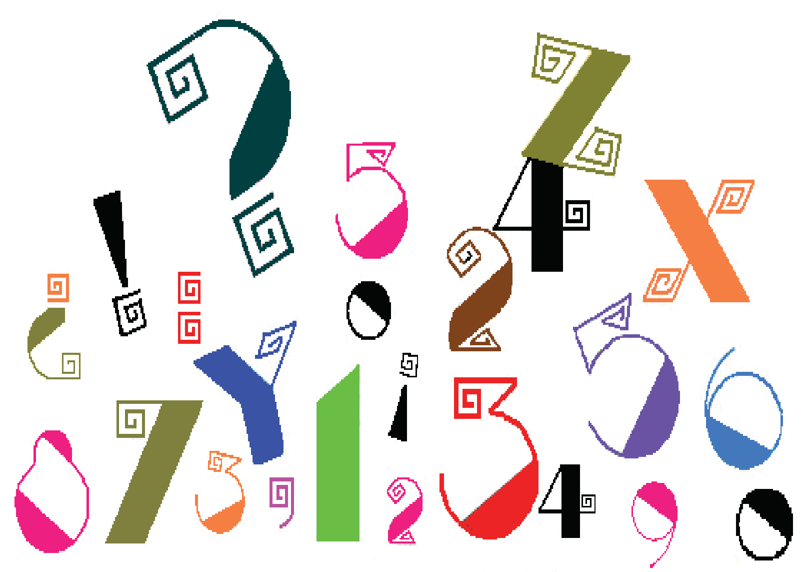
COLECCIÓN ESTUDIOS
DIVULGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

2012

Problemas y Soluciones

JOSÉ H. NIETO SAID, RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA
Y LAURA VIELMA



ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS,
MATEMÁTICAS Y Y NATURALES

José Heber Nieto Said. Venezolano de origen uruguayo, es egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Buenos Aires, M.Sc. en Matemática y Dr. H.C. por la Universidad del Zulia (LUZ). Es profesor titular emérito de LUZ, donde fue Director del Departamento de Matemática y Computación, profesor de casi todas las materias dictadas por ese Departamento, proyectista de la Licenciatura en Computación y editor de revistas científicas. Ha escrito varios libros y artículos sobre diversos aspectos de la matemática. Es miembro de varias asociaciones académicas y profesionales (AMV, AVCM, MAA, AMS y CMS). En las olimpiadas matemáticas venezolanas ha participado desde hace más de quince años como entrenador, jefe o tutor de delegaciones, jurado y apoyo académico.

Rafael Sánchez Lamoneda. Venezolano. Profesor Titular de la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV. Egresado del Instituto Pedagógico de Caracas, M.Sc. en Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar y PhD en Matemáticas de Brandeis University, Massachusetts, USA. Ha escrito varios artículos sobre Algebra en revistas internacionales. Fue Jefe del Departamento de Matemáticas del Ivic y miembro de la Comisión de postgrado de ese Instituto y de la Escuela de Matemáticas de la UCV. Premio Erdös 2010, otorgado por la World Federation for National Mathematical Competitions. Premio al mejor trabajo en el área de Matemáticas otorgado por el Conicit en el año 1993. Ha trabajado en las Olimpiadas Matemáticas en Venezuela desde 1978, ha sido jefe o tutor de delegaciones del país en Olimpiadas de Matemáticas Internacionales desde 1981. Asesor de la Organización de Estados Ibero-americanos para la Educación la Ciencia y la Cultura, OEI, en el área de Matemáticas y Olimpiadas Matemáticas. Asesor en el área de Matemáticas de la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Pertenece a la directiva de la Asociación Matemática Venezolana desde hace más de diez años. En la actualidad es el Presidente de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM.

Laura Vielma Herrero. Profesor de Matemáticas y de Inglés con menciones Magna Cum Laude de la UPEL-IPC, Caracas, Venezuela. Magíster en Ingeniería Industrial en el área de Investigación de Operaciones y Estadística de la Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia. Trabajó como asistente graduado y profesor en la Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. Profesor de la UPEL-IPC. Coordinador de proyectos y gerente de sector y territorio de una consultora internacional cuyas soluciones se enmarcan en el uso de modelos matemáticos para soportar la toma de decisiones en procesos industriales. Actualmente realiza estudios del Doctorado de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar Profesor y Jefe de Departamento de Matemáticas en la Academia Washington. Colabora activamente desde el año 2001 con el Programa de Olimpiadas Matemáticas de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM. Ha desempeñado el rol de entrenador, tutor y jefe de delegaciones venezolanas en competencias internacionales y se encarga de la realización del Calendario Matemático que publica la ACM.

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

(OJM, OMCC, 0IM, IMO)

2012

Problemas y Soluciones

JOSÉ H. NIETO SAID

RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA

Y

LAURA VIELMA

OLIMPIADA DE MATEMÁTICA 2012

COLECCIÓN ESTUDIOS

Hecho el Depósito de Ley
Deposito Legal: lf6592013510763
ISBN: 978-980-6195-29-5

Diseño General: Antonio Machado-Allison

Diseño Carátula: Claudia Nieto y Antonio Machado-Allison

Olimpiadas Matemáticas 2012

(OJM, OM, OMCC, OIM, IMO)

Problemas y Soluciones

José Heber Nieto Said
Rafael Sánchez Lamoneda
Laura Vielma Herrero

A la memoria de Jorge «El pollo» Salazar (1941–2012),
incansable promotor de las olimpiadas matemáticas en Venezuela.

Índice general

Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas son competencias dirigidas principalmente a jóvenes de escuela elemental y secundaria. Actualmente esta actividad se ha extendido por todo el mundo debido a su gran efectividad en la popularización de las matemáticas y en la detección de jóvenes con talento para el estudio de esta ciencia.

El presente libro reúne todos los problemas propuestos en la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, OJM 2012, así como aquellos de los eventos internacionales en los cuales participamos desde hace varios años, estos son la 53^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO, celebrada en Mar del Plata, Argentina, del 4 al 16 de Julio, la XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe, OMCC, celebrada en San Salvador y La Herradura, El Salvador, del 15 al 23 de Junio y la XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM, celebrada en Cochabamba, Bolivia, del 29 de septiembre, al 6 de octubre. Las tres competencias son de carácter presencial. Cada una de ellas consta de dos exámenes, presentados en días consecutivos. Cada prueba tiene 3 problemas y los participantes disponen de cuatro horas y media para resolverlos. El valor de cada pregunta es de 7 puntos, para un máximo posible de 42 puntos en la competencia. Los ganadores reciben medallas de oro, plata o bronce y mención honorífica, según sea su desempeño. En la IMO el joven Diego Peña del colegio Los Hipocampitos de los Altos Mirandinos, ganó Mención Honorífica. También incluimos en este libro los problemas de la Olimpiada Matemática de Mayo, competencia por correspondencia que se plantea a dos niveles para alumnos no mayores de 13 y 15 años y de carácter iberoamericano. Agradecemos a la Fundación Olimpiada Matemática Argentina, organizadores de esta competencia, por permitirnos publicar aquí los problemas y sus soluciones. Al final del libro aparece la lista de alumnos ganadores en esta competencia y los premios que obtuvieron. Hay que indicar aquí que este año no pudimos enviar una delegación a la XXVII OIM, pues debido al control cambiario que hay en el país, no se pudo comprar los boletos para el vuelo interno en Bolivia.

La OJM consta de tres etapas o pruebas. La primera de ellas es el *Canguro Matemático*, un examen de treinta problemas de selección simple, que fue presentado por 61.857 estudiantes provenientes de 22 estados del país. La segunda etapa de la competencia es la *Prueba Final Regional*. La misma consta de un examen de cinco problemas de desarrollo y compiten los alumnos que quedaron ubicados en el nueve por ciento superior en el Canguro Matemático. Esta prueba se organiza en cada estado que participa en la OJM y los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce. La tercera y última fase es la *Prueba Final Nacional*, la misma consta de un examen de cuatro problemas de desarrollo y en ella participan los alumnos ganadores de medalla de oro en la Prueba Final Regional. En la primera fase de la competencia los alumnos presentan la prueba en sus colegios. La Prueba Regional la presentan juntos todos los estudiantes de cada estado, en una sede previamente seleccionada por el coordinador local. Para la Final Nacional se elige cada año una sede y allí se organiza el evento, permitiendo a los participantes, sus profesores y representantes estrechar lazos de amistad y compartir una experiencia educativa enriquecedora. La Prueba Final Nacional 2012 se realizó en la *Universidad de Carabobo*, en Valencia y participaron 149 alumnos representando a 18 estados.

Esta obra consta de siete capítulos, en los tres primeros se estudian los problemas de la OJM, dedicando un capítulo a cada fase de la competencia. Los últimos cuatro capítulos versan sobre las competencias internacionales. En ellos se presentan los problemas y sus soluciones. Al final del libro incluimos un glosario de conceptos matemáticos que son utilizados a los largo del texto. Esperamos que este libro sea de gran utilidad tanto para profesores como para estudiantes, y que les permita conocer las matemáticas desde un punto de vista interesante y entretenido.

Agradecemos la valiosa colaboración de nuestro grupo de instructores exolímpicos, Carmela Acevedo, Diego Peña, Estefanía Ordaz, Mauricio Marcano y Sofía Taylor, quienes han revisado este trabajo y gracias a ellos tenemos una mejor versión del libro. Cualquier error que se haya escapado es, sin embargo, total responsabilidad de los autores.

No queremos terminar esta introducción sin agradecer a nuestros patrocinadores, en especial a la *Fundación Empresas Polar*, al *Banco Central de Venezuela*, a la *Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales*, a la *Facultad de Ciencias de la UCV* junto a la *Fundación Amigos de Ciencias*, a la *Universidad Simón Bolívar*, la *Universidad Rafael Urdaneta*, a *Acumuladores Duncan*, a *MRW* y a la *Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman*, así como a todos los colegas que con su trabajo y esfuerzo, permiten que la Olimpiada Juvenil de Matemáticas sea una realidad.

Capítulo 1

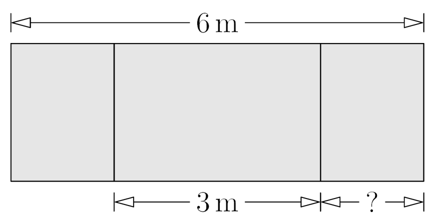
Prueba Preliminar (Canguro Matemático)

1.1. Prueba de Primer Año y Segundo Año

Problema 1. Rafael desea pintar las palabras VIVA EL CANGURO sobre una pared. Él quiere que letras diferentes estén pintadas de colores diferentes, y que letras iguales estén pintadas del mismo color. ¿Cuántos colores necesitará?

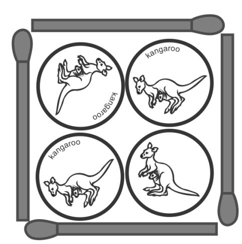
Ⓐ 7; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 10; Ⓔ 11.

Problema 2. Una pizarra de 6 m de ancho está dividida en tres partes. El ancho de la parte media es 3 m. Las otras dos partes tienen el mismo ancho. ¿Cuál es el ancho de la parte derecha?



Ⓐ 1 m; Ⓑ 2 m; Ⓒ 1,25 m; Ⓓ 1,5 m; Ⓔ 1,75 m.

Problema 3. Sonia puede colocar 4 monedas dentro de un cuadrado formado con cuatro fósforos (vea la figura). ¿Al menos cuántos fósforos necesitará para construir un cuadrado capaz de contener 16 monedas que no se solapen?



Ⓐ 8; Ⓑ 10; Ⓒ 12; Ⓓ 15; Ⓔ 16.

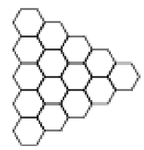
Problema 4. Las filas de un avión están numeradas de 1 a 25, pero no hay fila 13. La fila 15 tiene solamente 4 asientos para pasajeros, y todas las demás tienen 6 asientos. ¿Cuántos asientos para pasajeros hay en el avión?

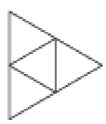
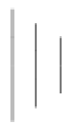
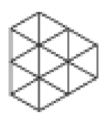
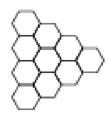
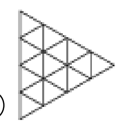
(A) 120; (B) 138; (C) 150; (D) 144; (E) 142.

Problema 5. Cuando son las 4pm en Londres, son las 5pm en Madrid y son las 8am del mismo día en San Francisco. Ana se acostó en San Francisco a las 9pm de ayer. ¿Qué hora era en Madrid en ese momento?

(A) 6am de ayer; (B) 6 pm de ayer; (C) 6am de hoy;
(D) medianoche; (E) 12m de ayer.

Problema 6. La figura muestra un arreglo de hexágonos. Se dibuja una nueva figura conectando mediante segmentos de recta los centros de cada par de hexágonos vecinos.¿Qué figura se obtiene?

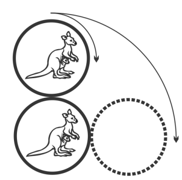


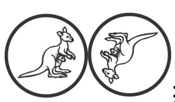
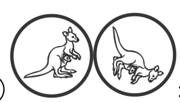
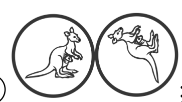
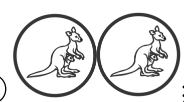
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Problema 7. Al número 6 se le suma 3. Luego se multiplica el resultado por 2 y se le suma 1. Entonces el resultado final es igual a:

(A) $(6 + 3 \cdot 2) + 1$; (B) $6 + 3 \cdot (2 + 1)$; (C) $(6 + 3) \cdot (2 + 1)$; (D) $(6 + 3) \cdot 2 + 1$;
(E) $6 + 3 \cdot 2 + 1$.

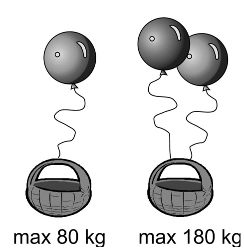
Problema 8. La moneda superior rueda sin deslizar alrededor de la moneda fija inferior hasta una posición mostrada en la figura. ¿Cuál es la posición relativa resultante del canguro?



(A)  ; (B)  ; (C)  ; (D)  ;
(E) depende de la la velocidad de rotación.

Problema 9. Un globo puede levantar una cesta con objetos cuyo peso no supere 80 kg. Dos de tales globos pueden levantar la misma cesta con objetos cuyo peso no supere 180 kg. ¿Cuál es el peso de la cesta?

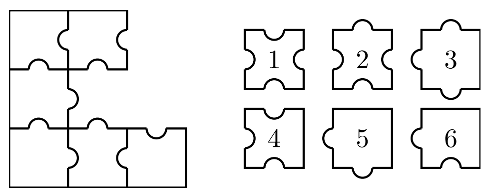
(A) 50 kg; (B) 40 kg; (C) 30 kg; (D) 20 kg; (E) 10 kg.



Problema 10. La abuela de Viviana y Miguel les obsequió una cesta con 25 frutas, entre manzanas y peras. En el camino de regreso a casa Viviana comió una manzana y tres peras, y Miguel comió tres manzanas y dos peras. Ya en su casa observaron que les quedaba el mismo número de manzanas que de peras. ¿Cuántas peras les dió la abuela?

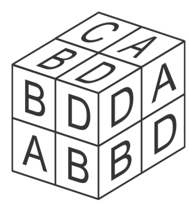
Ⓐ 12; Ⓑ 13; Ⓒ 16; Ⓓ 20; Ⓔ 21.

Problema 11. ¿Cuáles tres de las piezas numeradas de la derecha es necesario agregar a la figura de la izquierda para completar un cuadrado?



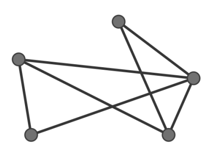
Ⓐ 1, 3, 4; Ⓑ 1, 3, 6; Ⓒ 2, 3, 6; Ⓓ 2, 3, 5; Ⓔ 2, 5, 6.

Problema 12. Luisa tiene 8 dados con las letras A, B, C y D, la misma letra en todas las caras de cada dado, y construye un bloque como muestra la figura. Dos dados adyacentes siempre tienen letras diferentes. ¿Qué letra hay en el dado que no se puede ver en la figura?



Ⓐ A; Ⓑ B; Ⓒ C; Ⓓ D; Ⓔ Imposible determinarlo.

Problema 13. En el País de las Maravillas hay cinco ciudades. Cada par de ciudades está conectada por una carretera, que puede ser visible o invisible. La figura es un mapa del País de las Maravillas, que solamente muestra las carreteras visibles. Pero Alicia tiene lentes mágicos: cuando ella mira el mapa con esos lentes, solamente ve las carreteras que de otro modo son invisibles. ¿Cuántas carreteras invisibles ve Alicia?



Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ 7; Ⓓ 8; Ⓔ 9.

Problema 14. Berta preparó una marinada mezclando vinagre, vino y agua. La proporción de vinagre a vino es de 1 a 2, y la de vino a agua es de 3 a 1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

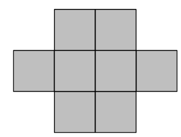
Ⓐ Hay más vinagre que vino.
Ⓑ Hay más vinagre que vino y agua juntos.
Ⓒ Hay más vino que vinagre y agua juntos.

Ⓓ Hay más agua que vinagre y vino juntos.
Ⓔ Hay menos vinagre que agua o vino.

Problema 15. Los enteros positivos han sido coloreados de rojo, azul o verde: 1 es rojo, 2 es azul, 3 es verde, 4 es rojo, 5 es azul, 6 es verde y así sucesivamente. ¿De qué color puede ser la suma de un número rojo y un número azul?

Ⓐ imposible determinarlo; Ⓑ rojo o azul; Ⓒ sólo verde; Ⓓ sólo rojo; Ⓔ sólo azul.

Problema 16. El perímetro de la figura mostrada, construida de cuadrados idénticos, es 42 cm. ¿Cuál es su área?



Ⓐ 8 cm^2; Ⓑ 9 cm^2; Ⓒ 24 cm^2; Ⓓ 128 cm^2; Ⓔ 72 cm^2.

Problema 17. Los canguros Hip y Hop juegan a saltar sobre una piedra, de modo que la piedra quede en el punto medio entre los puntos de partida y de llegada del salto. La figura 1 muestra cómo Hop saltó 3 veces, sobre piedras marcadas 1, 2 y 3. Hip también saltó sobre las piedras 1, 2 y 3, en ese orden, pero comenzando en un sitio diferente, como muestra la figura 2.

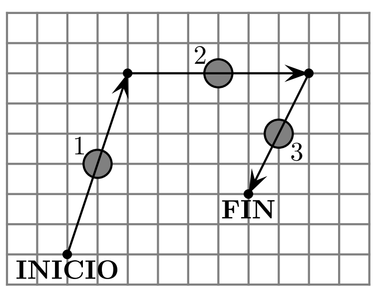


Figura 1: Hop

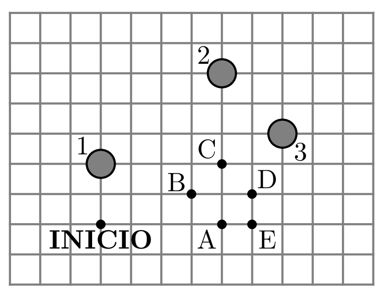
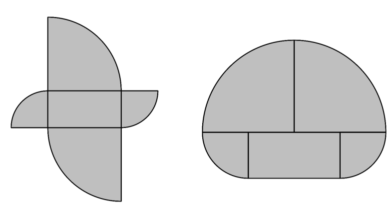


Figura 2: Hip

¿Cuál de los puntos A, B, C, D o E es su punto de llegada?

Ⓐ A; Ⓑ B; Ⓒ C; Ⓓ D; Ⓔ E.

Problema 18. Mire las figuras. Ambas han sido formadas con las mismas cinco piezas. El rectángulo mide 5 cm × 10 cm, y las otras partes son cuartos de dos círculos diferentes. La diferencia entre las medidas de los perímetros de ambas figuras es:

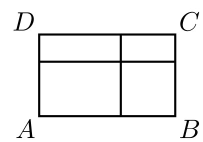


Ⓐ 2,5 cm; Ⓑ 5 cm; Ⓒ 10 cm; Ⓓ 30 cm; Ⓔ 20 cm.

Problema 19. Una pelota de goma cae verticalmente desde una altura de 10 m desde el tejado de una casa. Luego de cada impacto en el piso, rebota hacia arriba hasta los $\frac{4}{5}$ de la altura previa. ¿Cuántas veces pasará la pelota frente a una ventana rectangular cuyo borde inferior está a una altura de 5 m y su borde superior está a una altura de 6 m?

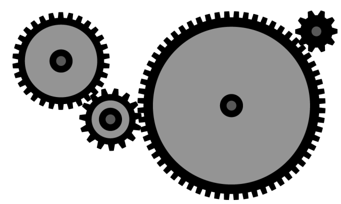
Ⓐ 3; Ⓑ 4; Ⓒ 5; Ⓓ 6; Ⓔ 8.

Problema 20. El rectángulo $ABCD$ se divide en cuatro rectángulos más pequeños, como muestra la figura. Se sabe que los perímetros de tres de los rectángulos pequeños son 11, 16 y 19, y que el cuarto no es ni el más grande ni el más pequeño de los cuatro. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo original $ABCD$?



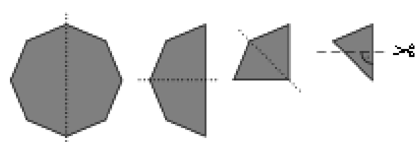
Ⓐ 28; Ⓑ 30; Ⓒ 32; Ⓓ 38; Ⓔ 40.

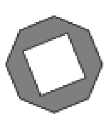
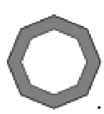
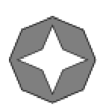
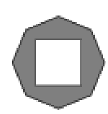
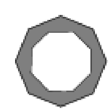
Problema 21. Hay 4 engranajes montados en ejes fijos y conectados cada uno con el siguiente, como muestra la figura. El primer engranaje tiene 30 dientes, el segundo 15, el tercero 60 y el último 10. ¿Cuántas revoluciones da el último engranaje cuando el primero da una revolución?



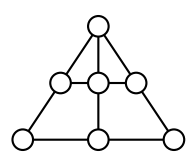
Ⓐ 3; Ⓑ 4; Ⓒ 6; Ⓓ 8; Ⓔ 9.

Problema 22. Un octógono regular se pliega a la mitad exactamente tres veces, hasta obtener un triángulo. Luego se hace un corte perpendicular a un lado y se descarta el trozo que contiene al centro del octógono. Si se deshacen los pliegues, ¿qué figura se obtiene?



Ⓐ  ; Ⓑ  ; Ⓒ  ; Ⓓ  ; Ⓔ  .

Problema 23. Coloque los números del 1 al 7 en los círculos, de manera que la suma de los números en cada una de las líneas de tres círculos indicadas sea la misma. ¿Qué número queda en el círculo superior?

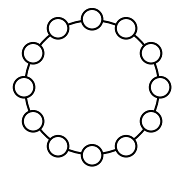


Ⓐ 4; Ⓑ 3; Ⓒ 5; Ⓓ 1; Ⓔ 6.

Problema 24. En una fiesta de cumpleaños hay 12 niños. Cada niño tiene 6, 7, 8, 9 o 10 años, y hay al menos un niño de cada una de esas edades. Cuatro de los niños tienen 6 años. La edad más común en el grupo es 8 años. ¿Cuál es el promedio de las edades de los 12 niños?

(A) 6; (B) 6,5; (C) 7; (D) 7,5; (E) 8.

Problema 25. Kangu desea disponer los doce números del 1 al 12 en una circunferencia de modo que cualquier par de números vecinos difieran en 1 o en 2. ¿Cuáles de los siguientes pares de números deben ser vecinos?

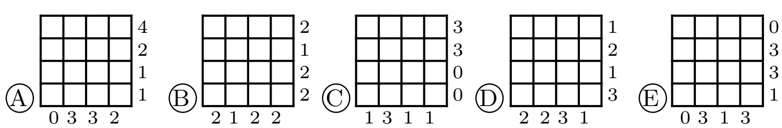


(A) 5 y 6; (B) 10 y 9; (C) 6 y 7; (D) 8 y 10; (E) 4 y 3.

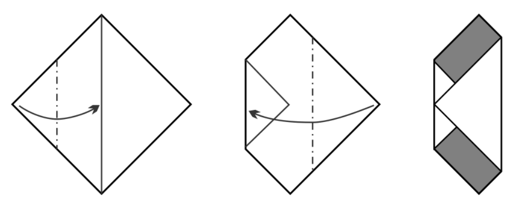
Problema 26. Pedro desea dividir un rectángulo de 6×7 en cuadrados con lados enteros. ¿Cuál es el mínimo número de cuadrados que puede obtener?

(A) 4; (B) 7; (C) 42; (D) 9; (E) 5.

Problema 27. Algunas casillas de un tablero de 4×4 se pintaron de rojo. El número de casillas rojas en cada fila se escribió a la derecha de la fila y el número de casillas rojas en cada columna se escribió debajo de la columna. Luego el color rojo se eliminó. ¿Cuál de los siguientes tableros puede ser el resultado?



Problema 28. Una hoja cuadrada de papel tiene 64 cm^2 de área. El cuadrado se pliega dos veces como muestra la figura. ¿Cuánto suman las áreas de los rectángulos sombreados?



(A) 10 cm^2 ; (B) 14 cm^2; (C) 16 cm^2; (D) 15 cm^2; (E) 24 cm^2.

Problema 29. El número de la casa de Alí tiene tres dígitos; si se elimina el primer dígito, se obtiene el número de la casa de Bruno. Si se elimina el primer dígito del número de la casa de Bruno, se obtiene el número de la casa de Clara. La suma de los números de las casas de Alí, Bruno y Clara da 912. ¿Cuál es el segundo dígito del número de la casa de Ali?

(A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 0.

Problema 30. Yo le di a Ana y a Bruno dos enteros positivos consecutivos, uno a cada uno (por ejemplo 7 a Ana y 6 a Bruno). Ellos sabían que sus números eran consecutivos y por supuesto cada uno conocía su propio número, pero no el del otro. Entonces Ana le dijo a Bruno: "No sé cuál es tu número". Bruno le respondió: "Yo tampoco sé cuál es tu número". A continuación Ana dijo "¡Ya sé cuál es tu número! Es un divisor de 20". ¿Cuál es el número de Ana?

Ⓐ 3; Ⓑ 5; Ⓒ 6; Ⓓ 4; Ⓔ 2.

1.1.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (E), 11 colores, correspondientes a las letras V, I, A, E, L, C, N, G, U, R y O.

2. La respuesta correcta es la (D). El ancho de las dos partes laterales es $6-3=3$ m, y como son iguales, el ancho ce cada una es 1,5 m.

3. La respuesta correcta es la (A). Un cuadrado de dos fósforos por lado puede contener las 16 monedas, y para construirlo se necesitan 8 fósforos.

4. La respuesta correcta es la (E). Hay 24 filas. A 6 asientos por fila serían $24 \times 6 = 144$ asientos, pero se deben restar 2 pues hay una fila de 4 asientos, con lo cual resulta que hay 142 asientos.

5. La respuesta correcta es la (C). El reloj en Madrid marca 9 horas más que en San Francisco, y si a las 9pm de ayer se suman 9 horas resultan las 6 am de hoy.

6. La respuesta correcta es la (E).

7. La respuesta correcta es la (D): $(6+3)\cdot 2+1$.

8. La respuesta correcta es la (A).

9. La respuesta correcta es la (D). Dos globos pueden levantar dos cestas y 160 kgr, o una cesta y 180 kgr. Por lo tanto el peso de la cesta es 20 kgr.

10. La respuesta correcta es la (B). Entre Viviana y Miguel comieron 4 manzanas y 5 peras, luego les quedaron $25-4-5=16$ frutas, de las cuales la mitad (8) son peras. Como se comieron 5, la abuela les dio $8+5=13$ peras.

11. La respuesta correcta es la (C). En el centro debe ir una pieza que tenga al menos un saliente y dos huecos, y la única con esa característica es la 2. En el ángulo superior derecho va una pieza con dos lados rectos, que sólo puede ser la 5 o la 6. Con la 5 se ve enseguida que no se puede completar el cuadrado. En cambio con la 6 sí, colocando debajo la 3.

12. La respuesta correcta es la (B). El dado oculto es adyacente a dados con las letras A, C y D, por lo tanto debe llevar la B.

13. La respuesta correcta es la (B). Se trata simplemente de contar los pares de puntos que no están unidos por líneas.

14. La respuesta correcta es la (C). Por cada 6 partes de vino hay la mitad (3) de vinagre y la tercera parte (2) de agua. Es decir que hay más vino (6) que vinagre y agua juntos $(3 + 2 = 5)$.

15. La respuesta correcta es la (C). Observe que al dividir un entero entre 3, los rojos dejan resto 1, los azules dejan resto 2 y los verdes dejan resto 0. Por lo tanto la suma de un rojo y un azul deja resto 0 y es verde.

16. La respuesta correcta es la (E). Como el perímetro se compone de 14 segmentos idénticos, cada uno de ellos mide $42/14 = 3$ cm y el área de cada cuadrado es $3^2 = 9$ cm ^{2}. Como la figura se compone de 8 cuadrados, su área es $9 \times 8 = 72$ cm ^{2}.

17. La respuesta correcta es la (A). Basta simetrizar sucesivamente el punto de partida respecto a las piedras 1, 2 y 3.

18. La respuesta correcta es la (E). El perímetro de la figura izquierda se compone de 2 cuartos de circunferencias grandes, 2 cuartos de circunferencias pequeñas, 2 segmentos de 10 cm cada uno y 2 segmentos de 5 cm cada uno. El perímetro de la figura derecha se compone de 2 cuartos de circunferencias grandes, 2 cuartos de circunferencias pequeñas y un segmento de 10 cm. La diferencia está compuesta por un segmento de 10 cm y 2 segmentos de 5 cm, que totalizan 20 cm.

19. La respuesta correcta es la (D). Las alturas máximas alcanzadas por la pelota luego de cada rebote son sucesivamente 8 m, 6,4 m, 5,12 m, 4,096 m, etc. La pelota pasa frente a la ventana durante el primer descenso, el primer ascenso, el segundo descenso, el segundo ascenso, el tercer descenso, el tercer ascenso y el cuarto descenso. Pero el tercer ascenso y cuarto descenso cuentan como una sola pasada, ya que la pelota aparece en el marco inferior, sube hasta 5,12 m sin salir de la ventana y luego baja. En total son 6 veces.

20. La respuesta correcta es la (B). Es fácil ver que de los cuatro rectángulos interiores, el de mayor y el de menor perímetro no son adyacentes (es decir que sólo se tocan en un vértice), y que la suma de sus perímetros es igual al perímetro del $ABCD$. Entonces la respuesta es $11 + 19 = 30$.

21. La respuesta correcta es la (A). Cuando el primer engranaje da una vuelta, el segundo da $30/15 = 2$ vueltas, el tercero da $2 \cdot 15/60 = 1/2$ vuelta y el cuarto da $(1/2))(60/10) = 3$ vueltas.

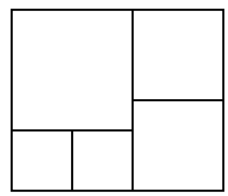
22. La respuesta correcta es la (D). El corte forma alternadamente ángulos de $90°$ y $45°$ con los radios del octógono, determinando un cuadrado.

23. La respuesta correcta es la (A). Sea s la suma común de las líneas y x el búmero en el vértice superior. Sumando las 3 líneas no horizontales y restándoles las 2 horizontales resulta $s = 3x$. Además $2s + x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, de donde $x = 4$ y $s = 12$. Una posible disposición es: 4 en el vértice superior, 1, 6, 5 en la línea horizontal media y 7, 2, 3 en la base.

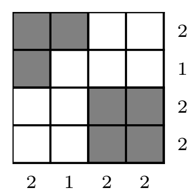
24. La respuesta correcta es la (D). Debe haber al menos 5 niños de 8 años, que con los 4 de 6 años y uno de 7 años, uno de 9 años y uno de 10 años completan 12 niños. Por lo tanto el promedio es $(4 \cdot 6 + 7 + 5 \cdot 8 + 9 + 10)/12 = 7{,}5$.

25. La respuesta correcta es la (D). Ubiquemos en cualquier puesto al 1. A sus lados deben ir 2 y 3, digamos que el 2 a la derecha y el 3 a la izquierda. Entonces a la derecha del 2 sólo puede ir el 4, a la izquierda del 3 el 5, a la derecha del 4 el 6, a la izquierda del 5 el 7, a la derecha del 6 el 8, a la izquierda del 7 el 9, a la derecha del 8 el 10, a la izquierda del 9 el 11 y a la derecha del 10 el 12.

