de donde $x \ge 1$, y

$2 = y + \frac{z}{x} \ge y + 1$, de donde $y \le 1$. Entonces

$2 = z + \frac{x}{y} \ge z + 1$, de donde $z \le 1$.

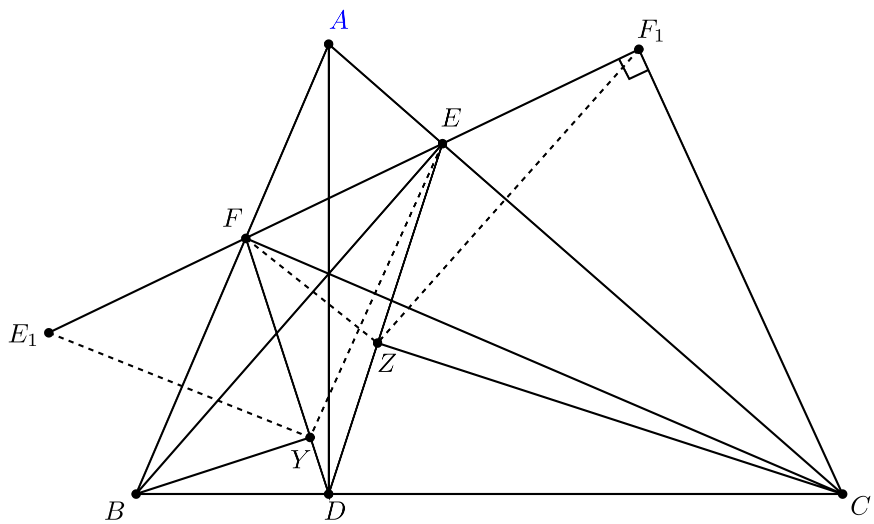
Por lo tanto $1 \le x \le z \le 1$, de donde $x = z = 1$, y de $2 = y + \frac{z}{x}$ se sigue que también $y = 1$. Por tanto $x+y+z = 3$.

6. Es sabido que las alturas del triángulo ABC son bisectrices de su triángulo órtico DEF, y los lados del ABC son bisectrices exteriores del DEF, por lo tanto A, B y C son excentros del DEF. También es conocido que el segmento de tangente desde F hasta el exincírculo de centro C es igual al semiperímetro de DEF, es decir

$$\frac{1}{2}(FE+ED+DF) = \frac{1}{2}(FE+3FE) = 2FE = FF_1,$$

por lo tanto F_1 es el punto de contacto del exincírculo con el lado FE y $FF_1C = 90°$. Además $EZ = EF_1 = EF$, es decir que Z pertenece a la circunferencia de diámetro FF_1 y por lo tanto $\angle FZF_1 = 90°$. Análogamente, $FE = FE_1 = FY$ y $\angle EYE_1 = 90°$.

Ahora bien, como $\angle AEB = \angle ADB = 90°$, el cuadrilátero $AEDB$ es cíclico, por lo que $\angle BAC = 180° - \angle BDE = \angle CDE$. Análogamente $\angle BAC = \angle BDF$.



Por otro lado, como $EF = EZ$ el triángulo EFZ es isósceles y como EB es bisectriz de $\angle FEZ$ resulta que es también altura del triángulo EFZ, por lo que EB es perpendicular a FZ. Pero también EB es perpendicular a AC, luego FZ y AC son paralelas. Luego $\angle ZFB = \angle EAB$ y $\angle BDZ$ son suplementarios y el cuadrilátero $AEDB$ es cíclico, por lo que

$$\angle BZF = \angle BDF = \angle BAC. \qquad ((1))$$

De manera similar se tiene que $DCEY$ es cíclico y entonces

$$\angle CYE = \angle CDE = \angle BAC. \qquad ((2))$$

De (1) y (2) se tiene que $\angle BZF = \angle CYE$, lo que concluye la demostración.

Capítulo 6

Olimpiada Iberoamericana de Matemática

La XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemática tuvo lugar en San José, Costa Rica, del 23 al 30 de septiembre de 2011. En la misma participaron diecinueve países: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Portugal, Puerto Rico, Uruguay y Venezuela.

Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Diego Leonardo Peña Colaiocco (Colegio Los Hipocampitos, Altos Mirandinos), quien obtuvo una medalla de bronce, Rubmary Rojas (Colegio Divina Pastora, Barquisimeto) y Sergio Villarroel (Colegio San Lázaro, Cumaná), quienes ganaron sendas menciones honoríficas. La jefa de la delegación fue Laura Vielma Herrero y la tutora Estefanía Ordaz.

6.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. En la pizarra está escrito el número 2. Ana y Bruno juegan alternadamente, comenzando por Ana, de la siguiente manera: cada uno en su turno sustituye el número escrito por el que se obtiene multiplicándolo por 2, por 3, o sumándole 1. El primero que obtenga un resultado mayor o igual que 2011 gana. Muestre que uno de los dos tiene una estrategia ganadora y descríbala.

Problema 2. Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales existen tres números enteros no nulos x, y, z tales que

$$x + y + z = 0 \text{ y } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}.$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo y X, Y, Z los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita con los lados BC, CA, AB, respectivamente. Sean C_1, C_2, C_3 circunferencias con cuerdas YZ, ZX, XY, respectivamente, de manera que C_1 y C_2 se corten sobre la recta CZ y que C_1 y C_3 se corten sobre la recta BY. Suponga que C_1 corta XY en J y corta a ZX en M; que C_2 corta a YZ en L y corta a XY en I; y que C_3 corta a YZ en K y corta a ZX en N. Demostrar que I, J, K, L, M, N están sobre una misma circunferencia.

Segundo Día

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo y O su circuncentro. Sean P y Q puntos tales que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Demostrar que Q es el ortocentro de ABC.

Problema 5. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Demostrar que existen $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)^2.$$

Problema 6. Sean $k \geq 2$ y n enteros positivos. Se tienen kn cajas en línea recta y en cada caja se ubica una piedra de alguno de k colores diferentes de tal forma que haya n piedras de cada color. Un *intercambio* consiste en intercambiar de caja dos piedras que se encuentren en cajas adyacentes. Encontrar el menor entero positivo m tal que siempre es posible lograr mediante m intercambios que las n piedras de cada color queden en cajas seguidas si:

a) n es par.

b) n es impar y $k = 3$.

6.2. Soluciones

1. Digamos que un número es *ganador* si el jugador que en su turno se lo encuentre tiene una estrategia ganadora. De lo contrario, el número es *perdedor*.

Es claro que todos los números del rango 671–2010 son ganadores, pues el que se encuentre con uno de ellos lo triplica y gana de inmediato.

En cambio 670 es perdedor, pues el que lo encuentre, haga lo que haga, deja un resultado en el rango anterior. 669 es ganador, pues al sumarle 1 se le deja 670 (que es perdedor) al contrario. 668 es perdedor, pues cualquier jugada le deja un número ganador al contrario. 667 es ganador, pues al sumarle 1 se le deja 668, que es perdedor, al contrario. Siguiendo de este modo se ve que en todo el rango 335–670 los impares son ganadores y los pares perdedores.

Este patrón cambia con 334, pues al duplicarlo le queda 668 al contrario, que es perdedor. De este modo 334 es ganador, y lo mismo ocurre con todos los nçumeros del rango 168–334. Pero 167 es perdedor pues $167+1=168$ (ganador), $167\times 2 = 334$ (ganador) y $167\times 3 = 501$ (ganador). 166 es ganador, pues al sumarle 1 se deja 167, que es perdedor.

Continuando de este modo se ve que en todo el rango 56–167 los impares son perdedores y los pares ganadores. En el rango 27–55 los impares son ganadores (triplicando) y los pares son perdedores. En el rango 14–26 son todos ganadores (duplicando). En el rango 4–13 los pares son ganadores (sumando 1) y los impares son perdedores. Finalmente, 3 es ganador (triplicando) y 2 es perdedor.

Por lo tanto quien tiene una estrategia ganadora es Bruno. Su estrategia se puede resumir así: Si Ana le deja 3, Bruno triplica. Si Ana le deja 4, 6, 8, 10 ó 12, Bruno suma 1. Si Ana le deja un número del 14 al 26, Bruno lo duplica. Si Ana le deja un impar del 27 al 55, Bruno lo triplica. Si Ana le deja un par del 56 al 166, Bruno le suma 1. Si Ana le deja un número del 168 al 334, Bruno lo duplica. Si Ana le deja un impar del 335 al 669, Bruno ñe suma 1. Si Ana le deja un número del 671 al 2010, Bruno lo triplica.

2. Si $n=2k$ para algún entero positivo k, podemos tomar $x=y=3k$ y $z=-6k$ y se cumplen las dos condiciones del enunciado.

Si n es impar, demostraremos por contradicción que no existen x,y,z. Tenemos que $n(xy+yz+zx)=xyz$, y como $x+y+z=0$, entonces

$$n^3-n^2(x+y+z)+n(xy+yz+zx)-xyz=n^3,$$

o bien

$$(n-x)(n-y)(n-z)=n^3.$$

Sean $p=n-x$, $q=n-y$, $r=n-z$, entonces $pqr=n^3$ y $p+q+r=3n$. Aquí podemos destacar rápidamente el caso $n=1$, pues es claro que la única es $p=q=r=1$, lo que implica que $x=y=z=0$. A partir de ahora, consideramos $n\geq 3$.

Luego, sea $d=(p,q,r)$ con $p=dp', q=dq'$ y $r=dr'$. Como $d^3|n^3$ entonces $d|n$, y sea $n=dk$. Luego, $p'q'r'=k^3$ y $p'+q'+r'=3k$. Si algún primo t divide a p' y a q', entonces $t|k^3$, lo que implica que $t|k$ y por lo tanto, a $t|r'$, lo que sería una contradicción porque p',q',r' no pueden tener un factor primo en común. Concluimos que p',q' y r' son coprimos dos a dos.

Por otro lado, como $p'q'r'=k^3$, tenemos que $p'=a^3, q'=b^3$ y $r'=c^3$ (donde a,b,c son enteros), además $abc=k$ y $a^3+b^3+c^3=3k=3abc$. Entonces

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0,$$

pero a, b y c son impares pues son divisores de n^3, entonces $a+b+c\neq 0$. Por lo tanto, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$, lo que implica $a=b=c$, es decir $p=q=r=n$ y $x=y=z=0$, lo cual es una contradicción, y hemos terminado.

Solución alternativa:

Sustituyendo $z=-(x+y)$ esn la segunda condición y despejando se obtiene que

$$\frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2}=n.$$

Sea $x=da$ y $y=db$, con $(a,b)=1$. Esto implica que

$$\frac{dab(a+b)}{a^2+ab+b^2}=n.$$

Es claro que $(ab, a^2+ab+b^2)=1$. Además, si p es un primo que divide a $(a+b, a^2+ab+b^2)$ entonces p también divide a $ab=(a+b)^2-(a^2+ab+b^2)$. De lo anterior se deduce fácilmente que p divide a (a,b), lo cual es una contradicción. Por lo tanto, a^2+ab+b^2 divide a d, es decir, $d=(a^2+ab+b^2)k$. Esto implica que

$$ab(a+b)k=n.$$

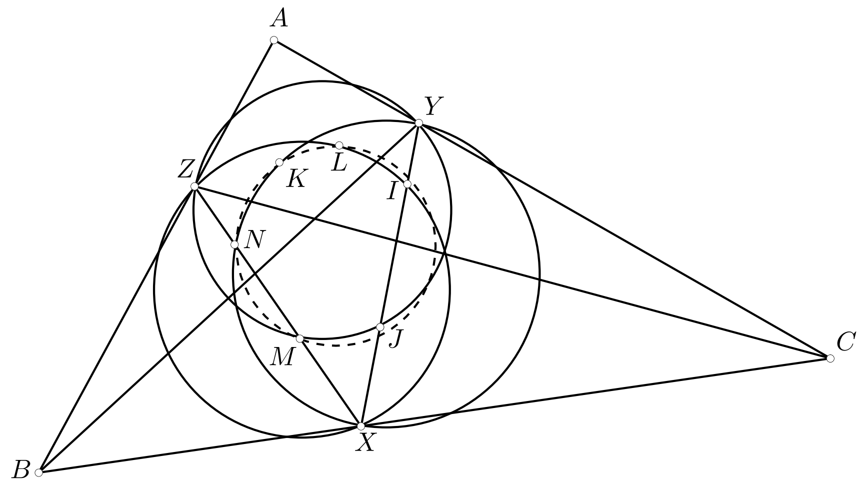
De lo anterior se sigue que n tiene que ser par, pues alguno de los términos $a, b, a+b$ debe ser par. Finalmente, para notar que todo par se puede representar de esta forma tome $a=-2, b=1$. De esta forma, $n=2k$. En efecto, para esta escogencia se tiene que $x=-6k, y=3k, z=3k$ y así

$$\frac{-1}{6k}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k}=\frac{1}{2k}$$

con lo que se concluye la prueba.

3. Es conocido que las rectas AX, BY y CZ son concurrentes, digamos que concurren en H. Por hipótesis CZ es el eje radical de C_1 y C_2 y BY es el eje radical de C_1 y C_3 por lo que AX es el eje radical de C_2 y C_3 y H es el centro radical de las tres circunferencias.

Lema. *Sean ABC y XYZ como el enunciado del problema. Sean I, N puntos sobre XY, ZX de manera que NI es paralela a YZ. SI L y K son los puntos de intersección de la recta YZ con los circuncírculos de los triángulos ZXI y XYN, respectivamente. Entonces el punto de intersección U de LI con KN está sobre la recta AX.*



Prueba del lema. Como las medidas de los ángulos inscritos y los pagulos semiinscritos que abren el mismo arco son iguales, se tiene que $\angle ZXY = \angle AYZ = \angle AZY = \alpha$. Por ser cíclico los cuadriláteros $XILZ$ y $XNKY$, se tiene que $\angle KLI = \angle LKN = \alpha$. Y por ser NI paralela a $YZ, \angle KNI = \angle LIN = \alpha$, luego los triángulos AZY y UNI son semejantes y de lados paralelos, luego son homotéticos y como ZN y YI concurren en X, el centro de homotecia es X, por lo que X, U y A son colineales.

Regresemos a la solución del problema. Veamos que en realidad sí se tiene que NI es paralela a YZ. Sea I' sobre XY de manera que NI' sea paralela a YZ. Consideremos a C_2 el circuncírculo de ZXI' y sea L' la intersección de tal circuncírculo con YZ. Por el lema anterior $L'I'$ y KN se cortan en un punto U que está sobre AX. Además como $L'UK$ y NUI' son isósceles se tiene que $UI' \cdot UL' = UN \cdot UK$. Luego el eje radical de C_2 y C_3 es la recta AX, por lo que C_2 para por el punto de intersección de C_2 y C_3 y entonces $C_2 = C_2$ y entonces $I' = I$ y $N' = N$. Por lo tanto NI es pararela a YZ.

De manera análoga se puede demostrar que KJ es paralela a ZX y LM es paralela a XY.

Como NI es paralela a YZ y como $YZMJ$ es un cuadrilátera cíclico, tenemos que $\angle NIX = \angle ZYJ = \angle JMN$ lo que garantiza que $MNIJ$ están sobre una circunferencia Γ_1. De manera análoga $KLMN$ están sobre una circunferencia Γ_2 y también $IJKL$ está sobre una circunferencia Γ_3. Si algún par de estas circunferencias son iguales entonces las tres serán la misma. Pero si no fuera el caso entonces el eje radical de Γ_1 y Γ_2 es ZX, el eje radical de Γ_2 y Γ_3 es YX, y el eje radical de Γ_3 y Γ_1 es XY, pero estos tres ejes deben concurrir, pero aqui no es el caso. Esta contradicción, lleva a que las tres circunferencias son la misma y entonces los seis puntos son concíclicos.