26. La respuesta correcta es la (E), y se logra con un cuadrado de lado 4, dos de lado 3 y dos de lado 2 (ver figura).



27. La respuesta correcta es la (B), que se puede lograr por ejemplo con la coloración que se muestra en la figura. También puede hallarse la respuesta correcta por descarte: (A) no puede ser pues si en la primer columna no hay casillas rojas en la primera fila no puede haber 4. (C) no puede ser pues si en las filas 3 y 4 no hay casillas rojas, en la segunda columna no puede haber 3. (D) no puede ser pues la suma de casillas rojas por filas y por columnas no coinciden (dan 7 y 8). (E) no puede ser pues, como en la primer columna no hay casillas rojas, las casillas de las filas 2 y 3 en las columnas 2, 3 y 4 deben ser rojas, y entonces la columna 3 contendría al menos 2 casillas rojas.



28. La respuesta correcta es la (C). El cuadrado tiene 8 cm de lado, de donde es fácil ver que cada rectángulo sombreado mide 4 cm de ancho y 2 cm de alto.

29. La respuesta correcta es la (C). El problema equivale a hallar los dígitos a, b y c sabiendo que

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ + & & b & c \\ + & & & c \\ \hline & 9 & 1 & 2 \end{array}$$

Enseguida se halla que $c = 4$, $b = 5$ y $a = 8$. Por lo tanto la respuesta es 5.

30. La respuesta correcta es la (A). Si Ana tuviese el 1 entonces Bruno sólo podría tener el 2, y Ana lo hubiese sabido. Como Ana no sabe qué número tiene Bruno, éste sabe que Ana no tiene el 1. Ahora, si Bruno tuviese el 1, sabría que Ana tiene el 2. Y si Bruno tuviese el 2, sabría que Ana tiene el 3 (ya que no tiene el 1). Pero

Bruno no sabe qué número tiene Ana, luego Bruno no tiene ni el 1 ni el 2. En su siguiente afirmación Ana ya sabe qué número tiene Bruno. Eso sólo es posible si Ana tiene el 2 o el 3, pues entonces Bruno tiene el 3 o el 4, respectivamente. Como Ana dice que el número de Bruno es un divisor de 20, ese número debe ser el 4 y Ana tiene el 3.

1.2. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Cuatro barras de chocolate cuestan 6 Bs más que una barra de chocolate. ¿Cuánto cuesta una barra de chocolate?

Ⓐ 1 Bs; Ⓑ 3 Bs; Ⓒ 5 Bs; Ⓓ 4 Bs; Ⓔ 2 Bs.

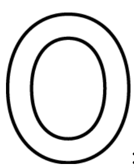
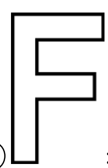
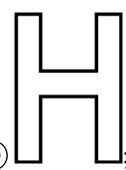
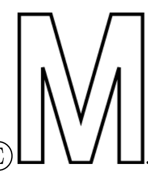
Problema 2. $11{,}11 - 1{,}111 =$

Ⓐ 9,009; Ⓑ 9,0909; Ⓒ 9,999; Ⓓ 9,99; Ⓔ 10.

Problema 3. Un reloj está puesto sobre una mesa, boca arriba y con el minutero señalando hacia el noreste. ¿Cuántos minutos pasarán hasta que el minutero señale hacia el noroeste por primera vez?

Ⓐ 45; Ⓑ 40; Ⓒ 30; Ⓓ 20; Ⓔ 15.

Problema 4. María tiene una tijera y cinco letras de cartulina. Ella corta cada letra mediante un solo corte rectilíneo, de manera que la letra se separe en tantas partes como sea posible. ¿Qué letra se separa en mayor número de partes?

Ⓐ  ; Ⓑ  ; Ⓒ  ; Ⓓ  ; Ⓔ  .

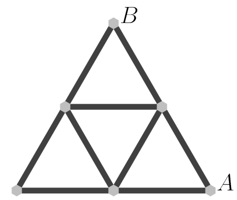
Problema 5. Un dragón tiene cinco cabezas. Cada vez que se le corta una cabeza, le crecen cinco nuevas cabezas. Si se le cortan seis cabezas, una a una, ¿con cuántas cabezas quedará finalmente el dragón?

Ⓐ 25; Ⓑ 28; Ⓒ 29; Ⓓ 30; Ⓔ 35.

Problema 6. ¿En cuál de las siguientes expresiones se puede reemplazar cada 8 por un 5 y obtener el mismo resultado?

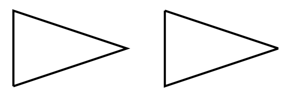
Ⓐ $\dfrac{8+8}{8}+8$; Ⓑ $8\cdot\dfrac{8+8}{8}$; Ⓒ $8+8-8+8$;
Ⓓ $(8+8-8)\cdot 8$; Ⓔ $\dfrac{8+8-8}{8}$.

Problema 7. Cada uno de los 9 tramos de la caminería de un parque mide 100 m de largo. Ana desea ir desde A hasta B sin recorrer ningún tramo más de una vez. ¿Cuál es la longitud del recorrido más largo que puede hacer?



(A) 900 m; (B) 700 m; (C) 400 m; (D) 600 m; (E) 800 m.

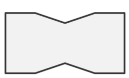
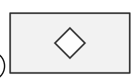
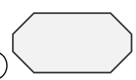
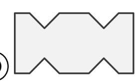
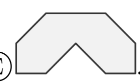
Problema 8. El diagrama muestra dos triángulos. ¿De cuántas maneras se pueden elegir dos vértices, uno en cada triángulo, de manera que la recta que pase por ellos no atraviese a ninguno de los dos triángulos?



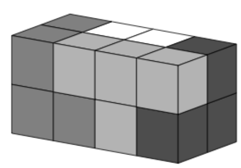
(A) 4; (B) 3; (C) 2; (D) 1; (E) más de 4.

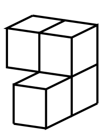
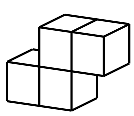
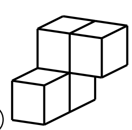
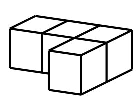
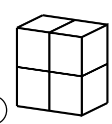
Problema 9. Enrique plegó una hoja de papel como se muestra en la figura, hizo dos cortes rectilíneos con una tijera y luego desplegó el papel.

¿Cuál de las siguientes figuras **no** puede ser el resultado?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) .

Problema 10. Un paralelepípedo recto se construye con cuatro piezas, como muestra la figura. Cada pieza consiste de cuatro cubos y es de un solo color. ¿Cuál es la forma de la pieza blanca?

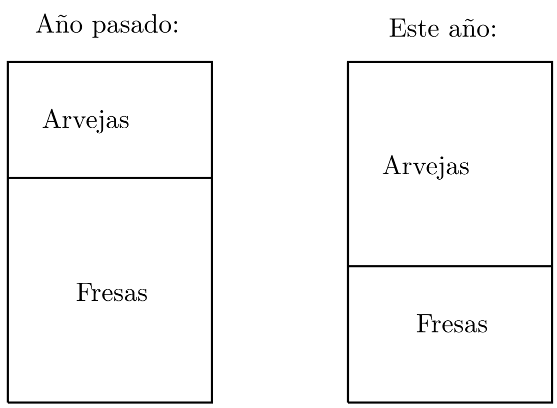


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Problema 11. Kangu forma dos números naturales de cuatro dígitos cada uno usando exactamente una vez cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Kangu desea que la suma de ambos números sea lo menor posible. ¿Cuál es el valor de esa suma mínima?

Ⓐ 2468; Ⓑ 3333; Ⓒ 3825; Ⓓ 4734; Ⓔ 6912.

Problema 12. La señora González cultiva fresas y arvejas. Este año ella cambió la forma rectangular del terreno dedicado a las arvejas a una cuadrada, aumentando uno de sus lados en 3 metros. Como resultado de este cambio, el terreno de las fresas disminuyó su área en 15 m^2.



¿Cuál era el área del terreno de los arvejas antes del cambio?

Ⓐ 5 m^2; Ⓑ 10 m^2; Ⓒ 9 m^2; Ⓓ 18 m^2; Ⓔ 15 m^2.

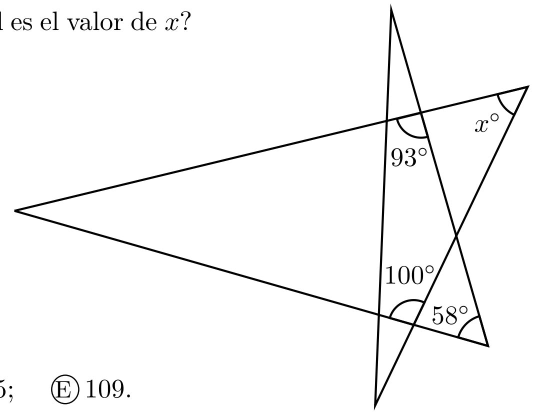
Problema 13. Berta quiere completar el diagrama insertando tres números, uno en cada celda vacía. Ella quiere que los tres primeros números sumen 100, los tres del medio sumen 200 y los tres últimos sumen 300.

10				130

¿Qué número debe colocar en la celda que está en el medio del diagrama?

Ⓐ 50; Ⓑ 60; Ⓒ 70; Ⓓ 75; Ⓔ 100.

Problema 14. En la figura, ¿cuál es el valor de x?

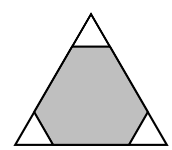


Ⓐ 35; Ⓑ 42; Ⓒ 51; Ⓓ 65; Ⓔ 109.

Problema 15. Juana tiene cuatro tarjetas. Cada tarjeta tiene escrito un número de un lado y una frase del otro. Las cuatro frases son "divisible entre 7", "primo", "impar" y "mayor que 100", y los cuatro números son 2, 5, 7 y 12. En ninguna tarjeta el número se corresponde con la frase. ¿Qué número está escrito en la tarjeta con la frase "mayor que 100"?

Ⓐ 2; Ⓑ 5; Ⓒ 7; Ⓓ 12; Ⓔ imposible determinarlo.

Problema 16. Tres pequeños triángulos equiláteros del mismo tamaño se recortan de las esquinas de un triángulo equilátero mayor de 6 cm de lado. La suma de los perímetros de los tres triángulos pequeños es igual al perímetro del hexágono sombreado. ¿Cuál es el lado de los triángulos pequeños?



Ⓐ 1 cm; Ⓑ 2 cm; Ⓒ 1,2 cm; Ⓓ 1,25 cm; Ⓔ 1,5 cm.

Problema 17. Los ratones robaron varios trozos de queso bajo la mirada indolente del gato Garfield. Garfield observó que cada ratón robó un número diferente de trozos de queso, en todos los casos menor que 10, y que ningún ratón robó exactamente el doble de trozos que otro ratón. ¿Cuál es el mayor número de ratones que Garfield pudo haber visto robando queso?

Ⓐ 6; Ⓑ 4; Ⓒ 8; Ⓓ 5; Ⓔ 7.

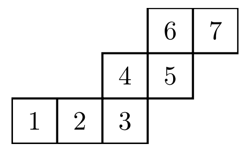
Problema 18. En el aeropuerto hay una cinta transportadora de 500 metros de largo, que se mueve a 4 km/hora. Ana y Bruno suben simultáneamente a la cinta. Ana camina a un velocidad de 6 km/hora sobre la cinta, mientras Bruno permanece quieto. Cuando Ana llega al final de la cinta, ¿a qué distancia está de Bruno?

Ⓐ 100 m; Ⓑ 160 m; Ⓒ 200 m; Ⓓ 250 m; Ⓔ 300 m.

Problema 19. Un cuadrado mágico puede hablar. Cuando dice la verdad, sus lados se acortan 2 cm cada uno. Si miente, su perímetro se duplica. En cierto momento sus lados miden 8 cm y el cuadrado hace cuatro afirmaciones, dos verdaderas y dos falsas, en algún orden. ¿Cuál es el mayor perímetro posible del cuadrado luego de hacer esas cuatro afirmaciones?

(A) 28 cm; (B) 80 cm; (C) 88 cm; (D) 112 cm; (E) 120 cm.

Problema 20. Un cubo rueda sobre un plano rotando sobre sus aristas. La cara inferior pasa por las posiciones 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, en ese orden. ¿Cuál par de esas posiciones fueron ocupadas por la misma cara del cubo?

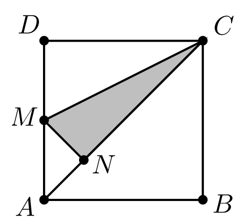


(A) 1 y 7; (B) 1 y 6; (C) 1 y 5; (D) 2 y 7; (E) 2 y 6..

Problema 21. Ricardo tiene cinco cubos diferentes. Cuando los ordena de menor a mayor, la diferencia entre las alturas de dos cubos vecinos es 2 cm. El cubo mayor es tan alto como una torre formada con los dos cubos más pequeños. ¿Qué altura tiene una torre construida con los cinco cubos?

(A) 50 cm; (B) 44 cm; (C) 22 cm; (D) 14 cm; (E) 6 cm.

Problema 22. $ABCD$ es un cuadrado, M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC.¿Cuál es la razón entre el área del triángulo sombreado MNC y el área del cuadrado?

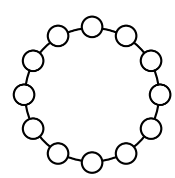


(A) 1:6; (B) 1:5; (C) 7:36; (D) 3:16; (E) 7:40.

Problema 23. El tango se baila en parejas (un hombre y una mujer). En un salón hay no más de 50 personas. En cierto momento, $3/4$ del total de hombres están bailando con $4/5$ del total de mujeres. ¿Cuántas personas están bailando en ese momento?

(A) 24; (B) 20; (C) 32; (D) 30; (E) 46.

Problema 24. David desea disponer los doce números del 1 al 12 en un círculo, de modo que cada par de números vecinos difiera en 2 o en 3. ¿Cuál de los siguientes pares de números deben ser necesariamente vecinos?



(A) 5 y 8; (B) 3 y 5; (C) 7 y 9; (D) 6 y 8; (E) 4 y 6.

Problema 25. Digamos que un entero es *curioso* si (1) tiene tres dígitos y (2) tanto si se le retira el primer dígito, como si se le retira el tercero, lo que queda es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es la suma de todos los números curiosos?

Ⓐ 1013; Ⓑ 1177; Ⓒ 1465; Ⓓ 1993; Ⓔ 2016.

Problema 26. Un libro contiene 30 cuentos, cada uno de los cuales comienza en una nueva página. Las longitudes de los cuentos son 1, 2, 3,. . . , 30 páginas, pero no necesariamente en ese orden. El primer cuento comienza en la página 1. ¿Cuál es el mayor número de cuentos que pueden comenzar en páginas impares?

Ⓐ 15; Ⓑ 18; Ⓒ 20; Ⓓ 21; Ⓔ 23.

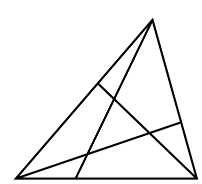
Problema 27. Un triángulo equilátero está inicialmente en una posición y se mueve a una nueva posición en una sucesión de pasos. En cada paso el triángulo rota alrededor de su centro: primero rota 3°, luego rota 9°, luego rota 27°, y así sucesivamente (en el paso n-simo rota $(3^n)°$). ¿Cuántas posiciones diferentes, incluida la inicial, puede ocupar el triángulo? (dos posiciones se consideran iguales si el triángulo ocupa la misma parte del plano),

Ⓐ 3; Ⓑ 4; Ⓒ 5; Ⓓ 6; Ⓔ 360.

Problema 28. Una cuerda se dobla por la mitad y el proceso se repite dos veces más. A la cuerda así doblada se le hace un corte, resultando varios pedazos de cuerda. Las longitudes de dos de esos pedazos son 4 m y 9 m. ¿Cuál de las siguientes **no puede** ser la longitud de la cuerda completa?

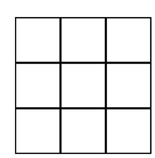
Ⓐ 52 m; Ⓑ 68 m; Ⓒ 72 m; Ⓓ 88 m; Ⓔ todas son posibles.

Problema 29. Un triángulo se divide en cuatro triángulos y tres cuadriláteros trazando tres segmentos de recta. La suma de los perímetros de los tres cuadriláteros es igual a 25 cm. Los perímetros de los cuatro triángulos suman 20 cm. El perímetro del triángulo original es 19 cm. ¿Cuál es la suma de las longitudes de los tres segmentos de recta?



Ⓐ 11 cm; Ⓑ 12 cm; Ⓒ 13 cm; Ⓓ 15 cm; Ⓔ 16 cm.