Solución alternativa

Sea P el otro punto de intersección de C_2 con AB y Q el otro punto de intersección de C_3 con AC. Como AX es el eje radical de C_2 y C_3, entonces se cumple $AZ \cdot AP = AY \cdot AQ$. Por tanto, $AP = AQ$ pues $AZ = AY$. Esto implica que $ZP = YQ$ y al mismo tiempo PQ es paralela a ZY.

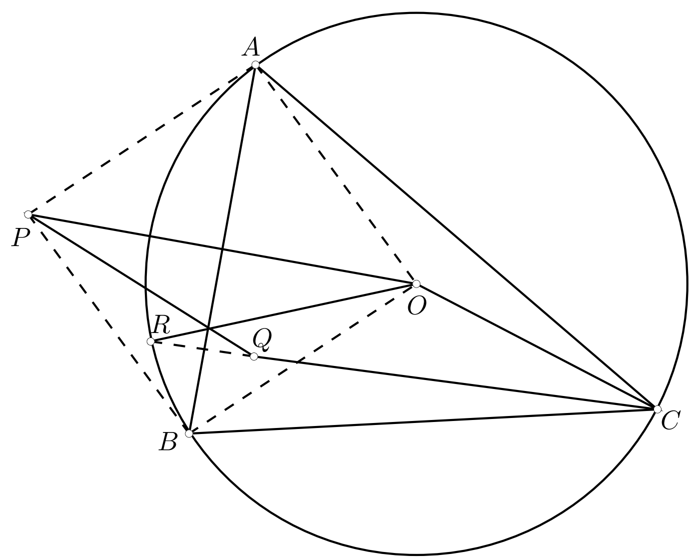
Ahora probaremos que I está sobre PQ. Para eso veremos que PI también es paralela a ZY. (El punto P se encuentra en el rayo ZB dado que I está en la cuerda XY.)

En efecto, $ZPXI$ es cíclico, luego $\angle PIX = \angle PZX$. Además $\angle PZX$ es semiinscrito en el incírculo, $\angle ZYX$ es inscrito, abarcando la misma cuerda. por lo tanto, $\angle PIX = \angle ZYX$ y así PI es pararlela a ZY así que I está sobre PQ.

De manera análoga, se prueba que N está sobre PQ, así que NI es paralela a ZY, como se pretendía probar. Se concluye como en la solución oficial.

4. a) Solución de Sergio Villarroel:

Sabemos que $AC \neq BC$. O es el circuncentro de $\triangle ABC$ y éste es acutángulo. Además, $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos.



Al ser O el circuncentro se tiene que $AO = OC = OB$. Por ser $BOAP$ paralelogramo, se tiene que $BO = AP$ y $PB = AO$ y análogamente por ser $COPQ$ paralelogramo, $PQ = OC$ y $PO = QC$. Entonces, se tiene que $AO = OC = OB = AP = PB = PQ$ que determina que $APBO$ es un rombo. Sabemos que las diagonales de un rombo se cortan formando un ángulo de 90° por lo que $\angle AMO$, donde M es el punto de corte de las diagonales, mide 90°. Como $PQCO$ es un paralelogramo luego $PO \parallel QC$ de donde resulta que QC también es perpendicular a AB.

Se puede ver que $\angle ANC$ y $\angle AMO$ son correspondientes y por tanto congruentes. Luego, como QC parte de C, QC es altura desde C del $\triangle ABC$. LLamaremos N al pie de esa altura.

Si la altura desde B o A pasa por Q, se tendría que Q es el ortocentro de $\triangle ABC$.

Por otra parte, si definimos P' como el punto tal que $P'CO$ es un paralelogramo, luego $P'C = AO, P'C \parallel AO$ y $P'A \parallel OC, P'A = OC$ de donde $P'C \parallel PB, P'C = PB$ y $P'A \parallel PQ, P'A = PQ$ lo que trae como consecuencia que $APQP'$ también es un rombo.

Luego las diagonales de $APQP'$ se cortan formando un ángulo de $90°$ entre PP' y $AQ(\angle AKP')$, luego: $P'C \parallel PB$ y $P'C = PB$ de donde $PP'CB$ tiene que ser paralelogramo. Luego si prolongamos AQ hasta que corte a BC en el punto L tendremos que $\angle AKP'$ y $\angle ALC$ son correspondientes ya que $PP' \parallel BC$ por ser $PP'CB$ un paralelogramo, y por lo tanto, $\angle AKP' = \angle ALC = 90°$. Dado que AL forma un ángulo de $90°$ con BC, AL es la altura de $\triangle ABC$ trazado desde A. Además, la diagonal de $APQP'$, AQ forma parte de la misma AL de donde Q pertenece a AL y como Q pertenecía antes a NC (altura desde C del $\triangle ABC$) luego Q es el ortocentro de $\triangle ABC$ por ser el punto de intersección de AL y CN.

b) Solución de Diego Peña:

Sea Γ_1 el circuncírculo del $\triangle ABC$. Reflejemos el $\triangle ABC$ con respecto a la recta AB. Como $OAPB$ es un paralelogramo y $OA = OB$ (por ser radios de Γ_1), entonces $OAPB$ es un rombo.

Por lo tanto, AB y OP con perpendiculares, y como además, por ser $OAPB$ un paralelogramo, AB y OP se bisecan tenemos que P es la reflexión de O con respecto a AB. Luego, la reflexión de Γ_1 con respecto a AB es el círculo Γ_2 de centro P y radio PA (pues P es la imagen de O, el centro de Γ_1 y A es su misma imagen).

Como OP y AB son perpendiculares, y como por ser $COPQ$ un paralelogramo, OP y CQ son paralelas, tenemos que AB y CQ son perpendiculares.

Por ser $OCPQ$ un paralelogramo tenemos que $PQ = OC = OA = PA$ (pues OC y OA son radios de Γ_1 y $OAPB$ es un rombo). Luego, Q está en Γ_2. Como CQ y AB son perpendiculares, la imagen Q' de Q luego de la reflexión está sobre la recta CQ, y como Q está en Γ_2, Q' estará en Γ_1 (pues como ya vimos la reflexión cambia Γ_1 con Γ_2).

Luego, Q' será el punto de corte de CQ y Γ_1, es decir, la reflexión del punto Q con respecto a AB cae sobre el circuncírculo. Como además ya vimos que $CQ \perp AB$, tenemos que la recta CQ es la altura por C del $\triangle ABC$. Luego, tenemos que Q' es un punto de la altura por C del $\triangle ABC$ que cumple que su reflexión sobre el lado AB cae en el circuncírculo, lo que implica que Q es el ortocentro del $\triangle ABC$.

c) Solución de Rubmary Rojas:

Como O es el circuncentro $OA = OB$ y como $OAPB$ es paralelogramo se tiene que $OA = PB$ y $BO = PA$ y análogamente, los cuatro segmentos del paralelogramo son iguales, es decir $OAPB$ es un rombo y sus diagonales se cortan en el punto medio y son perpendiculares. Luego CQ es paralela a OP y $OP \perp AB$ obtenemos que $CQ \perp AB$ de donde se obtiene que el ortocentro se encuentra en la recta CQ.

Por otra parte se tiene que la distancia desde un vértice hasta el ortocentro es el doble de la distancia que hay desde el circuncentro hasta el lado opuesto a dicho vértice. Por esto es suficiente con demostrar que $CQ = 2OC'$ donde C' es el punto medio del lado AC. Pero esto es cierto ya que como $COPQ$ es un paralelogramo $CO = OP = 2OC'$. La última igualdad cumple ya que al ser C' el punto medio de AB es el punto de corte de las diagonales del paralelogramo $OAPB$ y también es el punto medio de OP.

5. Suponga sin pérdida de generalidad que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Se va a probar que la desigualdad se verifica si $a_k = (-1)^{k+1}$. Se va a demostrar por inducción sobre n. Si $n = 2$ la desigualdad se reduce a $2x_2(x_1 - x_2) \geq 0$ y si $n = 3$ la desigualdad se reduce a $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \geq 0$. Suponga que el resultado es cierto para n, se va a probar para $n + 2$.

Suponga primero que n es par, y sea $n = 2m$. En este caso la desigualdad que hay que demostrar es equivalente a

$$\begin{aligned}(x_1 + \cdots + x_{2m-1} + x_{2m+1})&(x_2 + \cdots + x_{2m} + x_{2m+2}) \\ &- \sum_{1\leq i<i\leq m+1} (x_{2i-1}x_{2j-1} + x_{2i}x_{2j}) - \sum_{i=1}^{m+1} x_{2i}^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Sea $S_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, X_{2m+2})$ el lado izquierdo de la desigualdad anterior. Se verifica la identidad $S_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, X_{2m+2}) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3 + \cdots + x_{2m} - x_{2m+1} + x_{2m+2}) + S_m(x_3, x_4, \ldots, x_{2m+2})$, y la prueba se sigue por inducción.

Suponga que n es impar y sea $n = 2m + 1$. La desigualdad que hay que demostrar es $(x_1+\cdots+x_{2m-1}+x_{2m+1})(x_2+\cdots+x_{2m}) - \sum_{1\leq i<i\leq m+1} x_{2i-1}x_{2j-1} - \sum_{1\leq i<i\leq m} x_{2i}x_{2j} - \sum_{i=1}^{m} x_{2i}^2 \geq 0$.

Sea $T_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, X_{2m+1})$ el lado izquierdo de la desigualdad anterior. Es sencillo demostrar que $T_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, X_{2m+1}) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3 + \cdots + x_2m - x_{2m+1}) + T_m(x_3, x_4, \ldots, x_{2m+1})$, y la prueba se sigue por inducción.

Solución alternativa

Suponga sin pérdida de generalidad que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Se va a probar que la desigualdad se verifica si $a_k = (-1)^{k+1}$. Al igual que en la solución anterior se comprueban fácilmente los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Parav $n > 2$ considérese $Y = x_3 - x_4 + \cdots + (-1)^{n+1}x_n$. Nótese que $Y = x_3 - (x_4 - x_5) - (x_6 - x_7) - \cdots$, entonces $Y \leq x_3$ y por otra parte $Y = (x_3 - x_4) + (x_5 - x_6) + \cdots \geq 0$.

Nótese quen utilizando los casos $n = 2$ y $n = 3$ se tiene la desigualdad:

$$x_1^2 - x_2^2 + Y^2 \geq (x_1 - x_2 + Y)^2.$$

Aplicando la hipótesis de inducción se tiene que

$$x_3^2 - x_4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} x_n^2 \geq Y^2.$$

uniendo ambas desigualdades se tiene el resultado.

6. Supongamos primero que hay n piedras blancas y r piedras negras. Sean b_1, b_2,..., b_n las piedras blancas numeradas de izquierda a derecha. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sean I_i y D_i la cantidad de piedras negras a la izquierda y a la derecha de b_i, respectivamente. Es claro que $I_i + D_i = r$. El número de intercambios necesarios para tener todas las piedras blancas a la izquierda es $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$, y para tenerlas a la derecha es $D = \sum_{i=1}^{n} D_i$. Como obviamente $I + D = nr$, resulta que el menor número de intercambios para que las piedras de un mismo color queden en cajas seguidas es $\text{mín}(I, D) \leq \lfloor \frac{nr}{2} \rfloor$.

a) Si hay k colores, llamemos a uno de ellos *blanco* e identifiquemos a todos los demás como *negro*. Entonces, por el caso $k = 2$ ya analizado, con $r = (k-1)n$, resulta que las piedras blancas se pueden separar en a lo sumo $\lfloor \frac{n^2(k-1)}{2} \rfloor = \frac{n^2(k-1)}{2}$ (pues estamos suponiendo que n es par). Si ahora separamos las piedras de alguno de los colores que identificamos como "negro" y continuamos se la misma manera separando los colores de uno en uno, resultará que todos los colores se pueden separar en a lo sumo

$$\frac{n^2(k-1)}{2} + \frac{n^2(k-2)}{2} + \cdots + \frac{n^2}{2} = \frac{n^2 k(k-1)}{4}.$$

Para ver que esta cota no se puede mejorar, sean C_1,..., C_k los colores y denotemos por C_i^s una sucesión de s piedras consecutivas de color C_i. Consideremos el arreglo $C_1^{\frac{n}{2}} C_2^{\frac{n}{2}} \ldots C_k^{\frac{n}{2}} C_k^{\frac{n}{2}} \ldots C_2^{\frac{n}{2}} C_1^{\frac{n}{2}}$. Para mover todas las piedras de color C_i a la izquierda (o a la derecha) se necesitan al menos

$$(i-1)\left(\frac{n}{2}\right)^2 + (k-1+k-i)\left(\frac{n}{2}\right)^2 = (2k-2)\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2(k-1)}{2}$$

intercambios. Repitiendo el proceso resulta que la separación total requiere al menos

$$\frac{n^2(k-1)}{2} + \frac{n^2(k-2)}{2} + \cdots + \frac{n^2}{2} = \frac{n^2 k(k-1)}{4}$$

intercambios.

b) La respuesta es $\frac{3n^2-1}{2}$. Por lo visto al inicio, separar un color requiere a lo sumo $\lfloor \frac{n(2n)}{2} \rfloor = n^2$ intercambios. Y separar los dos colores de las $2n$ piedras que quedan requiere a lo sumo $\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor = \frac{n^2-1}{2}$ intercambios. Por lo tanto

$$m \leq n^2 + \frac{n^2-1}{2} = \frac{3n^2-1}{2}.$$

Si los tres colores son A, B y C consideremos ahora el arreglo

$$A^{\frac{n-3}{2}} B^{\frac{n-3}{2}} C^{\frac{n-3}{2}} ABCBCACABC^{\frac{n-3}{2}} B^{\frac{n-3}{2}} A^{\frac{n-3}{2}}.$$

Es fácil ver que para mover cualquiera de los tres colores a un extremo se requieren n^2 intercambios, luego de lo cual se requieren $\frac{n^2-1}{2}$ intercambios para separar los dos colores restantes. Por lo tanto la cota $\frac{3n^2-1}{2}$ no se puede mejorar.

Capítulo 7

Olimpiada Internacional de Matemática

Esta sección está dedicada a la Olimpiada Internacional de Matemáticas 2011, IMO, celebrada del 12 al 24 de Julio en Amsterdam. El equipo venezolano estuvo integrado por los alumnos Carlos Lamas Bárcenas, del colegio Independencia de Barquisimeto y Diego Peña Colaiocco, del colegio Los Hipocampitos de los Altos Mirandinos. El tutor de la delegación fue la profesora Laura Vielma Herrero de la Academia Washington y el jefe de la delegación el profesor Rafael Sánchez Lamoneda, de la UCV. Ambos alumnos, Carlos y Diego obtuvieron mención honorífica por sus soluciones al problema 1, las cuales esencialmente, son la misma respuesta oficial. Las soluciones que damos a los problemas planteados son las oficiales del banco de problemas, salvo en el problema 5, donde exponemos una solución muy elegante dada por el profesor Massimo Gobbino, Observador del equipo italiano.

7.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Para cualquier conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de cuatro enteros positivos distintos se denota la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ por s_A. Sea n_A el número de parejas (i, j) con $1 \leq i < j \leq 4$ para las cuales $a_i + a_j$ divide a s_A. Encontrar todos los conjuntos A de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de n_A.

Problema 2. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En $\mathcal{S}$ no hay tres puntos colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta ℓ que pasa por un único punto $P \in \mathcal{S}$, al cual llamaremos pivote. Se rota ℓ en el sentido de las manecillas del reloj con centro en el pivote P hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de $\mathcal{S}$ al cual llamaremos Q. Con Q como nuevo centro, (pivote), se sigue rotando la recta en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta encuentra otro punto de $\mathcal{S}$. Este proceso continúa indefinidamente, siendo siempre el centro de rotación un punto de $\mathcal{S}$.

Demostrar que se puede elegir un punto $P \in \mathcal{S}$ y una recta ℓ que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de $\mathcal{S}$ como un centro de rotación un número infinito de veces.

Problema 3. Sea f una función del conjunto de los números reales en si mismo que satisface

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

para todos los números reales x, y. Demostrar que $f(x) = 0$ para toda $x \leq 0$.