Problema 30. En cada casilla de un tablero de 3×3 debe colocarse un número positivo, de manera que el producto de los tres números de cada fila y de cada columna sea 1, y que el producto de los cuatro números en cualquier cuadrado de 2×2 sea 2. ¿Qué número debe ir en la casilla central?



Ⓐ 16; Ⓑ 8; Ⓒ 4; Ⓓ $\frac{1}{4}$; Ⓔ $\frac{1}{8}$.

1.2.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (E). Tres barras de chocolate cuestan 6 Bs y por lo tanto cada una cuesta 2 Bs.

2. La respuesta correcta es la (C).

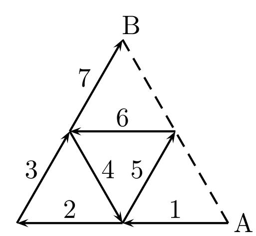
3. La respuesta correcta es la (A), 45 minutos.

4. La respuesta correcta es la (E). Un corte horizontal a la mitad de su altura separa la M en 5 partes, mientras que las demás letras se separan a lo sumo en 4 partes.

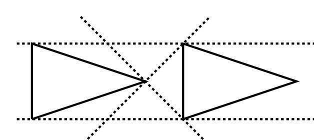
5. La respuesta correcta es la (C). Con cada corte el número de cabezas aumenta en 4, por lo cual luego de 6 cortes tendrá $5 + 4 \times 6 = 29$ cabezas.

6. La respuesta correcta es la (E).

7. La respuesta correcta es la (B). La figura muestra una forma de lograrlo.



8. La respuesta correcta es la (A). La figura muestra las cuatro líneas que se pueden trazar.



9. La respuesta correcta es la (D). Las otras figuras se pueden obtener con dos cortes, pero (D) requiere cuatro.

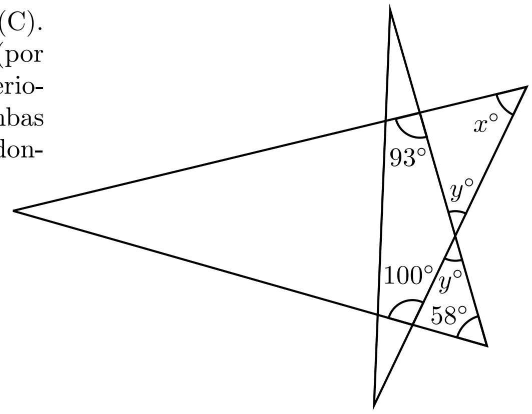
10. La respuesta correcta es la (B).

11. La respuesta correcta es la (C), que se puede obtener por ejemplo con 1357 y 2468.

12. La respuesta correcta es la (B). Al aumentar el lado vertical del campo de arvejas en 3 m, el de las fresas disminuyó también en 3 m. Como el área de las fresas disminuyó en 15 m^2, el ancho del campo es 5 m. El nuevo campo de arvejas es entonces un cuadrado de 5 m de lado, y el año pasado era un rectángulo de 2 m $\times$ 5 m y área 10 m^2.

13. La respuesta correcta es la (B). Si a la suma de los tres números del medio se le resta la suma de los tres primeros, el resultado $200 - 100 = 100$ es igual a la diferencia entre el cuarto y el primero (19), luego el cuarto es 110. Entonces, para completar 300 con 110 y 130, el del medio debe ser 60.

14. La respuesta correcta es la (C). Como $100 = 58 + y$ y $93 = x + y$ (por la propiedad de los ángulos exteriores de un triángulo), restando ambas igualdades resulta $7 = 58 - x$, de donde $x = 51$.



15. La respuesta correcta es la (C). En la tarjeta "primo" debe estar el 12 (el único de los cuatro números que no es primo), en la tarjeta "impar" el 2, en la tarjeta 'divisible entre 7" el 5 y en la que queda ("mayor que 100") el 7.

16. La respuesta correcta es la (E). Para que los perímetros sean iguales, cada lado largo del hexágono debe ser el doble del lado de los triángulos pequeños, de dónde éstos deben ser la cuarta parte del lado del triángulo grande, es decir 1,5 cm.

17. La respuesta correcta es la (A). Del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se pueden escoger el 5, 7 y 9 sin problema (pues ni la mitad ni el doble de alguno de ellos está en el conjunto). Del par $\{3, 6\}$ sólo se ouede escoger uno, y de $\{1, 2, 4, 8\}$ sólo se pueden escoger dos. Así el máximo es 6, que se logra por ejemplo con 1, 3, 4, 5, 7, 9.

18. La respuesta correcta es la (E). Ana se mueve a $4 + 6 = 10$ km/h y por lo tanto recorre los 500 m en 3 minutos. En ese tiempo, a 4 km/h, Bruno avanza 200 m y queda a 300 m de Ana.

19. La respuesta correcta es la (D). Inicialmente el perímetro es 32 cm. Si miente se duplica, si dice la verdad disminuye en 8 cm. El mayor perímetro se alcanza si miente dos veces y luego dice la verdad dos veces, llegando a ser $32 \times 2 times 2 - 8 - 8 = 112$ cm.

20. La respuesta correcta es la (B). Visualizar esto requiere práctica. Una forma de convencerse es usando un dado de verdad, otra es recortar el papel e irlo plegando como si se estuviese empapelando un cubo.

21. La respuesta correcta es la (A). Si el lado del cubo más pequeño es x, los que le siguen en tamaño tienen lados $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ y $x + 8$. La condición es que $x + 8 = x + (x + 2)$, de donde $x = 6$, y la respuesta es $6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 50$.

22. La respuesta correcta es la (D). El área del triángulo AMC es $1/4$ de la del cuadrado $ABCD$, y la del triángulo AMN es $1/4$ de la del triángulo AMC, luego el área del triángulo MNC es $3/4$ de $1/4$, o sea $3/16$ de la del cuadrado $ABCD$.

23. La respuesta correcta es la (A). El número de mujeres bailando es múltiplo de 3, y el de hombres es múltiplo de 4. Como son iguales, deben ser múltiplos de 12. Pero si hubiese 24 mujeres o más bailando el total de personas en el salón pasaría de 50. Luego hay 12 mujeres y 12 hombres, para un total de 24.

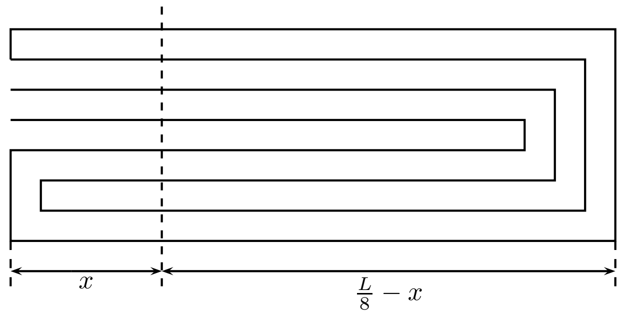
24. La respuesta correcta es la (D). A los lados del 1 deben ir 3 y 4, digamos que el 3 a la derecha y el 4 a la izquierda. El 2 sólo puede ser vecino del 4 y el 5, luego a la izquierda del 4 va el 2 y a su izquierda el 5. Entonces a la derecha del 3 sólo puede ir el 6. De modo análogo (comenzando por el 12) se ve que 7, 10, 12, 9, 11 y 8 deben ser consecutivos. Entonces los números deben ir en el orden 1, 4, 2, 5, 7, 10, 12, 9, 11, 8, 6, 3. El 6 y el 8 son vecinos.

25. La respuesta correcta es la (D). Los cuadrados de dos dígitos son 16, 25, 36, 49, 64 y 81. Por lo tanto los números curiosos son 164, 364, 649 y 816, que suman 1993.

26. La respuesta correcta es la (E). Cada cuento con número impar de páginas comienza en una página de paridad diferente al siguiente. Por lo tanto debe haber al menos 7 cuentos que comienzan en página impar, y a lo sumo 23 que comienzan en página par. Este máximo de 23 se alcanza por ejemplo colocando primero todos los cuentos de longitud par y luego los de longitud impar.

27. La respuesta correcta es la (B). Sea A uno de los vértices. Midiendo los ángulos a partir de un eje Ox con origen en el centro O del triángulo y que pase por la posición inicial de A, el ángulo $\angle A = x$ tomará sucesivamente los valores $0°$, $3°$, $12°$, $39°$, $120°$, y esta última posición coincide con la original. Como $3^5 - 3 = 240$ es divisible entre 120, también lo es $3^{n+4} - 3^n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y resulta que todas las posiciones a partir de la quinta coinciden con alguna anterior. Así, solamente hay 4 posiciones diferentes.

28. La respuesta correcta es la (C). La siguiente figura muestra la cuerda doblada tres veces. Se han exagerado los dobleces por claridad, pero en realidad los segmentos verticales deberían ser inexistentes.



Sea L la longitud de la cuerda y x la distancia del corte (por la línea punteada) a uno de los extremos. Como se ve, al cortar se producen trozos de longitudes x, $2x$ y $2(L/8 - x) = L/4 - 2x$. Como dos de esas longitudes deben ser 4 y 9, se tienen las siguientes posibilidades: (a) $x = 4$, $2x = 8$, $L/4 - 2x = 9$, de donde $L = 68$; (b) $x = 2$, $2x = 4$, $L/4 - 2x = 9$, de donde $L = 52$; (c) $x = 9$, $2x = 18$, $L/4 - 2x = 4$, de donde $L = 88$; (d) $x = 4{,}5$, $2x = 9$, $L/4 - 2x = 4$, de donde $L = 52$. Como se ve, la opción 72 (C) es imposible.

29. La respuesta correcta es la (C). La suma de los perímetros de los tres cuadriláteros y de los cuatro triángulos interiores es igual al perímetro del triángulo exterior más dos veces la suma de los tres segmentos. Por lo tanto la suma de los tres segmentos es $(25 + 20 - 19)/2 = 13$ cm.

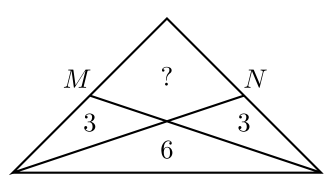
30. La respuesta correcta es la (A). Su se multiplican los números de cada cuadrado 2×2, y esos cuatro productos se multiplican, se obtiene 16. Si a continuación se multiplica por los números de las filas superior e inferior, y por los de las columnas izquierda y derecha, se obtiene el mismo resultado. En ese producto cada número del cuadrado aparece tres veces como factor, excepto el central, que aparece cuatro veces. Como el producto de todos los números del cuadrado es 1, se sigue que el central es 16.

1.3. Prueba de Cuarto Año y Quinto Año

Problema 1. $11{,}11 - 1{,}111 =$

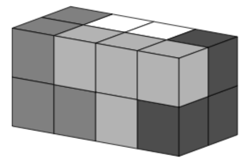
Ⓐ 10; Ⓑ 9,009; Ⓒ 9,0909; Ⓓ 9,99; Ⓔ 9,999.

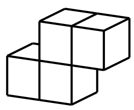
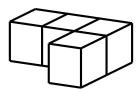
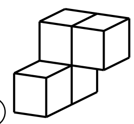
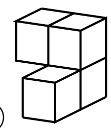
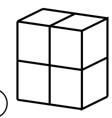
Problema 2. En el diagrama se muestra un triángulo isósceles. M y N son los puntos medios de los lados iguales. El triángulo está dividido en cuatro regiones. Los números 3, 3 y 6 indican el área de la región donde están ubicados. ¿Cuál es el área de la cuarta región?



Ⓐ 3; Ⓑ 4; Ⓒ 5; Ⓓ 6; Ⓔ 7.

Problema 3. Un paralelepípedo recto se construye con cuatro piezas, como muestra la figura. Cada pieza consiste de cuatro cubos y es de un solo color. ¿Cuál es la forma de la pieza blanca?

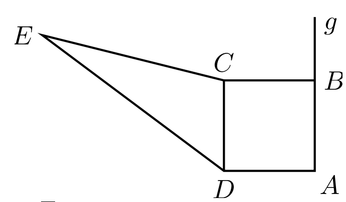


Ⓐ  Ⓑ  Ⓒ  Ⓓ  Ⓔ 

Problema 4. Alicia y Roberto se envían mensajes en clave usando la siguiente codificación. Primero cada letra en el mensaje se escribe con un número distinto según se muestra en la lista: $A = 01$, $B = 02$, $C = 03$, $\ldots$, $Z = 27$. Después de cambiar cada letra al número que le corresponde, se multiplica cada número por dos y se le suma 9. De esta forma se tiene la secuencia de números que se va enviar.Si esta mañana Alicia le envió a Roberto la secuencia $25 - 41 - 43 - 38$. ¿Cuál es el mensaje que le envió Alicia?

Ⓐ HOLA; Ⓑ HOJA; Ⓒ HORA; Ⓓ HOZA; Ⓔ Alicia se equivocó..

Problema 5. La longitud de cada uno de los lados del cuadrado $ABCD$ es de 4 cm. Si el área del cuadrado es igual al área del triángulo ECD. ¿Cuál es la distancia del punto E a la recta g?



Ⓐ 8 cm; Ⓑ $(4 + 2\sqrt{3})$ cm; Ⓒ 12 cm; Ⓓ $10\sqrt{2}$ cm;
Ⓔ Depende de la ubicación de E.

Problema 6. Si calculamos la suma de los dígitos de un número de siete cifras nos da 6. ¿Cuál es el producto de estos dígitos?

Ⓐ 5; Ⓑ 6; Ⓒ 7; Ⓓ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$; Ⓔ 0.

Problema 7. ABC es un triángulo rectángulo con catetos de longitud 6 cm y 8 cm. Los puntos K, L, M son los puntos medios de los lados del triángulo.¿Cuánto mide el perímetro del triángulo KLM?

Ⓐ 10 cm; Ⓑ 12 cm; Ⓒ 15 cm; Ⓓ 20 cm; Ⓔ 24 cm.

Problema 8. ¿Cuántos números de cuatro cifras hay, tal que el dígito de las centenas es 3 y la suma de las otras tres cifras también es 3?

Ⓐ 6; Ⓑ 5; Ⓒ 4; Ⓓ 3; Ⓔ 2.

Problema 9. Cuatro de las cinco expresiones dadas tienen la siguiente propiedad: Si reemplazamos el 8 por otro número entero positivo (usando siempre el mismo número en cada reemplazo) se obtiene el mismo resultado. ¿Cuál es la expresión que no tiene esta propiedad?

Ⓐ $\dfrac{8+8-8}{8}$; Ⓑ $8+\dfrac{8}{8}-8$; Ⓒ $\dfrac{8+8}{8+8}$; Ⓓ $8-\dfrac{8}{8}+8$; Ⓔ $\dfrac{8\cdot\frac{8}{8}}{8}$.

Problema 10. Dos lados de un cuadrilátero tienen longitudes iguales a 1 y 4. Una de las diagonales tiene longitud 2, y divide al cuadrilátero en dos triángulos isósceles. ¿Cuánto mide el perímetro del cuadrilátero?

Ⓐ 12; Ⓑ 11; Ⓒ 10; Ⓓ 9; Ⓔ 8.

Problema 11. Si Darío se para sobre la mesa y José en el piso, entonces Darío es 80 cm más alto que José. Sin embargo, si José se para sobre la mesa y Darío se para en el piso, entonces José es un metro más alto que Darío. ¿Cuál es la altura de la mesa?

Ⓐ 20 cm; Ⓑ 80 cm; Ⓒ 90cm; Ⓓ 100 cm; Ⓔ 120 cm.

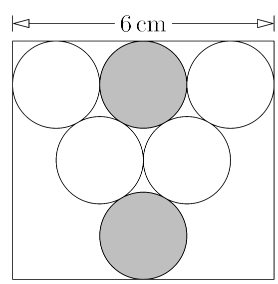
Problema 12. Al dividir cada uno de los números 144 y 220 entre el entero positivo N, se obtiene en ambos casos un residuo igual a 11. ¿Cuál es el valor de N?

Ⓐ 38; Ⓑ 19; Ⓒ 15; Ⓓ 11; Ⓔ 7.

Problema 13. Isabel y Laura jugaban a lanzar una moneda al aire. Si salía cara ganaba Laura e Isabel tenía que darle dos caramelos. Si salía sello, entonces ganaba Isabel y Laura le tenía que dar tres caramelos. Luego de lanzar la moneda 30 veces, ambas tenían la misma cantidad de caramelos que al comenzar el juego. ¿Cuántas veces ganó Isabel?

Ⓐ 6; Ⓑ 12; Ⓒ 18; Ⓓ 24; Ⓔ 30.