Segundo Día

Problema 4. Sea $n > 0$ un entero. Se dispone de una balanza de dos platillos y de n pesas cuyos pesos son 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Se coloca cada una de las pesas en la balanza, de una en una, mediante una sucesión de n movimientos. En el primer movimiento se elige una pesa y se coloca en el platillo izquierdo. En cada uno de los movimientos siguientes se elige una de las pesas restantes y se coloca en el platillo de la izquierda o en el de la derecha. Determinar el número de formas de llevar a cabo estos n movimientos de manera tal que en ningún momento el platillo de la derecha tenga más peso que el platillo de la izquierda.

Problema 5. Sea f una función del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros positivos. Se supone que para cualesquiera dos enteros m y n, la diferencia $f(m) - f(n)$ es divisible por $f(m-n)$. Demostrar que para todos los enteros m y n con $f(m) \leq f(n)$, el número $f(n)$ es divisible por $f(m)$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Sea ℓ una recta tangente a Γ, y sean ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c las rectas que se obtienen al reflejar ℓ con respecto a las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo determinado por las rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c es tangente a la circunferencia Γ.

7.2. Soluciones

1. Demostremos que los conjuntos A para los cuales n_A es maximal son aquellos de la forma $\{d, 5d, 7d, 11d\}$ o $\{d, 11d, 19d, 29d\}$, donde d es un entero positivo. Para estos conjuntos el valor de n_A es 4.

Demostremos primero que $n_A \leq 4$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Obsérvese que para cada par de índices (i, j) con $1 \leq i < j \leq 4$, la suma $a_i + a_j$ divide a s_A si y solo si, $a_i + a_j$ divide a $s_A - (a_i + a_j) = a_k + a_l$, donde k y l son los otros dos índices. Como en total tenemos 6 pares ordenados diferentes, deberemos demostrar que al menos dos de ellos no satisfacen la condición previa. Afirmamos que esos dos pares son (a_2, a_4) y (a_3, a_4). Como $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, entonces $a_2 + a_4 > a_1 + a_3$ y $a_3 + a_4 > a_1 + a_2$. Por lo tanto $a_2 + a_4$ y $a_3 + a_4$ no pueden dividir a s_A. esto demuestra que $n_A \leq 4$.

Un simple cálculo demuestra que $n_A = 4$ si por ejemplo $A = \{1, 5, 7, 11\}$.

Veamos ahora la forma de todos los conjuntos A para los cuales $n_A = 4$.

Supongamos que $n_A = 4$. Por el argumento dado antes tenemos que:

$$\begin{array}{ccc} a_1 + a_4 | a_2 + a_3 & y & a_2 + a_3 | a_1 + a_4 \\ a_1 + a_2 | a_3 + a_4 & y & a_3 + a_4 \nmid a_1 + a_2 \\ a_1 + a_3 | a_2 + a_4 & y & a_2 + a_4 \nmid a_1 + a_3 \end{array}$$

Por lo tanto, existen enteros positivos u y v con $u > v \geq 2$ tal que:

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_4 & = & a_2 + a_3 \\ u(a_1 + a_2) & = & a_3 + a_4 \\ v(a_1 + a_3) & = & a_2 + a_4 \end{array}$$

Al sumar la primera ecuación con la tercera, obtenemos $v(a_1 + a_3) = 2a_2 + a_3 - a_1$. Si $v \geq 3$, entonces $v(a_1 + a_3) \geq 3(a_1 + a_3) > 3a_3 > 2a_2 + a_3 > 2a_2 + a_3 - a_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $v = 2$. Si ahora sumamos la primera y la tercera ecuación y multiplicamos esa suma por 2, obtenemos,

$$6a_1 + 2a_3 = 4a_2.$$

Si ahora sumamos la primera y la segunda ecuación, nos da:

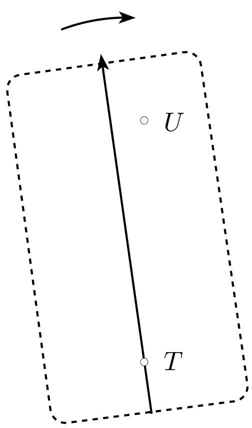
$$(u + 1)a_1 + (u - 1)a_2 = 2a_3.$$

Al sumar estas dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$(u + 7)a_1 = (5 - u)a_2.$$

Como tanto el lado izquierdo de esta última ecuación como a_2 son positivos, se tiene que $5 - u \geq 1$. Pero sabemos que $u > v = 2$, en consecuencia $u = 3$ o $u = 4$. Sustituyendo los pares $(3, 2)$ y $(4, 2)$ por (u, v), y resolviendo los sistemas de ecuaciones que resultan , encontramos las familias de soluciones $\{d, 5d, 7d, 11d\}$ y $\{d, 11d, 19d, 29d\}$, donde d es un entero positivo.

2. Para comenzar recordemos que dos rectas paralelas tiene la misma dirección. También le podemos dar orientación a una recta y eso lo indicamos con una flecha que apunta en el sentido de la orientación elegida. En el caso del remolino demos a la recta inicial una orientación y distingamos ambos semiplanos determinados por la recta como lado amarillo y lado azul. Observemos que cuando el pivote cambia de un punto T a otro punto U, luego del cambio, T se encuentra en el mismo lado en el cual se encontraba inicialmente U. Por lo tanto el número de elementos de $\mathcal{S}$ en el lado amarillo y en el lado azul, permanece invariante durante todo el proceso.



Consideremos primero el caso donde $|\mathcal{S}| = 2n+1$ es un número impar. Afirmamos que para cada punto $T \in \mathcal{S}$, existe una recta que divide a $\mathcal{S}$ de tal forma que hay n puntos en el lado amarillo y n puntos en el lado azul. En efecto. Elijamos una recta orientada que pase por T y no contenga otro punto de $\mathcal{S}$ y supongamos que hay $n+r$ puntos en el lado amarillo. Si $r = 0$, entonces no hay nada que demostrar, por lo tanto supongamos que $r > 0$. Cuando rotamos la recta con centro en T en un ángulo de $180°$, el número de puntos de $\mathcal{S}$ en su lado amarillo cambia en 1 a medida que la recta va pasando un punto; después de $180°$, el número de puntos en el lado amarillo será $n - r$. Por lo tanto existe una etapa intermedia en la cual cada lado, el amarillo y el azul, tienen n puntos cada uno.

Consideremos ahora como estado inicial del *remolino* un punto cualquiera P y una recta que pase por P y que separe a $\mathcal{S}$ en dos partes iguales, con n puntos cada una. Demostremos que durante una rotación de 180, la recta del *remolino* pasará por cada punto de $\mathcal{S}$, convirtiéndolo en un pivote. Para ver esto, tomemos un punto cualquiera T de $\mathcal{S}$ y una recta ℓ que pase por T y que separe a $\mathcal{S}$ en dos partes iguales. Esta recta es única pues traslaciones paralelas rompen el balance de la distribución de los puntos de $\mathcal{S}$. Dicho de otra forma, el punto T es el único punto de $\mathcal{S}$ por el cual puede pasar una recta con la misma dirección que ℓ y que separe a $\mathcal{S}$ en dos partes iguales. Por lo tanto, cuando la recta del *remolino* es paralela a ℓ, ella debe ser ℓ, y por lo tanto pasa por T.

Ahora supongamos que $|\mathcal{S}| = 2n$. Analogamente al caso impar, para todo punto $T \in \mathcal{S}$, existe una recta orientada que pasa por T con $n-1$ puntos en su parte amarilla y n puntos en su parte azul. Dado un punto cualquiera P, elijamos esa recta orientada que pasa por P como el estado inicial del *remolino* . Veamos que durante una rotación de $360°$, la recta del *remolino* visitará cada punto de $\mathcal{S}$ como un pivote. En efecto, elijamos un punto cualquiera T de $\mathcal{S}$ y una recta orientada ℓ que pase por T y que separe a $\mathcal{S}$ de tal manera que haya $n-1$ puntos en la parte amarilla y n puntos en la parte azul. De nuevo traslaciones paralelas cambiarían el número de puntos en la partes amarilla y azul, por lo tanto cuando la recta del *remolino* sea paralela a ℓ y con la misma orientación, ella pasará por T.