Problema 14. Dentro de un rectángulo de lado 6 cm se disponen círculos formando un triángulo, como se muestra en la figura. ¿ Cuál es la menor distancia entre los dos círculos grises?

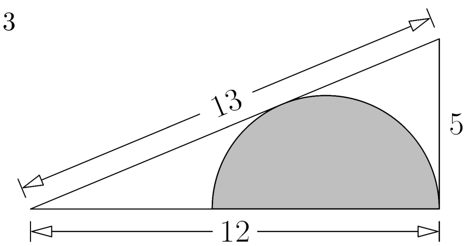


Ⓐ 1; Ⓑ $\sqrt{2}$; Ⓒ $2\sqrt{3}-2$; Ⓓ $\frac{\pi}{2}$; Ⓔ 2.

Problema 15. En la habitación de Jorge hay cuatro relojes. Cada uno de ellos se atrasa o se adelanta. Uno de ellos da la hora con 2 minutos de diferencia con la hora correcta, otro está mal por 3 minutos, otro por 4 minutos y el restante por 5 minutos. Un día Jorge quiso saber la hora exacta usando sus cuatro relojes. De acuerdo al primer reloj la hora era, 6 minutos para las 3, el segundo marcaba 3 minutos para las 3, el tercero las 3 y 2 minutos, y el cuarto las 3 y 3 minutos. ¿Cuál era la hora exacta?

Ⓐ 2:57; Ⓑ 2:58; Ⓒ 2:59; Ⓓ 3

Problema 16. El diagrama muestra un triángulo rectángulo con lados de longitud 5, 12 y 13. ¿ Cuál es el radio de la semicircunferencia inscrita?



Ⓐ 7/3; Ⓑ 13/3; Ⓒ 12/3; Ⓓ 17/3; Ⓔ 10/3.

Problema 17. Kanga está llenando un tablero 4×3 con los números del 1 al 9, de tal manera que la suma de los números en cada fila sea la misma y la suma de los números en cada columna sea la misma. Kanga ya ha puesto algunos números, como se indica en la figura. ¿ Cuál es el número que se debe poner en la casilla sombreada?

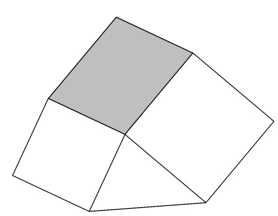
2	4		2
	3	3	
6		1	

Ⓐ 4; Ⓑ 6; Ⓒ 8; Ⓓ 9; Ⓔ 1.

Problema 18. Los atletas Can, Gu y Ro pariciparon en un maratón. Antes de la carrera cuatro espectadores discutieron sobre sus respectivas posibilidades. El primero dijo: "El ganador será Can o Gu". El segundo dijo: "Si Gu llega de segundo, entonces el ganador será Ro". El tercero dijo: "Si Gu es el tercero, entonces Can no ganará". El cuarto dijo: "Yo creo que el segundo lugar está entre Gu y Ro". Después de la carrera ocurrió que todos dijeron la verdad. Can, Gu y Ro llegaron en los tres primeros lugares. ¿En qué orden llegaron?

Ⓐ Can, Gu, Ro; Ⓑ Can, Ro, Gu; Ⓒ Ro, Gu, Can;
Ⓓ Gu, Can, Ro; Ⓔ Gu, Ro, Can.

Problema 19. El diagrama muestra una figura formada por dos cuadrados de lados 4 y 5 cm, un triángulo cuya área es 8 cm^2 y un paralelogramo sombreado. ¿Cuánto mide el área del paralelogramo?

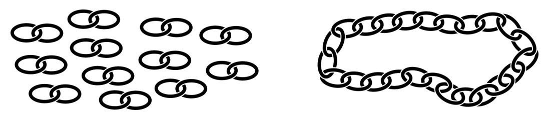


Ⓐ 21 cm^2; Ⓑ 20 cm^2; Ⓒ 18 cm^2; Ⓓ 16 cm^2; Ⓔ 15 cm^2.

Problema 20. Ana ha escrito $2012 = m^m \cdot (m^k - k)$ con m y k enteros positivos. ¿Cuál es el valor de k?

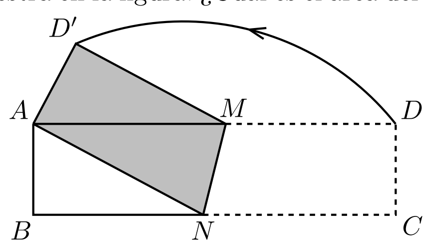
Ⓐ 11; Ⓑ 9; Ⓒ 4; Ⓓ 3; Ⓔ 2.

Problema 21. Un joyero tiene 12 pedazos de cadena, cada uno con dos eslabones. Él quiere hacer un collar con ellos como muestra la figura. Para hacerlo tendrá que cortar algunos eslabones (y luego volverlos a pegar). ¿Cuál es el menor número de eslabones que tendrá que cortar?



Ⓐ 8; Ⓑ 9; Ⓒ 10; Ⓓ 11; Ⓔ 12.

Problema 22. Una hoja de papel rectangular $ABCD$ de medidas 4 cm $\times$16 cm se dobla a lo largo de la recta MN de tal forma que el vértice C coincide con el vértice A, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del pentagono $ABNMD'$?



Ⓐ 17 cm^2; Ⓑ 27 cm^2; Ⓒ 37 cm^2; Ⓓ 47 cm^2; Ⓔ 57 cm^2.

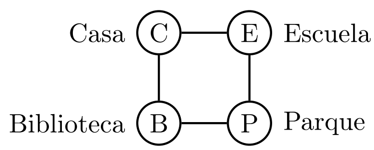
Problema 23. El tren G tarda 8 segundos en pasar completo frente a una señal X. Luego se cruza con el tren H, que va en dirección contraria. Los dos trenes se pasan por completo uno al otro en 9 segundos. Luego el tren H pasa completo frente a la misma señal X en 12 segundos. ¿Cuál de las siguientes proposiciones sobre las longitudes de los trenes es cierta?

Ⓐ La longitud de G es el doble de la de H;
Ⓑ G y H tienen la misma longitud; Ⓒ H es 50 % más largo que G;
Ⓓ La longitud de H es el doble de la de G;
Ⓔ No se puede deducir nada sobre las longitudes de los trenes.

Problema 24. ¿ Cuál es el último dígito no nulo del número $K = 2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$?

Ⓐ 2; Ⓑ 1; Ⓒ 6; Ⓓ 4; Ⓔ 9.

Problema 25. El diagrama muestra un tablero para el juego Canguro. Al comienzo el Canguro está en la Escuela (E). De acuerdo a las reglas del juego, si el Canguro está en cualquier posición que no sea su Casa (C), él puede saltar a cualquiera de las dos posiciones vecinas. El juego termina cuando el Canguro llega a C. ¿De cuántas formas distintas se puede mover el Canguro desde E hasta C dando exactamente 13 saltos?



Ⓐ 32; Ⓑ 12; Ⓒ 144; Ⓓ 64; Ⓔ 1024.

Problema 26. Tenemos 5 lámparas, cada una de ellas con su interruptor. Cada lámpara puede estar encendida o apagada. Cada vez que se acciona un interruptor, el estado de la lámpara correspondiente cambia (de apagada a encendida o de encendida a apagada) y además el estado de otra lámpara (tomada al azar) también cambia. Al comienzo todas las lámparas están apagadas. A continuación se accionan los interruptores 10 veces en total. Luego de eso, ¿cuál de las siguientes proposiciones es cierta?

Ⓐ Es imposible que todas las lámparas queden apagadas;
Ⓑ Todas las lámparas quedan encendidas;
Ⓒ Quedan al menos una lámpara encendida y otra apagada;
Ⓓ Todas las lámparas quedan apagadas;
Ⓔ Es imposible que todas las lámparas queden encendidas.

Problema 27. Nos dan seis enteros positivos diferentes y el mayor de ellos es n. Existe exactamente una sola pareja de estos enteros tal que el menor número de la pareja, no divide al mayor. ¿Cuál es el menor valor posible para n?

Ⓐ 18; Ⓑ 24; Ⓒ 20; Ⓓ 45; Ⓔ 36.

Problema 28. José escribió todos los números enteros de tres dígitos y para cada uno de ellos escribió también el producto de sus dígitos. Luego de esto José calculó la suma de todos estos productos. ¿Qué número obtuvo José?

Ⓐ 45; Ⓑ 45^2; Ⓒ 45^3; Ⓓ 2^{45}; Ⓔ 3^{45}.

Problema 29. Los números de 1 a 120 están escritos en 15 filas, en la forma que nos indica el diagrama. ¿Para cuál columna (contando de izquierda a derecha) la suma de los números en ella es la mayor posible?

1							$\cdots$	
2	3						$\cdots$	
4	5	6					$\cdots$	
7	8	9	10				$\cdots$	
11	12	13	14	15			$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
106	107	108	109	110	111	112	$\cdots$	120

(A) 1; (B) 13; (C) 5; (D) 10; (E) 7.

Problema 30. Sean A, B, C, D, E, F, G, H los ocho vértices consecutivos de un octágono convexo. De los vértices C, D, E, F, G, H elegimos uno de ellos al azar y trazamos el segmento que lo conecta con el vértice A. De nuevo elegimos un vértice del mismo grupo de seis vértices anterior, y trazamos el segmento que lo une con el vértice B. ¿ Cuál es la probabilidad de que estos dos segmentos corten al octágono en exactamente tres regiones?

(A) $\frac{5}{18}$; (B) $\frac{4}{9}$; (C) $\frac{1}{6}$; (D) $\frac{1}{4}$; (E) $\frac{1}{3}$.

1.3.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (E).

2. La respuesta correcta es la (D). Como M es punto medio, la ceviana que pasa por M divide al triángulo dado en dos triángulos de igual área, de donde se sigue que el área de la cuarta región es 6.

3. La respuesta correcta es la (A).

4. La respuesta correcta es la (E). El número 38 no puede aparecer, porque al multiplicar por 2 y sumar 9 el resultado debe ser siempre impar.

5. La respuesta correcta es la (C). Como el triángulo ECD tiene igual área que el cuadrado $ABCD$, su altura respecto al lado CD debe ser el doble del lado del cuadrado, es decir 8 cm, y entonces la respuesta es $8 + 4 = 12$ cm.

6. La respuesta correcta es la (E). Si todos los dígitos fuesen positivos entonces su suma sería al menos 7. Como es 6, alguno es 0 y el producto de todos es 0.

7. La respuesta correcta es la (B). La hipotenusa del $\triangle ABC$ es $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm y su perímetro es $6 + 8 + 10 = 24$ cm. El $\triangle KLM$ es semejante al $\triangle ABC$ con razón de semejanza $1/2$, por lo tanto su perímetro es 12 cm.

8. La respuesta correcta es la (A). Los números en cuestión son 1302, 1311, 1320, 2301, 2310 y 3300.

9. La respuesta correcta es la (D). Las demás tienen valor fijo 1.

10. La respuesta correcta es la (B). Los triángulos isósceles que se pueden formar tienen medidas 2, 2, 1 y 2, 4, 4. El perímetro buscado es $4+4+2+1=11$.

11. La respuesta correcta es la (C). Si D, J y M son las alturas de darío, José y la mesa, en centímetros, entonces se tiene $D+M=J+80$ y $J+M=D+100$. Sumando ambas igualdades y simplificando resulta $M=90$.

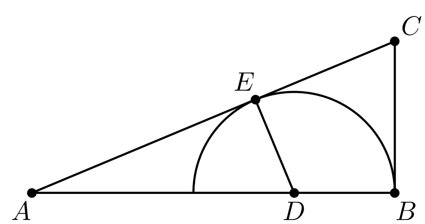
12. La respuesta correcta es la (B). Como $144=qN+11$ y $220=sN+11$ resulta que $133=qN$ y $209=sN$. Entonces N divide a $133=7\cdot 19$ y a $209=11\cdot 19$, y como $N>11$ debe ser $N=19$.

13. La respuesta correcta es la (B). Si Isabel ganó x veces, entonces Laura le tuvo que dar $3x$ caramelos, mientras que isabel de dió a Laura $2(30-x)$ caramelos. Igualando estas dos cantidades resulta $x=12$.

14. La respuesta correcta es la (C). El radio de cada circunferencia es 1 cm. El centro de una circunferencia sombreada y los centros de las dos circunferencias que son tangentes a las dos sombreadas son los vértices de un triángulo equilátero de lado 2 cm. por lo tanto la distancia entre los centros de las circunferencias sombreadas es el doble de la altura de un triángulo equilátero de lado 2 cm, a saber $2\sqrt{3}$ cm. Restando el radio de cada una de ellas se obtiene la respuesta $2\sqrt{3}-2$ cm.

15. La respuesta correcta es la (C), pues es la única hora que tiene diferencias de 2, 3, 4 y 5 minutos con las cuatro dadas.

16. La respuesta correcta es la (E). Como $CE=CB=5$ se tiene $EA=13-5=8$, y como $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle AED$ resulta $DE/EA=CB/BA$, de donde $r=DE=8\cdot 5/12=10/3$. Alternativamente se puede aplicar el teorema de Pitágoras al $\triangle AED$, para obtener $r^2+8^2=(12-r)^2$, de donde $64=144-24r$ y $r=80/24=10/3$.



17. La respuesta correcta es la (A). Si F es la suma de cada fila y C la de cada columna, entonces $3F=4C$ (suma de todos los elementos). El tercer elemento de la fila superior es $F-8=C-4=(3/4)F-4$, de donde $F=16$ y $C=12$. Se sigue que el segundo elemento de la fila inferior es 5 y en la casilla sombreada va el 4.

18. La respuesta correcta es la (E). Se puede verificar que es la única alternativa que cumple todas las condiciones, o bien razonar así: Si Gu es segundo, por lo que dijo el segundo el ganador sería Ro, contradiciendo al primero. Entonces por lo que dijo el quinto Ro llegó segundo. Pero Can y Gu no pueden llegar primero y tercero (por lo que dijo el tercero), luego el orden es Gu, Ro, Can.

19. La respuesta correcta es la (D). Si se traza la diagonal del paralelogramo que pasa por el vértice común a los dos cuadrados, se forman dos triángulos que es fácil ver que son congruentes al triángulo de 8 cm^2, luego la respuesta es 16 cm^2.

20. La respuesta correcta es la (B). Como $2012 = 2^2 \cdot 503$ y 503 es primo, m sólo puede ser 2. Entonces $2^k - k = 503$, de donde $k = 9$.

21. La respuesta correcta es la (A). Se cortan los 8 eslabones de 4 pedazos de cadena y se usan para unir los 8 pedazos restantes formando un collsr.

22. La respuesta correcta es la (D). Sea P la proyección del punto M sobre el lado BC. Entonces $\triangle MPN$ es semejante a $\triangle ABC$, por lo tanto $NP = PM \cdot BC/AB =$ 1 cm y se sigue que $BN = 7{,}5$ cm. Como $ANMD'$ tiene igual área que $MNCD$ y $MNBA$, es decir 32 cm^2, y el área de $\triangle ABN$ es $7{,}5 \cdot 4/2 = 15$ cm^2, la respuesta es $32 + 15 = 47$ cm^2.

23. La respuesta correcta es la (A). Si G y H representan las longitudes de los trenes y g y h sus velocidades, entonces de los datos se obtienen las ecuaciones

$$g = \frac{G}{8}, \quad g + h = \frac{G+H}{9}, \quad h = \frac{H}{12}.$$

Restando a la segunda la primera y la tercera resulta

$$\frac{G+H}{9} = \frac{G}{8} + \frac{H}{12},$$

de donde se sigue que $G = 2H$.

24. La respuesta correcta es la (D). K se puede escribir como $2^6 \cdot 3^4 \cdot 10^{53} = 64 \cdot 81 \cdot 10^{53} = 5184 \cdot 10^{53}$.

25. La respuesta correcta es la (D). El primer salto debe ser hacia P. Luego debe saltar a B o E, y regresar a P. Esto último se repite cuatro veces más. Finalmente salta de P a B o E y de allí a C. Como tuvo 6 veces la posibilidad de elegir entre E y B, la respuesta es $2^6 = 64$.

26. La respuesta correcta es la (E). La paridad del número de lámparas encendidas es invariante (pues en cada paso aumenta en 2, queda igual o disminuye en 2). Luego es imposible que queden las cinco encendidas.