3. Llamemos (1) a la desigualdad del enunciado. Haciendo la sustitución $y = t - x$ obtenemos la desigualdad:

$$f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x)) \qquad (2)$$

.

Consideremos ahora números reales a y b cualesquiera y usando (2) primero con $t = f(a)$ y $x = b$ y luego con $t = f(b)$ y $x = a$, tenemos las desigualdades:

$$\begin{array}{rcl} f(f(a)) - f(f(b)) & \leq & f(a)f(b) - bf(b) \\ f(f(b)) - f(f(a) & \leq & f(a)f(b) - af(a). \end{array}$$

sumando estas dos desigualdades y despejando nos queda:

$$2f(a)f(b) \geq af(a) + bf(b).$$

Si hacemos la sustitución $b = 2f(a)$ obtenemos $2f(a)f(b) \geq af(a) + 2f(a)f(b)$, o bien $af(a) \leq 0$. Por lo tanto,

$$f(a) \geq 0 \quad para \quad todo \quad a < 0. \qquad (3)$$

Supongamos ahora que $f(x) > 0$ para algún número real x. Consideremos ahora todo número real t, tal que:

$$t < \frac{xf(x) - f(f(x))}{f(x)}.$$

Despejando, $tf(x) - xf(x) + f(f(x)) < 0$, entonces por (2), tenemos que $f(t) < 0$, y esto contradice (3). Por lo tanto:

$$f(x) \leq 0 \quad para \quad todo \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Usando otra vez (3), obtenemos que $f(x) = 0$ para todo $x < 0$.

Para finalizar solo nos queda calcular $f(0)$. Pongamos $t = x < 0$ en (2). Obtenemos $f(x) \leq f(f(x))$. Pero cuando $x < 0$ sabemos que $f(x) = 0$, por lo tanto lo que tenemos es que $0 \leq f(0)$. Combinado esto con (4) nos queda que $f(0) = 0$ y hemos termiando la demostración.

4. Denotemos por $f(n)$ el número de manera de colocar las n pesas. Demostraremos por inducción sobre $n \geq 1$ que $f(n) = (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$. Primero observemos que $f(1) = 1$. Supongamos ahora que $n \geq 2$. Afirmamos entonces que:

$$f(n) = (2n-1)f(n-1). \tag{7.1}$$

Comencemos obeservando que luego del primer movimiento el platillo de la izquierda es siempre más pesado que el de la derecha en al menos 1. Por lo tanto cualquier manera válida de colocar las n pesas en la balanza, da lugar, sin considerar a la pesa de peso 1, a una manera válida de colocar las pesas de pesos $2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Si ahora dividimos los pesos por 2, la respuesta no cambia, seguimos teniendo una manera válida de colocar las pesas de pesos $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-2}$. Por inducción estas $n-1$ pesas se pueden colocar de $f(n-1)$ formas distintas. Veamos ahora qué hacer con la pesa de peso 1. Si la ponemos en la balanza en el primer movimiento, ella deberá ser puesta en el platillo de la izquierda, si no la ponemos en el primer movimiento, entonces como luego de este primer movimiento la diferencia de pesos entre el platillo de la izquierda y el de la derecha es al menos 2, entonces, la pesa de peso 1 la podemos colocar en cualquiera de los dos platillos, obteniendo una manera válida de disponer las pesas en la balanza. Por lo tanto habrá $2n-1$ maneras diferentes de insertar el peso 1 en cada una de las $f(n-1)$ secuencias válidas que tenemos para las pesas $2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Esto demuestra lo afirmado y por inducción obtenemos que:

$$f(n) = (2n-1)f(n-1) = (2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

5. Solución de Massimo Gobbino Sea $f(\mathbb{Z}) = \{a_1, a_2, \ldots\}$ la imagen de la función f, con $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$. Demostraremos que a_i divide a a_{i+1} para todo $i \geq 1$. En efecto. Sean x e y enteros tales que $f(x) = a_i$ y $f(y) = a_{i+1.}$
Haciendo $m = x$ y $n = y$ tenemos que,

$$f(x-y) | f(x) - f(y),$$

o equivalentemente

$$f(x-y) | f(y) - f(x).$$

Pero $f(y) - f(x) = a_{i+1} - a_i < a_{i+1.}$ Entonces $f(x-y) < a_{i+1}$ y por lo tanto $f(x-y) \leq a_i = f(x)$.

Si $f(x-y) < f(x)$, entonces $f(x) - f(x-y) > 0$. Haciendo $m = x$ y $n = x - y$ tenemos que:

$$f(y) = f(x - (x - y))|f(x) - f(x - y).$$

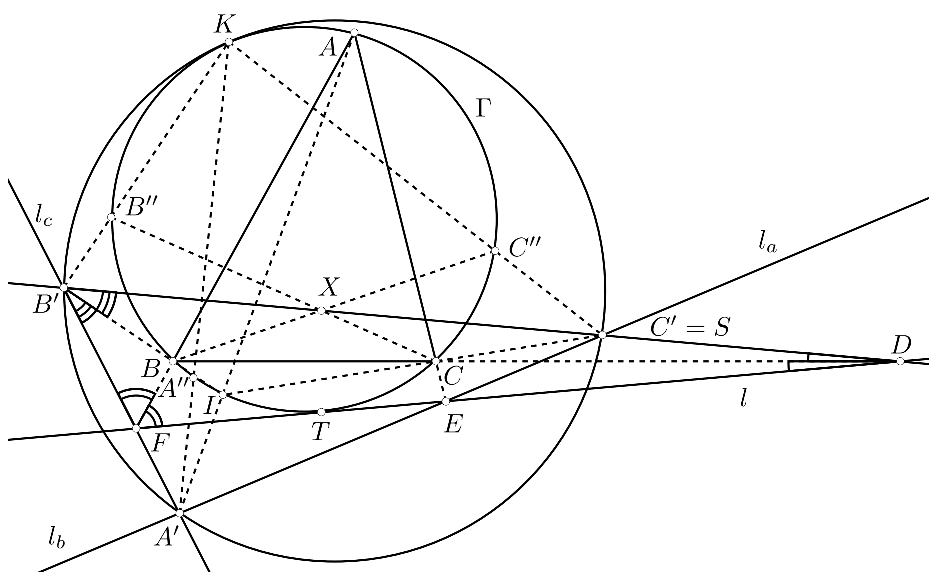
Como $f(x) - f(x - y) > 0$ tenemos que:

$$f(y) \leq f(x) - f(x - y) < f(x) < f(y),$$

lo cual es absurdo.

Si $f(x - y) = f(x)$, entonces $f(x - y)|f(x) - f(y)$, lo cual implica que $f(x)$ divide a $f(y)$, como queríamos demostrar.

6. Comencemos estableciendo una notación que facilitará la explicación de la solución. Para dos rectas m y n, denotaremos por $\angle(m, n)$ el ángulo mediante el cual podemos rotar la recta m en el sentido contrario a las agujas del reloj, hasta obtener una recta paralela a n. Un ángulo $\angle(m, n)$ recibe el nombre de *ángulo orientado*. Es claro que todos los *ángulos orientados* son considerados módulo 180°.