27. La respuesta correcta es la (B), que se alcanza con los números 1, 2, 4, 8, 16 y 24.

28. La respuesta correcta es la (C). El número que obtuvo fue

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^3 = 45^3.$$

29. La respuesta correcta es la (C). Al pasar de la columna k a la $k + 1$ la suma de elementos disminuye en $k(k + 1)/2$ (el elemento superior de la columna k) y aumenta en $15-k$ (una unidad por cada fila desde la $k+1$ a la 15). O sea que la suma aumenta en $15-k-k(k+1)/2 = 15-k(k+3)/2$. esta cantidad es positiva para $k \leq 4$ y negativa para $k \geq 5$, por lo tanto la suma es máxima en la quinta columna. Por supuesto que también se puede proceder por fuerza bruta, calculando todas las sumas.

30. La respuesta correcta es la (A). Hay $6 \times 6 = 36$ pares de vértices, de los cuales cumplen la condición solamente 10, a saber (D,D), (E,D), (E,E), (F,D), (F,E), (F,F), (G,D), (G,E), (G,F) y (G,G). por tanto la probabilidad es $10/36 = 5/18$.

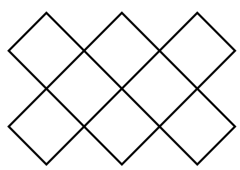
Capítulo 2

Prueba Regional

La prueba regional de la OJM consta de cinco problemas, que se valoran en una escala de 1 a 7. Los participantes disponen de tres horas Y MEDIA para resolverlos.

2.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. El área de la siguiente figura, construida con cuadrados idénticos, es 72 cm^2. ¿Cuál es su perímetro?



Problema 2. Entre los compañeros de clase de Nicolás hay el doble de niñas que de niños. Se sabe que el número total de alumnos en la clase es un múltiplo de 5, mayor que 10 y menor que 40. ¿Cuál es ese número?

Problema 3. En una lista de cinco números, el primero es 2 y el último es 12. El producto de los tres primeros números es 30, el producto de los tres del medio es 90 y el producto de los últimos tres es 360. ¿Cuáles son los tres números del medio?

2				12

Problema 4. En un juego de fútbol el ganador obtiene 3 puntos y el perdedor 0 puntos. Si el juego termina en un empate, entonces cada equipo obtiene un punto. La Vinotinto ha jugado 38 veces y ha obtenido 80 puntos. ¿Cuál es el mayor número posible de juegos que ha perdido?

Problema 5. Halle todos los enteros n, $1 \leq n \leq 8$, tales que sea posible marcar algunas casillas en un tablero de 5×5 de modo tal que haya exactamente n casillas marcadas en cada cuadrado de 3×3.

2.1.1. Soluciones

1. La figura se compone de 8 cuadrados, luego el área de cada uno de ellos es $72/8 = 9$ cm^2 y por lo tanto el lado de cada cuadrado mide 3 cm. El perímetro se compone de 16 segmentos de 3 cm cada uno, por lo tanto es $16 \times 3 = 48$ cm.

2. Los compañeros de Nicolás son múltiplo de 3, luego el número buscado es un múltiplo de 5 entre 10 y 40 que deja resto 1 al dividirlo entre 3. Como 15 deja resto 0, 20 deja resto 2, 25 deja resto 1, 30 deja resto 0 y 35 deja resto 2, la respuesta es 25.

3. Si se divide el producto de los tres del medio entre el producto de los tres primeros se obtiene $90/30 = 3$, pero eso debe ser igual al cuarto entre el primero (2), luego el cuarto es 6 (también se puede llegar a esa conclusión dándole varios valores al 2º número y calculando los demás). Entonces el del medio es $360/(6 \times 12) = 5$ y el segundo es $30/(2 \times 5) = 3$.

Es claro que los tres números pueden ser hallados también en otro orden.

Solución alternativa: Si llamamos x al segundo número, entonces el tercero debe ser $30/(2x) = 15/x$. Entonces el producto del segundo y el tercero es 15, por lo tanto el cuarto es $90/15 = 6$. Luego el del medio es $360/(6 \times 12) = 5$. Finalmente el segundo es $30/(2 \times 5) = 3$.

4. La respuesta es 10. Para obtener 80 puntos en el menor número de juegos posible la Vinotinto debe ganar 26 juegos y empatar 2 ($26 \times 3 + 2 = 80$), es decir que requiere 28 juegos. Si jugó 38 juegos, entonces perdió a lo sumo $38 - 28 = 10$.

5. Es posible para todos los enteros desde el 1 hasta el 8, como muestran los siguientes diagramas:

		X		

$n = 1$

		X		
		X		
		X		

$n = 2$

		X		
		X		
		X		
		X		
		X		

$n = 3$

		X		
		X		
	X	X		X
		X		
		X		

$n = 4$

X	X		X	X
X	X		X	X
X			X	
X	X		X	X
X	X		X	X

$n = 5$

X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X

$n = 6$

X	X	X	X	X
X	X		X	X
X	X		X	X
X	X	X	X	X
X	X		X	X

$n = 7$

X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X		X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X

$n = 8$

2.2. Prueba de Segundo Año

Los problemas 1, 3, 4 y 5 de Segundo Año fueron los mismos que los de Primer Año (ver pág. 31). Las pruebas sólo se diferenciaron en el problema 2, que se enuncia a continuación.

Problema 2. Una hoja rectangular de papel mide 192×84 mm. La hoja se corta a lo largo de una línea recta hasta obtener dos partes, una de las cuales es un cuadrado. Luego se hace lo mismo con la parte no cuadrada que quedó, y así sucesivamente. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado más pequeño que se puede obtener con este procedimiento?

2.2.1. Soluciones

2. La respuesta es 12mm, ya que los cortes sucesivos producen hojas no cuadradas de dimensiones 108×84, 24×84, 24×60, 24×36, 12×36, 12×24, y en el próximo corte quedan dos hojas cuadradas de 12×12.

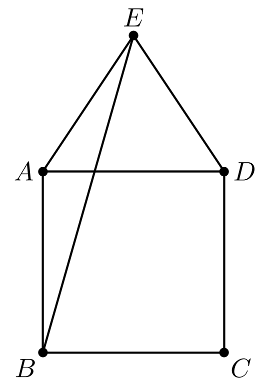
Solución alternativa: En general, si $a > b$ entonces $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(a - b, b)$. Por lo tanto, al ir descartando cuadrados, siempre nos quedamos con piezas tales que el mcd de sus lados es el mismo que el del rectángulo original. El proceso se detiene cuando nos queda un cuadrado, cuyo lado será entonces el mcd de los lados del rectángulo original. En este caso, $\mathrm{mcd}(192, 84) = 12$.

2.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Idéntico al Problema 2 de Primer Año (ver pág. 31).

Problema 2. Sean m y n enteros positivos, tales que $19 \le m \le 49$, y $51 \le n \le 101$. ¿Cuál es el mayor valor posible para la expresión $\dfrac{m+n}{n-m}$?

Problema 3
$ABCD$ es un cuadrado de lado 4 cm, $AE = DE$ y el área del pentágono $ABCDE$ es 22 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo ABE?



Problema 4. Sean a, b, c y d números reales positivos tales que $a^b = \sqrt{c}$ y $c^d = 5$. ¿Cuál es el valor de a^{6bd}?

Problema 5. Se tienen doce pelotas numeradas del 1 al 12. Cada una se colorea con verde o azul de tal manera que se satisfacen las dos condiciones siguientes:

(a) si dos pelotas marcadas a y b son azules y $a+b < 13$, entonces la bola $a+b$ es azul.

(b) si dos pelotas marcadas a y b son verdes y $a+b < 13$, entonces la bola $a+b$ es verde.

¿De cuántas maneras distintas se pueden pintar las pelotas?

2.3.1. Soluciones

1. Ver solución al problema 2 de Primer Año pág. 32.

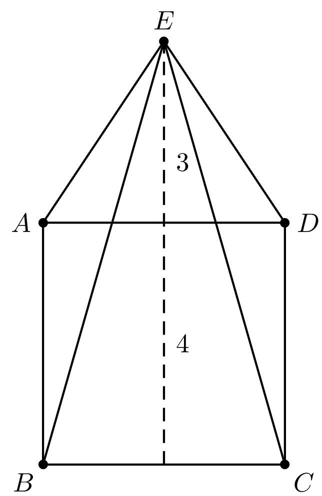
2. Tenemos que $\frac{n+m}{n-m} = \frac{n-m+2m}{n-m} = 1 + \frac{2m}{n-m}$. Para alcanzar el mayor valor, m debe ser lo más grande posible y la diferencia $n-m$debe ser lo más pequeña posible. Es claro que ambas condiciones se logran cuando m toma su mayor valor posible (49) y n su menor valor posible (51). En ese caso el valor de la expresión es $100/2 = 50$.

Al mismo resultado se llega observando que $\frac{n+m}{n-m} = \frac{1+\frac{m}{n}}{1-\frac{m}{n}}$.

3. Como $AE = DE$, el punto E está en la mediatriz del segmento AD, que es paralela al segmento AB. Por lo tanto la altura del triámgulo ABE sobre el lado AB es la mitad de AD, es decir 2 cm, y su área es $\frac{4\times 2}{2} = 4$ cm.

Solución alternativa: Usando [ ] para denotar áreas, se tiene que $[ABCD] = 4^2 = 16$ Y $[ABCDE] = 22$, luego $[ADE] = 22 - 16 = 6$ y la altura del triángulo

ADE sobre AD es $2[ADE]/AD = 2 \times 6/4 = 3$. Entonces la altura del triángulo BCE sobre BC es $4 + 3 = 7$ y $[BCE] = 4 \times 7/2 = 14$. Como los triángulos ABE y CDE tienen igual área por ser simétricos, el área de cada uno de ellos es $(22 - 14)/2 = 4$ cm^2.



4. Elevando al cuadrado la primera igualdad se tiene $(a^b)^2 = c$, o sea $a^{2b} = c$. Elevando esta última igualdad a la d resulta $(a^{2b})^d = c^d$, o sea $a^{2bd} = 5$. Y elevando esta última al cubo resulta $(a^{2bd})^3 = 5^3$, o sea $a^{6bd} = 125$.

También se puede hacer en una línea: $a^{6bd} = (a^b)^{6d} = (\sqrt{c})^{6d} = c^{3d} = (c^d)^3 = 5^3 = 125$.

5. Supongamos que la pelota marcada con el 1 es azul. Si la pelota marcada con el 2 también es azul, entonces las marcadas con $1+2=3$, $1+3=4, \ldots, 1+11=12$ son todas azules. Por lo tanto en este caso todas las pelotas son azules.

Si la pelota marcada por el 2 fuese verde, debemos considerar dos casos. Si la pelota número 3 es azul, entonces $1+3=4$, $1+4=5, \ldots, 1+11=12$ también son azules. Si la pelota marcada con el 3 fuese verde, entonces $2+3=5$ también es verde. Como $1+4=5$, 5 es verde y 1 es azul, entonces 4 no puede ser azul, sería verde y entonces $4+2=6$, $5+2=7$, $6+2=8$, $7+2=9$, $8+2=10$, $9+2=11$ y $10+2=12$ serán verdes.

Así vemos que al suponer que la pelota 1 es azul, hay tres casos posibles. Si intercambiamos azul y verde en el argumento, tenemos otros tres casos. En consecuencia, hay seis casos en total, a saber: todas las pelotas son azules, todas las pelotas son verdes, todas menos la número 1 son verdes, todas menos la número uno son azules, todas menos la número dos son azules o todas menos la número dos son verdes.

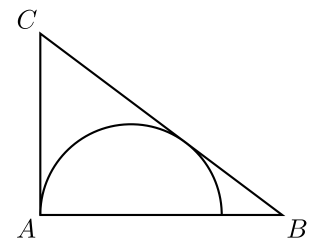
2.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Un entero positivo es *fino* si es par, tiene cuatro dígitos y el número formado por los dos primeros dígitos es igual a cinco veces el número formado por los dos últimos dígitos. Ejemplo: 7014 es fino.

a) Halle el máximo común divisor de todos los números finos.

b) Halle el mínimo común múltiplo de todos los números finos.

Problema 2
El triángulo ABC es rectángulo en A, $AB = 8$ cm y $AC = 6$ cm. ¿Cuál es el radio de la semicircunferencia cuyo diámetro se apoya en AB y que es tangente a los otros dos lados del triángulo ABC?



Problema 3. Ayer y hoy han estado jugando en el parque un grupo de niñas y niños. Ayer la relación de niñas a niños era de 2 : 3. Hoy, el número de niños es el cuadrado del número de niñas y además hay 6 niños y 7 niñas menos que ayer. Contando a los niños y a las niñas, ¿cuántos estuvieron jugando ayer?

Problema 4. Es idéntico al Problema 5 de Tercer Año (ver pág. 34).

Problema 5. Resuelva la ecuación:

$$\log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) - 2\log_{64}(x) = 9.$$

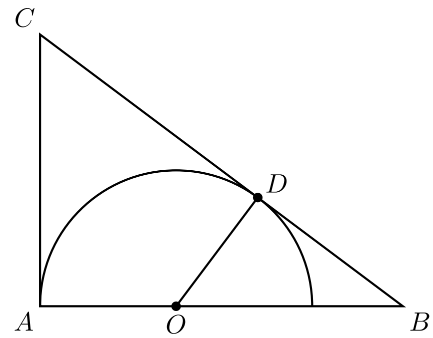
2.4.1. Soluciones

1. a) Si $n = 1000a + 100b + 10c + d$ es fino entonces $10a + b = 5(10c + d)$ y $n = 100(10a + b) + 10c + d = 501(10c + d)$. Como además n es par, d debe ser par resulta que los números finos son $501 \cdot 2$, $501 \cdot 4, \ldots$, $501 \cdot 18$, o equivalentemente 1002, $1002 \cdot 2$, $1002 \cdot 3, \ldots$, $1002 \cdot 9$. Entonces es claro que su máximo común divisor es 1002.

b) $\text{mcm}(1002, 1002 \cdot 2, \ldots, 1002 \cdot 9) = 1002 \cdot \text{mcm}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$
$= 1002 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2525040$.

2. Sean O el centro de la semicircunferencia, D su punto de tangencia con el lado BC y $r = OD$ el radio. Entonces $\triangle ODB \sim \triangle CAB$ (por ser ambos rectángulos y con el ángulo en B común). Entonces $OD/OB = CA/CB$, es decir $r/(8 - r) = 6/\sqrt{6^2 + 8^2} = 3/5$. De aquí se sigue que $r = \frac{3}{5}(8 - r)$ y $\frac{8}{5}r = \frac{24}{5}$, de donde $r = 3$ cm.

Otra manera de proceder consiste en observar que $DC = AC$ por ser segmentos de tangente desde A a la misma circunferencia, de donde $DB = BC - DC = \sqrt{6^2 + 8^2} - 6 = 4$ cm. Entonces, como $OD/DB = AC/AB = 6/8$ resulta $r/4 = 3/4$ y $r = 3$ cm.



3. Ayer en el parque estuvieron $3t$ niños y $2t$ niñas. Hoy hay $3t - 6$ niños y $2t - 7$ niñas. Pero $3t - 6 = (2t - 7)^2 = 4t^2 - 28t + 49$, entonces $4t^2 - 31t + 55 = 0$. Esta ecuación tiene raíces 5 y $11/3$, pero como t es un entero, sólo tiene sentido $t = 5$. Por lo tanto la cantidad de niños y niñas que ayer había en el parque es $3t + 2t = 5t = 25$.

Alternativamente se puede decir que ayer en el parque estuvieron h niñas y v niños, con $h/v = 2/3$. Hoy hay $v-6$ niños y $h-7$ niñas, y se cumple $v-6 = (h-7)^2$. Como $v = 3h/2$ nos queda $3h/2 - 6 = h^2 - 14h + 49$, o bien $h^2 - (31/2)h + 55 = 0$, que tiene soluciones 10 y $11/2$. Como h es un entero, sólo tiene sentido $h = 10$. Por lo tanto $v = 3 \cdot 10/2 = 15$ y la respuesta es $h + v = 25$.