Vamos ahora con la solución al problema 6. Denotemos por T el punto de tangencia de ℓ y Γ. Sea $A' = \ell_b \cap \ell_c$, $B' = \ell_a \cap \ell_c$ y $C' = \ell_a \cap \ell_b$. Consideremos el punto A'' en Γ tal que $TA = AA''$ ($A'' \neq T$ salvo que TA sea un diámetro de Γ). Definamos los puntos B'' y C'' de manera análoga. Como los puntos C y B son los puntos medios de los arcos TC'' y TB'', respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned} \angle(\ell, B''C'') &= \angle(\ell, TC'') + \angle(TC'', B''C'') = 2\angle(\ell, TC) + 2\angle(TC'', BC'') \\ &= 2(\angle(\ell, TC) + \angle(TC, BC)) = 2\angle(\ell, BC) = \angle(\ell, \ell_a). \end{aligned}$$

En consecuencia ℓ_a y $B''C''$ son rectas paralelas. Analogamente ℓ_b y $A''C''$ son paralelas y ℓ_c y $A''B''$ son paralelas. Por lo tanto los triángulos $A'B'C'$ y $A''B''C''$ o bien son semejantes o son uno imagen del otro por traslación. Vamos a demostrar que ellos son semejantes, demostrando que uno es imagen del otro mediante una homotecia cuyo centro es un punto K que pertenece a Γ. Esto implicará entonces que las circunferencias circunscritas de estos dos triángulos son también homotéticas con respecto a K y por lo tanto tangentes en este punto, que es lo que se quiere demostrar.

Demostremos primero dos afirmaciones:

Afirmación 1: El punto de intersección X de las rectas $B''C$ y BC'' pertenece a la recta ℓ_a. En efecto: Las rectas CT y CB'' son simétricas con respecto a BC y también lo son las rectas BT y BC'', por lo tanto X y T son simétricos con respecto a BC. En consecuencia como T pertenece a ℓ, entonces X pertenece a ℓ_a, que es por construcción, simétrica a ℓ con respecto a BC.

Afirmación 2: El punto de intersección I de las rectas BB' y CC' pertenece a la circunferencia Γ. En efecto: Consideremos el caso en el cual ℓ no es paralela a los lados del triángulo ABC. Los otros casos se pueden vistos como casos límite. Sean D el punto de intersección de ℓ y BC, E el punto de intersección de ℓ y AC y F el punto de intersección de ℓ y AB. Por la simetría, la recta BD es bisectriz de uno de los ángulos que se forman entre las rectas $B'D$ y FD. Analogamente FB es bisectriz de uno de los ángulos entre las rectas $B'F$ y DF. Por lo tanto B o bien es el incentro del triángulo $B'DF$ o uno de sus excentros. Cualquiera sea el caso tendremos que $\angle(BD, DF) + \angle(DF, FB) + \angle(B'B, B'D) = 90°$ y entonces:

$$\begin{aligned}\angle(B'B, B'C') = \angle(B'B, B'D) &= 90° - \angle(BC, DF) - \angle(DF, BA)\\ &= 90° - \angle(BC, AB).\end{aligned}$$

Analogamente tenemos que $\angle(C'C, B'C') = 90° - \angle(BC, AC)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\angle(BI, CI) &= \angle(B'B, B'C') + \angle(B'C', C'C)\\ &= \angle(BC, AC) - \angle(BC, AB) = \angle(AB, AC).\end{aligned}$$

Es decir, los puntos A, B, I y C son concíclicos y I pertenece a Γ, como habíamos afirmado.

Ahora podemos completar la solución del problema 6. Sea K el segundo punto de intersección de $B'B''$ y Γ. Aplicando el *Teorema de Pascal* al hexágono $KB''CIBC''$ tenemos que los puntos $B' = KB'' \cap IB$, $X = B''C \cap BC''$ y $S = CI \cap C''K$ son colineales. Por lo tanto $S = CI \cap B'X = C'$, y los puntos C', C'' y K son colineales. Luego K es el punto de intersección de $B'B''$ y $C'C''$, lo cual implica que K es el centro de la homotecia que aplica el triángulo $A'B'C'$ en el triángulo $A''B''C''$, y entonces K pertenece a Γ.

Glosario

Ángulo inscripto. Si A, B y C son puntos de una circunferencia de centro O, se dice que el ángulo $\angle ABC$ está *inscripto* en la circunferencia y que *subtiende* el arco $\widehat{AC}$ que no contiene a B. La medida de $\angle ABC$ es igual a la mitad del ángulo central $\angle AOC$.

Ángulo semiinscripto. Es el que tiene el vértice en una circunferencia, un lado tangente a la misma y el otro secante.

Centro radical. Dadas tres circunferencias con centros no alineados, es el único punto que tiene igual potencia respecto a todas ellas.

Círculo de Apolonio. Es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su razón de distancias a dos puntos dados A y B es una constante dada $r > 0$, $r \neq 1$. Es una circunferencia cuyo centro está sobre el segmento AB. (Si $r = 1$ el lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB).

Circuncírculo. Es la (única) circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo.

Circunferencia circunscripta. Ver *Circuncírculo*.

Coeficiente binomial. Es el coeficiente de x^k en el desarrollo de $(1+x)^n$. También es igual al número de subconjuntos de k elementos que tiene un conjunto de n elementos. Se denota $\binom{n}{k}$ y puede calcularse así:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Colineales. Dícese de los puntos que están sobre una misma línea recta.

Coprimos. (o **primos relativos**). Dícese de dos números enteros sin factores primos comunes (o, equivalentemente, cuyo máximo común divisor es 1).

Cuadrilátero cíclico (también llamado **concíclico** o **inscriptible**). Es un cuadrilatero que puede ser inscripto en una circunferencia, es decir, tal que alguna circunferencia pasa por sus cuatro vértices. Una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico es que tenga un par de ángulos opuestos suplementarios.

Cuaterna armónica. Los puntos alineados A, B, C y D forman una *cuaterna armónica* si y sólo si exactamente uno de los puntos A y B pertenece al segmento CD y además se cumple $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

Eje radical. Dadas dos circunferencias no concéntricas, es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto a ambas. Siempre es una recta perpendicular a la que une los centros de ambas circunferencias.

Incentro. Es el punto en que concurren las tres bisectrices de un triángulo. Como equidista de los tres lados del triángulo, es el centro de una circunferencia tangente internamente a ellos.

Incírculo. Es la circunferencia tangente internamente a los tres lados de un triángulo.

Potencia. Sean P un punto, Γ una circunferencia y r una recta que pase por P y corta a la circunferencia en A y B (si r es tangente a Γ consideramos que $A = B$). Entonces el producto $PA \cdot PB$ no depende de r, y su valor es por definición la *potencia* de P respecto a Γ, $\mathrm{Pot}(P, \Gamma)$. Las distancias PA y PB se consideran orientadas, es decir que la potencia es positiva o negativa según que P sea exterior o interior a Γ. Obviamente $\mathrm{Pot}(P, \Gamma) = 0$ si y sólo si P pertenece a Γ.

Principio de las casillas. Si n objetos se distribuyen en k cajas, y $n > k$, entonces alguna caja recibe más de un objeto.

Razón áurea. Se dice que un punto C divide a un segmento AB en *media y extrema razón* si $AB/BC = AC/AB$. En este caso a la razón AC/AB se le conoce como *razón áurea*, *número áureo*, *divina proporción* y varios otros nombres. Se suele denotar con la letra griega φ y su valor es

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

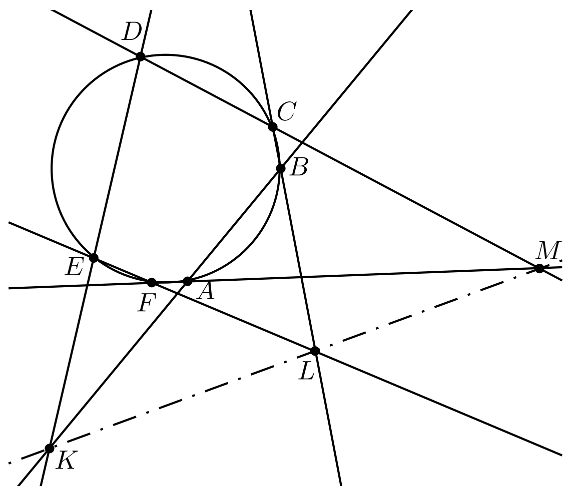
Teorema de la bisectriz. Sean ABC un triángulo, V el punto en que la bisectriz desde A corta al lado BC y U el punto en que la bisectriz exterior por A corta a la prolongación del lado BC. Entonces

$$\frac{VB}{VC} = \frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AB + AC}.$$

Teorema de Menelao. Sea ABC un triángulo y sean P, Q y R tres puntos ubicados respectivamente en las rectas BC, CA y AB y diferentes de A, B y C. Entonces P, Q y R están alineados si y sólo si

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

Teorema de Pascal. Sea $ABCDEF$ un hexágono inscripto en una circunferencia (o, más en general, en cualquier cónica). Entonces, si se extienden los pares de lados opuestos hasta que se corten, los tres puntos de intersección $K = AB \cdot DE$, $L = BC \cdot EF$ y $M = CD \cdot FA$ están alineados.