4. Ver la solución del problema 5 de Tercer Año, pág. 35.

5. Por las propiedades de la función logaritmo tenemos:

$$\begin{aligned}
9 &= \log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) - 2\log_{64}(x) \\
&= \log_2(10x) + \frac{\log_2(100x)}{\log_2 4} + \frac{\log_2(1000x)}{\log_2 8} - \frac{2\log_2(x)}{\log_2 64} \\
&= \log_2(10x) + \frac{\log_2(100x)}{2} + \frac{\log_2(1000x)}{3} - \frac{2\log_2(x)}{6} \\
&= \log_2(10x) + \frac{1}{2}\log_2(100x) + \frac{1}{3}\log_2(1000x) - \frac{1}{3}\log_2(x) \\
&= \log_2(10x) + \log_2(\sqrt{100x}) + \log_2 \sqrt[3]{1000x} - \log_2 \sqrt[3]{x} \\
&= \log_2 \Big(\frac{10x\sqrt{100x}\sqrt[3]{1000x}}{\sqrt[3]{x}}\Big) \\
&= \log_2(1000\sqrt[3]{x}).
\end{aligned}$$

En consecuencia $1000\sqrt[3]{x} = 2^9$ o $x = \left(\frac{2^9}{10^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{25}$

Solución alternativa I: Como

$$\begin{aligned}
\log_2(x) &= \log_2(64)\log_{64}(x) = 6\log_{64}(x),\\
\log_4(x) &= \log_4(64)\log_{64}(x) = 3\log_{64}(x),\\
\log_8(x) &= \log_8(64)\log_{64}(x) = 2\log_{64}(x),
\end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación dada nos queda

$$6\log_{64}(10x) + 3\log_{64}(100x) + 2\log_{64}(1000x) - 2\log_{64}(x) = 9,$$

o bien

$$\log_{64}\left(\frac{(10x)^6(100x)^3(1000x)^2}{x^2}\right) = 9,$$

o sea

$$\log_{64}(10^{18}x^9) = 9.$$

Entonces $9\log_{64}(100x) = 9$, de donde $100x = 64$ y $x = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$.

Solución alternativa II: La ecuación se puede escribir como

$$\log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) = 9 + 2\log_{64}(x).$$

Elevando 64 a cada miembro resulta

$$64^{\log_2(10x)} \cdot 64^{\log_4(100x)} \cdot 64^{\log_8(1000x)} = 64^9 \cdot 64^{2\log_{64}(x)},$$

y como $64 = 2^6 = 4^3 = 8^2$, se tiene

$$2^{6\log_2(10x)} \cdot 4^{3\log_4(100x)} \cdot 8^{2\log_8(1000x)} = 64^9 x^2,$$

o bien

$$(10x)^6(100x)^3(1000x)^2 = 64^9 x^2,$$

es decir $10^{18}x^{11} = 64^9x^2$, de donde $10^{18}x^9 = 64^9$, $x^9 = (64/100)^9$ y $x = 64/100 = 16/25$.

2.5. Prueba de Quinto Año

Los problemas 1, 2 y 3 de quinto año son los mismos que los de Cuarto Año (ver pág. 36). Los problema 4 y 5 se enuncian a continuación.

Problema 4. En una caja azul hay doce pelotas, numeradas del 1 al 12. Enrique mueve algunas de ellas, pero no todas, a otra caja verde. Al hacerlo se da cuenta que para cada dos pelotas de la caja verde lo siguiente es verdad: Si estas dos pelotas están numeradas con los números a y b, entonces la pelota marcada con el número $|a-b|$ está en la caja azul. ¿Cuál es la mayor cantidad de pelotas que Enrique pudo mover a la caja verde?

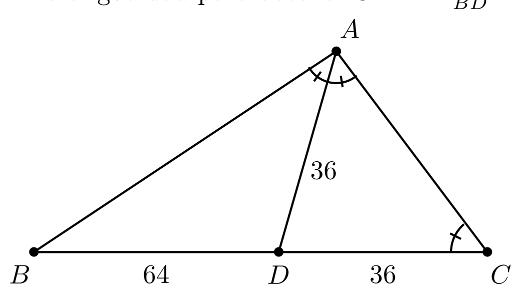
Problema 5. Tenemos un triángulo ABC. La bisectriz de $\angle BAC$ corta a $\overline{BC}$ en D. ADC es isósceles con $AD = CD = 36$ y $BD = 64$. Hallar las longitudes de los lados de ABC.

2.5.1. Soluciones

4. Enrique pudo mover 6 pelotas. Si mueve todas las pelotas marcadas con los impares, entonces la diferencia entre dos de esos números es par y está por lo tanto en la caja azul. O bien puede mover las pelotas numeradas del 7 al 12, cuyas diferencias están comprendidas entre 1 y 5 y por lo tanto quedaron en la caja azul.

Supongamos ahora que movió 7 pelotas y denotemos los números de esas pelotas en orden creciente por $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$. Entonces las diferencias $a_7 - a_1$, $a_6 - a_1$, $a_5 - a_1$, $a_4 - a_1$, $a_3 - a_1$, $a_2 - a_1$, son seis enteros positivos diferentes y menores que 12. Estas pelotas deberían estar en la caja azul, pero eso es imposible pues allí solo hay cinco pelotas.

5. Es claro que $BC = 100$. Encontremos las medidas de AC y AB. Como $\angle BAD = \angle DAC = \angle ACB$, los triángulos CBA y ABD son semejantes y $\frac{CA}{AD} = \frac{BA}{BD} = \frac{CB}{AB}$. La segunda igualdad implica que $AB^2 = BD{\cdot}CB$ y entonces $AB = \sqrt{64 \cdot 100} = 80$. Ahora usamos la primera igualdad para obtener $CA = \frac{AD \cdot BA}{BD} = \frac{36 \cdot 80}{64} = 45$.



Solución alternativa: Pongamos $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. En primer lugar $a = 64 + 36 = 100$. Por el teorema de la bisectriz se tiene

$$\frac{b}{36} = \frac{c}{64}$$

y por el teorema de Stewart

$$b^2 \cdot BD + c^2 \cdot DC = BC(AD^2 + BD \cdot DC),$$

es decir

$$64b^2 + 36c^2 = 100(36^2 + 64 \cdot 36) = 360000.$$

Sustituyendo $b = (36/64)c$ y dividiendo entre 36 queda

$$\left(\frac{36}{64} + 1\right) c^2 = 10000,$$

es decir $(100/64)c^2 = 10000$, de donde $c^2 = 6400$ y $c = 80$. Finalmente $b = (36/64)80 = 45$.

Capítulo 3

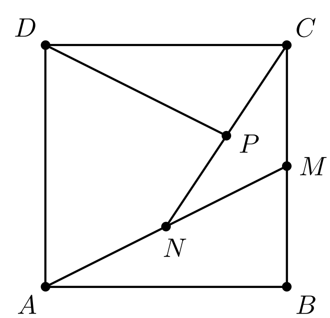
Prueba Final

La prueba final de la OJM 2012 se realizó en la Universidad de Carabobo, Valencia, el sábado de junio. La prueba constó de cuatro problemas, cada uno de ellos con un valor de 7 puntos. Los participantes dispusieron de cuatro horas para resolverlos.

3.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. Un dígito k es un *unidivi* de un número natural n si k es la cifra de las unidades de algún divisor de n. Por ejemplo, los divisores de 50 son 1, 2, 5, 10, 25 y 50, por lo tanto sus unidivis son 0, 1, 2 y 5. Halle el menor número natural que tenga 10 unidivis.

Problema 2. El lado del cuadrado $ABCD$ mide 4 cm. M es el punto medio de BC, N es el punto medio de AM y P es el punto medio de NC. Calcule el área del cuadrilátero $ANPD$.



Problema 3. (a) ¿Es posible repartir los números 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 y 7^2 en dos grupos, de manera que la suma de los números de cada grupo sea la misma? (b) ¿Y para los números 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2 y 9^2?

Problema 4. Una calculadora tiene dos teclas especiales A y B. La tecla A transforma el número x que esté en la pantalla en $\frac{1}{x}$. La tecla B transforma el número x que esté en la pantalla en $1-x$. Diego comenzó a pulsar las teclas A, B, A, B,... en forma alternada. Luego de realizar 2012 pulsaciones, en la pantalla quedó el número 0,875. ¿Qué número estaba inicialmente en la pantalla?

3.1.1. Soluciones

1. Sea n el menor número natural con 10 unidivis. Entonces cada dígito del 0 al 9 debe ser unidivi. Como 0 es unidivi, algún divisor de n termina en 0 y por lo tanto n es múltiplo de 10. Supongamos ahora que n sea múltiplo de 9. Entonces n es múltiplo de 90. Pero no puede ser 90, pues 4 no es unidivi de 90 (pues ninguno entre 4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74 y 84 divide a 90). Tampoco 180, pues 7 no es unidivi de 180 (ninguno entre 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87,... divide a 180). Pero puede ser 270, que es divisible entre 10, 1, 2, 3, 54, 5, 6, 27, 18 y 9.

Si n no es múltiplo de 9, entonces debe ser múltiplo de 19, o 29, o 39, etc., y por lo tanto de 190, o de 290, o de 390, etc. Pero 190 no puede ser, pues 3 no es unidivi de 190, y los demás múltiplos de 190, 290, 390, etc. son mayores que 270. Por lo tanto el mínimo buscado es 270.

2. Si [] denota área, se tiene $[ABM] = \frac{4\cdot 2}{2} = 4$, $[NMC] = \frac{1}{2}[AMC] = 2$, $[DCP] = \frac{1}{2}[DCN] = \frac{1}{2}\frac{4\cdot 3}{2} = 3$, por lo tanto $[ANPD] = [ABCD] - [ABM] - [NMC] - [DCP] = 16 - 4 - 2 - 3 = 7$ cm^2.

3. (a) Sí se puede. La suma de los 7 números es 140, luego la suma de cada grupo debe ser 70. En el grupo donde está $7^2 = 49$ se debe agregar números que sumen 21 para llegar a 70, lo cual se logra con 1, 4 y 16. Por lo tanto los grupos son $\{1^2, 2^2, 4^2, 7^2\}$ y $\{3^2, 5^2, 6^2\}$.

(b) No se puede porque la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2$ tiene 5 sumandos impares y por lo tanto es impar.

4. Si en la pantalla está el número x, al pulsar A se obtiene $\frac{1}{x}$. Si a continuación se pulsa B se obtiene $1 - \frac{1}{x}$. Si luego se pulsa A nuevamente se obtiene

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}.$$

Luego de pulsar B una vez más resulta

$$1 - \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Luego de pulsar A otra vez resulta $1-x$, y si a continuación se pulsa B se obtiene x. Es decir que la secuencia de seis pulsaciones ABABAB deja el mismo número en la pantalla.

Ahora bien, $2012 = 6\cdot 335 + 2$, es decir que pulsar ABAB... hasta completar 2012 pulsaciones es lo mismo que pulsar AB. Si el número que estaba inicialmente en la pantalla era x, al pulsar A y luego B resulta $1-\frac{1}{x}$. Entonces $1 - \frac{1}{x} = 0,875$, de donde $\frac{1}{x} = 0,125$ y $x = 8$.

3.2. Prueba de Segundo Año

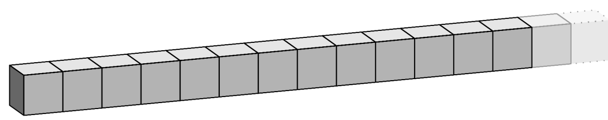
Problema 1. Laura escribió un número natural N menor que 275, formado por tres dígitos cuya suma es 16. Ordenando los tres dígitos de todas las maneras posibles obtuvo seis números, de los cuales observó que sólo uno era un cuadrado perfecto. ¿Qué número escribió Laura?

Problema 2. Es el mismo que el problema 2 de Primer Año (ver pág. 41).

Problema 3. Es el mismo que el problema 4 de Primer Año (ver pág. 41).

Problema 4. Rafael construye una larga fila de dados normales, pegando dos caras juntas sólo si ambas tienen el mismo número de puntos. ¿Será posible que la suma de puntos de todas las caras exteriores de los dados sumen 2012?

Nota: Un dado es *normal* si los puntos en cada par de caras opuestas suman 7.



3.2.1. Soluciones

Para las soluciones de los problemas 2 y 3 vea las de los problemas 2 y 4 de Primer Año, pág. 42.

1. Los cuadrados perfectos de tres cifras son 10^2, 11^2,..., 31^2. Aquellos cuyas cifras suman 16 son $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $22^2 = 484$, $23^2 = 529$ y $31^2 = 961$.

Permutando los dígitos de 484 no se puede obtener ningún número menor que 275. Como $13^2 = 169$, $14^2 = 196$ y $31^2 = 961$ tienen los mismos dígitos, los dígitos del número de Laura no pueden ser 1, 6 y 9. Sólo queda por considerar $23^2 = 529$. El reordenamiento 259 es el único menor que 275, y por lo tanto es la respuesta.

4. (Solución de Luis Uzcátegui, Instituto Los Próceres, Estado Bolívar, ganadora del premio UNEXPO a la solución más elegante).

Supongamos que sea posible obtener 2012 como suma de las caras exteriores. Como los puntos de cada par de caras opuestas suman 7, los de las cuatro caras laterales de cada dado suman 14. Ahora bien, 2012 dividido entre 14 da cociente 143 y resto 10, por lo tanto debe haber 143 dados en la fila y las caras izquierda del primero y derecha del último deben sumar 10. Pero como 143 es impar, la cara izquierda del primer dado y la derecha del último deben sumar 7. Esta contradicción muestra que no es posible que la suma de puntos de las caras exteriores sea 2012.

Notas del editor: (a) Es claro que con más de 143 dados la suma de las caras exteriores superaría a $144 \cdot 14 > 2012$, y con menos de 143 a lo sumo llegaría a $142 \cdot 14 + 12 = 2000$.

(b) Examinando lo que ocurre con una fila de n dados para $n = 1$, 2, 3 y 4, es fácil darse cuenta de que, si n es par entonces las caras izquierda del primero y derecha del último son iguales, mientras que si n es impar entonces esas caras suman 7.

3.3. Prueba de Tercer Año

Los problemas 1 y 4 de Tercer Año son los mismos que los de Segundo Año (ver pág. 43).

Problema 2. Se tienen siete segmentos de longitudes diferentes. La longitud de cada uno de ellos es un número entero de centímetros, y el más corto mide 1 cm. Se sabe que no es posible escoger tres de ellos que permitan formar un triángulo. ¿Cuál es la mínima longitud posible del segmento más largo?

Problema 3. Encuentre todos los pares (a, b) de números reales con $a + b = 1$, para los cuales se satisface la igualdad $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^4$.

3.3.1. Soluciones

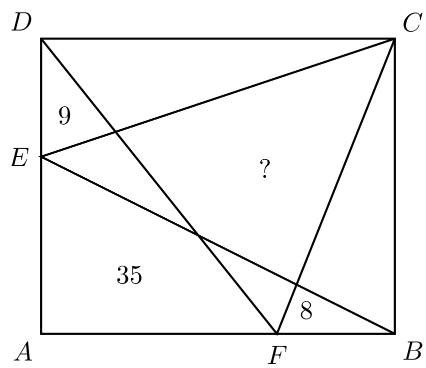
2. Sean $1 < a < b < c < d < e < f$ las longitudes enteras (en cm) de los siete segmentos. Entonces $a \geq 2$ y $b \geq 3$. Tres segmentos de longitudes $x \leq y \leq z$ forman triángulo si y sólo si $z < x + y$, por lo tanto no lo forman si y sólo si $z \geq x + y$. Como los segmentos de longitudes a, b y c no forman triángulo, debe ser entonces $c \geq a + b \geq 2 + 3 = 5$. Análogamente $d \geq b + c \geq 3 + 5 = 8$, $e \geq c + d \geq 5 + 8 = 13$ y $f \geq d + e \geq 8 + 13 = 21$. Para asegurarnos de que 21 cm es efectivamente la mínima longitud posible del segmento más largo, consideremos los segmentos de longitudes 1, 2, 3, 5, 8, 13 y 21. Como cada uno a partir del tercero es mayor o igual que la suma de dos cualesquiera de los anteriores, no es posible formar triángulo con tres de ellos.

3. Como $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2$, podemos reescribir la ecuación dada como $(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + b^4$. Calculando y simplificando nos queda $-a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 = 0$, lo cual se factoriza como $-ab(a - b)^2 = 0$. Por lo tanto $a = 0$ o $b = 0$ o $a - b = 0$. Como $a + b = 1$ por hipótesis, tenemos las siguientes soluciones y no más: $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Encuentre todos los enteros a diferentes de cero y de 4, tales que el número $\dfrac{a}{a-4}+\dfrac{2}{a}$ también es un entero.

Problema 2. Los segmentos EC, EB, DF y FC dividen al rectángulo $ABCD$ en ocho regiones. En tres de ellas se ha escrito un número que representa su área. ¿Cuál es el área de la región en la que se encuentra el signo de interrogación?