Terna pitagórica. Es un conjunto de tres enteros positivos a, b y c que cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Si $\text{mcd}(a, b, c) = 1$ la terna se dice *primitiva*. En ese caso a y b deben ser de diferente paridad, digamos a impar y b par, y se puede probar que existen enteros u y v, coprimos y de diferente paridad, tales que $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ y $c = u^2 + v^2$.

Estudiantes Premiados en la Final Nacional de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2011

Primer Año

Medallas de Oro

José Guevara	Colegio Bella Vista	Edo. Aragua
Rafael Aznar	Los Arcos	Distrito Capital

Medallas de Plata

Sofía Castejón	Colegio Aleman	Edo. Zulia
Fiorella Toledano	Nuestra Señora De Chiquinquirá	Edo. Zulia
Esther Hernao	Colegio Altamira	Edo. Zulia

Medallas de Bronce

Gabriela Morales	Los Campitos	Distrito Capital
Oscar Márquez	Educacional Aragua	Edo. Aragua
Amanda Deftereos	IEA	Distrito Capital

Menciones de Honor

Luis Uzcátegui	Los Proceres	Edo. Bolívar
Sofía González	Madre Guadalupe	Edo. Nueva Esparta
Gabriel Gutiérrez	Hipocampitos	Edo. Miranda
Camila Kellemen	Los Campitos	Distrito Capital

Segundo Año

Medallas de Oro

María Morales	San Ignacio	Distrito Capital
Luis Ruiz	Las Colinas	Edo. Lara

Medallas de Plata

Luis Domínguez	San Ignacio	Distrito Capital
Jorge Navia	Bellas Artes	Edo. Zulia
Mireya Fábregas	Academia Washington	Distrito Capital
Arturo Story	San Ignacio	Distrito Capital

Medallas de Bronce

Diego Parada	San Ignacio	Distrito Capital
Ricardo Silva	Colegio San Gabriel Arcángel	Edo. Carabobo
Jesús Fernández	Las Américas	Edo. Monagas
Elizabeth Baptiste	Las Colinas	Edo. Lara
Nicolás Raga	Escuela Bella Vista	Edo. Zulia
Ricardo Ortega	San Lázaro	Edo. Sucre

Menciones de Honor

Aram Pulgar	Hipocampitos	Edo. Miranda
Arnaldo Escalona	Colegio Cristo Rey	Edo. Carabobo
Jesús Bastardo	Iberoamericano	Edo. Bolívar
Juan Cramer	San José Maristas	Edo. Aragua
Valentina Martínez	Alejandro Humbolt	Edo. Nueva Esparta
Yefferson Vílchez	Ramón Reinoso Nuñéz	Edo. Zulia

Tercer Año

Medallas de Oro

Rubmary Rojas	Divina Pastora	Edo. Lara
Luis Réquiz	IEA	Distrito Capital
Gianpaolo Cuticchia	San José Maristas	Edo. Aragua

Medallas de Plata

Pedro Romero	IEA	Distrito Capital
Juan Ocando	República De Venezuela	Edo. Trujillo
Oscar Bromberg	Moral y Luces	Distrito Capital
Daniel Núñez	Valle Alto	Edo. Miranda
Elias Jorge	Colegio Bella Vista	Edo. Aragua
Johel Arteaga	Juan XXIII Valencia	Edo. Carabobo

Medallas de Bronce

Elías Arama	Moral y Luces	Distrito Capital
Luis Medina	Andrés Eloy Blanco	Edo. Zulia
Rodolfo Márquez	María Santísima	Edo. Lara
Gabriel Valdez	Juan Jacobo Rousseau	Edo. Anzoátegui
José Jiménez	Roberto Castillo Cardier	Edo. Anzoátegui
Andrea Cedeño	Colegio Altamira	Edo. Zulia
Víctor Estevez	Andrés Bello	Edo. Nueva Esparta
Andrea López	San Lázaro	Edo. Sucre
Ali Reyes	Andrés Eloy Blanco	Edo. Zulia

Menciones de Honor

Berta Bartoli	Los Campitos	Distrito Capital

Cuarto Año

Medallas de Oro

Diego Peña	Hipocampitos	Edo. Miranda

Medallas de Plata

Sergio Villarroel	San Lázaro	Edo. Sucre

Medallas de Bronce

Jeremy Rojas	Andrés Eloy Blanco	Edo. Zulia
Miguel Linares	San Pedro	Edo. Lara
Elizabeth Acosta	Cristo Rey - Santa Monica	Distrito Capital
Viktor Duran	L. B. Jesús A. Marcano Echezuria	Edo. Sucre
Juan Díaz	CEAPULA	Edo. Mérida

Menciones de Honor

Alejandro Lira	Emil Friedman	Distrito Capital
Francisco Coll	Cristo Rey - Santa Monica	Distrito Capital
Miguel López	Monte Carmelo	Edo. Bolívar
Mariana Saavedra	Nuestra Señora De Lourdes	Edo. Carabobo
Alejandro Medina	Escuela Comunitaria San Antonio	Edo. Miranda
Ana Lopez	San Lázaro	Edo. Sucre

Quinto Año

Medallas de Oro

Carlos Lamas	Independencia	Edo. Lara
Tomás Rodríguez	Instituto Arco Iris	Edo. Nueva Esparta

Medallas de Plata

Moises Ackerman	Moral y Luces	Distrito Capital

Medallas de Bronce

Marian Flores	Educacional Aragua	Edo. Aragua
Edenys Hernao	Colegio Altamira	Edo. Zulia
Humberto Pardi	San Ignacio	Distrito Capital
Diego Mendoza	IEA	Distrito Capital

Menciones de Honor

Carlos Martínez	Juan XXIII Valencia	Edo. Carabobo
Valentina Pacino	Hipocampitos	Edo. Miranda
Carlos Pirela	Independencia	Edo. Lara

Premios Especiales

Luis Ruiz (Las Colinas, Edo. Lara)
Premio de la Fundación Empresas Polar a la mejor prueba.

Rubmary D. Rojas L. (Divina Pastora, Edo. Lara)
Premio UNEXPO a la respuesta más creativa.

Tomás Rodríguez (Instituto Arco Iris, Edo. Nueva Esparta)
Premio por haber participado en la Final Nacional
desde Tercer Grado hasta 5to Año.

Mary Acosta (Estado Bolívar)
Premio *Eduardo Contreras* a la Coordinadora más destacada.

Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2011

Comité Organizador Nacional

Rafael Sánchez Lamoneda (Presidente)
Saturnino Fermín Reyes (Coordinador Administrativo)
José Heber Nieto Said (Coordinador Académico)
Laura Vielma Herrero (Coordinadora de Entrenamientos)

Coordinadores Regionales

Prof. Lisandro Alvarado (Altos Mirandinos)
Prof. María de Mejias (Anzoátegui Norte)
Prof. Rafael Antonio Valdez Tovar (Apure)
Prof. Vilma Escalona (Aragua)
Prof. Mary Acosta (Bolívar)
Prof. Jorge W. Salazar (Carabobo)
Prof. Sonia Chacón (Cojedes)
Prof. Dibeth Bravo (Falcón)
Prof. Carlos Lira (Guárico)
Prof. Víctor Caruci (Lara)
Prof. José Toloza (Mérida)
Prof. Yelenny Guanipa (Monagas)
Prof. Emilia Peña (Nueva Esparta)
Prof. María Martínez G. (Portuguesa)
Prof. Luisa López (Sucre)
Prof. Jorge Lozada (Táchira)
Prof. Ramón Blanco (Trujillo)
Prof. Nancy Candiales (Yaracuy)
Prof. José Heber Nieto (Zulia)