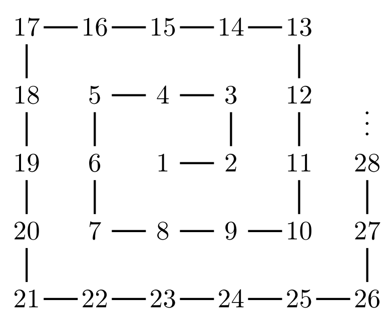


Problema 3. (a) Pruebe que para todo n se cumple

$$n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2-(n+4)^2+(n+5)^2+(n+6)^2-(n+7)^2=0.$$

(b) En el pizarrón están escritos los cuadrados de los números del 1 al 2012: 1^2, 2^2, 3^2,..., 2012^2. Hay que escribir delante de cada número un signo $+$ ó $-$ de manera que, al realizar la suma algebraica de los 2012 números, se obtenga el menor valor positivo que sea posible. Determine cuál es ese mínimo e indique una manera de distribuir los signos para lograrlo.

Problema 4. Consideremos los puntos con ambas coordenadas enteras en el plano cartesiano, en el origen (0,0) se coloca el 1, en (1,0) se coloca el 2, en (1,1) se coloca el 3, y así sucesivamente se van colocando los enteros positivos en espiral alrededor del origen (ver figura). Determine las coordenadas del punto donde se colocará el 2012.



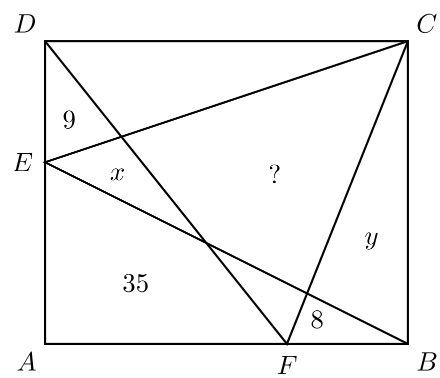
3.4.1. Soluciones

1. Si $\frac{a}{a-4}+\frac{2}{a}=\frac{a^2+2a-8}{a(a-4)}$ es un entero, entonces $a(a-4)$ divide a a^2+2a-8 y por lo tanto a divide a a^2+2a-8, de donde a divide a 8. Los enteros distintos de 4 que dividen a 8 son 1, 2, 8, -1, -2, -4 y -8. Verificando cada uno de ellos resulta que los únicos que satisfacen lo pedido son $a=2$ y $a=-4$.

Las verificaciones pueden reducirse observando que $a-4$ también debe dividir a 8 y como $a \neq 0$, $a-4$ sólo puede ser 1, 2, 4, 8, -1, -2 o -8. Es decir que a debe estar entre 5, 6, 8, 12, 3, 2 y -4. Comparando esta lista con la del párrafo anterior las coincidencias se reducen a 2, 8 y -4, de los cuales sólo satisfacen lo pedido 2 y -4.

Solución alternativa: Como $\frac{a}{a-4} = 1 + \frac{4}{a-4}$, la condición del problema equivale a que $\frac{4}{a-4} + \frac{2}{a}$ sea entero. Si $a \geq 10$ entonces $0 < \frac{4}{a-4} + \frac{2}{a} \leq \frac{4}{6} + \frac{2}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} < 1$, por lo tanto no es entero. Análogamente si $a \leq -5$ se tiene que $0 < |\frac{4}{a-4} + \frac{2}{a}| <= \frac{4}{9} + \frac{2}{5} < 1$. Por lo tanto los enteros buscados están entre los siguientes: -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 y 9. Probando con cada uno de ellos se comprueba que las únicas soluciones son -4 y 2.

2. $[BCE] = \frac{1}{2}BC \cdot CD = [CDF] = \frac{1}{2}[ABCD]$. Además CDF tiene igual área que su parte complementaria en el rectángulo, es decir $[CDF] = [ADF] + [BCF] = 9 + x + 35 + 8 + y = 52 + x + y$. El área buscada es claramente $[BCE] - x - y = [ADF] + [BCF] - x - y = 52$. También puede argumentarse directamente que el área es $[BCE] - [ADF] - [BCF] + 9 + 35 + 8 = 52$.



Hay una solución similar tomando como x e y las áreas de los dos triángulos vacíos en la figura anterior, lo que equivale a permutar las letras $ABCD$ en $BCDA$.

3. (a) Se puede hacer desarrollando y operando, o agrupando los términos de a dos y usando el producto notable de la diferencia de cuadrados:

$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 - (n+4)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2 - (n+7)^2$$

$$= -(2n+1) + (2n+5) + (2n+9) - (2n+13) = -1 + 5 + 9 - 13 = 0.$$

(b) La parte (a) muestra que para 8 cuadrados consecutivos se pueden poner los signos de modo que la suma algebraica sea nula. Si se comienza por $-1^2 - 2^2 -$

$3^2+4^2=2$ y luego se repite la sucesión de signos $+--+-++-$ para cada grupo de 8 números consecutivos, a partir del 5^2, resulta

$-1^2-2^2-3^2+4^2$
$+5^2-6^2-7^2+8^2-9^2+10^2+11^2-12^2$
$+13^2-14^2-15^2+16^2-17^2+18^2+19^2-20^2+\cdots$
$+2005^2-2006^2-2007^2+2008^2-2009^2+2010^2+2011^2-2012^2=2.$

Éste es el mínimo valor positivo posible, ya que 1 no se puede obtener porque hay 1006 términos impares y por lo tanto la suma algebraica será siempre par.

4. Observemos que en el punto $(1,-1)$ se completa un cuadrado de 3×3 y allí va $9=3^2$, en $(2,-2)$ se completa un cuadrado de 5×5 y allí va $25=5^2$, y entonces en general en $(n,-n)$ va $(2n+1)^2$. Como $45^2=2025$, en $(22,-22)$ irá el 2025 y 13 unidades a la izquierda, es decir en $(9,-22)$, va el 2012.

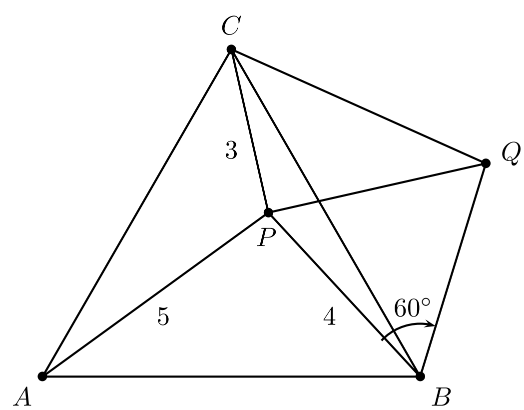
3.5. Prueba de Quinto Año

Los problemas 1, 2 y 3 de Quinto Año son los mismos que los problemas 1, 3 y 4 de Cuarto Año, respectivamente (ver pág. 45).

Problema 4. Sea ABC un triángulo equilátero y P un punto interior tal que $PA=5$, $PB=4$, $PC=3$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BPC$?

3.5.1. Soluciones

4. Sea Q el resultado de rotar $60°$ en sentido horario el punto P alrededor de B.



Entonces $\triangle BPQ$ es equilátero y $PQ=BP=4$. Como la rotación de centro B lleva P en Q y A en C, se tiene $CQ=AP=5$. Ahora como $PC=3$, $PQ=4$ y $CQ=5$, el triángulo PCQ es rectángulo en P. Finalmente $\angle BPC=\angle BPQ+\angle QPC=60°+90°=150°$.

Capítulo 4

Olimpiada de Mayo

La Olimpiada de Mayo es una competencia matemática internacional coordinada por la Olimpiada Matemática Argentina (OMA). Consiste en una prueba escrita de 3 horas de duración y consta de dos niveles: el primer nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 13 años hasta el 31 de diciembre del año anterior a la prueba, y el segundo nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 15 años hasta el 31 de Diciembre del año anterior a la prueba. Cada país participante envía las diez mejores pruebas de cada nivel a Argentina para ser puntuadas junto con las de los demás países y premiadas por OMA.

4.1. Problemas del Primer Nivel

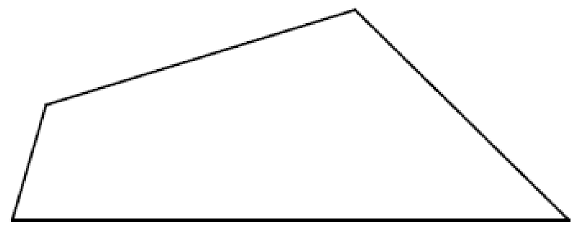
Problema 1. Pablo dice: "Al día de mi cumpleaños le sumo 2 y multiplico el resultado por 2. Al número obtenido le sumo 4 y multiplico el resultado por 5. Al nuevo número obtenido le sumo el número del mes de mi cumpleaños (por ejemplo, si es junio, le sumo 6) y obtengo 342." ¿Cuál es la fecha del cumpleaños de Pablo? Dar todas las posibilidades.

Problema 2. Llamamos $S(n)$ a la suma de las cifras del entero n. Por ejemplo, $S(327) = 3 + 2 + 7 = 12$. Hallar el valor de

$$A = S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \ldots + S(2011) - S(2012).$$

(A tiene 2012 términos).

Problema 3. De un cuadrilátero de papel como el de la figura, hay que recortar un nuevo cuadrilátero cuya área sea igual a la mitad del área del cuadrilátero original. Solo se puede doblar una o más veces y cortar por algunas de las líneas de los dobleces. Describir los dobleces y los cortes y justificar que el área es la mitad.



Problema 4. Pedro tiene 111 fichas azules y 88 fichas blancas. Hay una máquina que por cada 14 fichas azules entrega 11 fichas blancas y por cada 7 fichas blancas entrega 13 azules. Decidir si Pedro puede lograr, mediante sucesivas operaciones con la máquina, aumentar en 33 el número total de fichas, de modo que la cantidad de fichas azules sea igual a $\frac{5}{3}$ de la cantidad de fichas blancas. Si se puede, indicar cómo hacerlo. Si no se puede, indicar porqué.

Problema 5. En una reunión hay 12 personas. Se sabe que para cada dos personas A y B de la reunión hay (al menos) otra persona C de la reunión que es amiga de A y de B. Determinar el mínimo número de pares de amigos que hay en la reunión. Cada persona puede integrar varios pares. Si X es amigo de Y entonces Y es amigo de X.

4.2. Soluciones del Primer Nivel

1. Sean x el día e y el mes del cumpleaños de Pablo. El número que se obtiene siguiendo las indicaciones del enunciado es $((x+2)2+4)\cdot 5+y$, que es igual a 342, según enunciado. Luego, al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con la suma consecutivamente se tiene $(2x+4+4)\cdot 5+y=342$, luego $10x+40+y=342$, y de allí $10x+y=302$. De la ecuación obtenida se deduce que el número y termina en 2 ya que el otro sumando siempre tendrá por unidad 0 sin importar el valor de x; como y representa un mes sólo puede tomar los valores de 1 a 12 y como debe terminar en 2 sólo hay dos posibilidades: $y=2$ o $y=12$. Es decir que Pablo nació en febrero o en diciembre. Si $y=2$ (febrero) entonces $10x=300$, y por ello $x=30$, de modo que Pablo debería haber nacido el 30 de febrero. Como febrero tiene a lo sumo 29 días, $y=2$ es imposible. Luego Pablo nació en diciembre: $y=12$. Entonces $10x+y=302$ se transforma en $10x=290$ y se obtiene $x=29$. Por lo tanto, Pablo nació un 29 de diciembre.

2. Si n es par entonces $S(n+1)-S(n)=1$. En efecto, n y $n+1$ difieren solamente en el dígito de las unidades, que para n será 0, 2, 4, 6 u 8 y para $n+1$ será, respectivamente, 1, 3, 5, 7 ó 9. Entonces

$$S(1)=1,\ S(3)-S(2)=1,\ S(5)-S(4)=1,\dots,\ S(2011)-S(2010)=1.$$

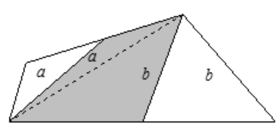
Sumando todas las igualdades anteriores resulta

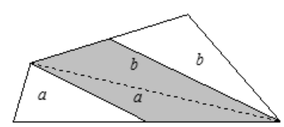
$$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \ldots - S(2010) + S(2011) = 1006$$

y restando S(2012)=5 resulta

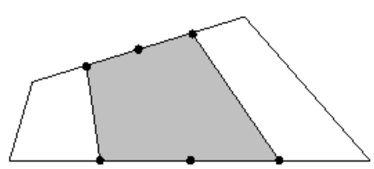
$$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \ldots + S(2011) - S(2012) = 1001.$$

3. Observamos que un doblez en el que se hacen coincidir los extremos de un lado pasa por su punto medio. De esta manera marcamos los puntos medios de dos lados opuestos del cuadrilátero. Uniendo cada uno de estos puntos medios con uno de los vértices opuestos mediante un doblez que pase por ambos, y de modo que ambos dobleces no se intersequen, obtenemos las líneas de corte. La diagonal que comparten ambos cuadriláteros y las dos líneas de corte dividen a la figura original en 4 triángulos: dos de área a y dos de área b. Esto es así porque en ambos casos los dos triángulos tienen bases y alturas iguales. Luego el área del cuadrilátero original es igual a $2a + 2b$ y la del cuadrilátero recortado es $a + b$.





Solución alternativa: Usando el mismo método que en la solución anterior, se dividen los lados opuestos en 4 partes iguales. Las líneas de corte se obtienen haciendo dos dobleces: el que pasa por los dos primeros puntos marcados en lados opuestos, y el que pasa por los dos últimos. La justificación se deja como ejercicio.



4. Supongamos que Pedro pudo hacerlo. Entonces el número total de fichas pasó de $111 + 88 = 199$ a $199 + 33 = 232$. Además, si A es el número de fichas blancas y B es el número de fichas azules, se cumplirá $A = \frac{5}{3}B$, de donde $232 = A + B = \frac{5}{3}B + B = \frac{8}{3}B$, $B = \frac{3 \cdot 232}{8} = 87$ y $A = 232 - 87 = 145$. Llamemos m a la cantidad de veces que Pedro cambia 14 azules por 11 blancas y n a la cantidad de veces que cambia 7 blancas por 13 azules. Entonces

$$111 - 14m + 13n = 145,$$
$$88 + 11m - 7n = 87.$$

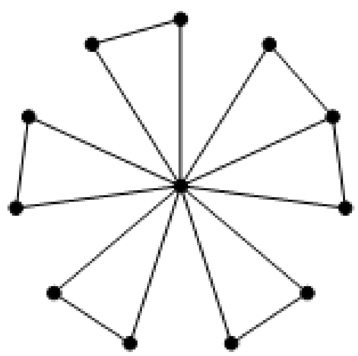
Luego $13n - 14m = 34$ y $7n - 11m = 1$, de donde $n = 8$ y $m = 5$. Pedro debe cambiar 5 veces 14 azules por 11 blancas y 8 veces 7 blancas por 13 azules.

Solución alternativa: Llamemos m a la cantidad de veces que Pedro cambia 14 azules por 11 blancas y n a la cantidad de veces que cambia 7 blancas por 13 azules. Después de estos cambios la cantidad de fichas azules es $111 - 14m + 13n$ y la cantidad de fichas blancas es $88 + 11m - 7n$. En total son $111 + 88 - 3m + 6n$ fichas y como queremos lograr 33 fichas más, debe ser $199 - 3m + 6n = 199 + 33$, de donde se obtiene

$$m = 2n - 11. \tag{4.1}$$

Además, debe ser $111 - 14m + 13n = \frac{5}{3}(88 + 11m - 7n)$, y usando (4.1) se tiene $111 - 14(2n - 11) + 13n = \frac{5}{3}(88 + 11(2n - 11) - 7n)$ de donde se obtiene $n = 8$. Por ello, $m = 2 \cdot 8 - 11 = 5$. Pedro debe cambiar 5 veces 14 azules por 11 blancas y 8 veces 7 blancas por 13 azules.

5. 17 pares de amigos son suficientes, como se aprecia en el gráfico, en el que cada punto representa una persona y cada línea que une dos puntos, una amistad.



Veamos que la condición del enunciado es imposible si hay 16 o menos pares de amigos. Supongamos que hay 16 pares de amigos. Numeramos las personas de 1 a 12 y denotamos c_i a la cantidad de amigos de la persona i. Notemos que $c_i \geq 2$: no puede ser que haya un i tal que $c_i = 0$, pues se viola ostensiblemente la condición del enunciado, y si c_i vale 1 para algún i, sea j el único amigo de i. Entonces no existe una tercera persona k que sea amiga de i y de j, como exige el enunciado. Con esta notación, hay $\frac{c_i(c_i - 1)}{2}$ pares de personas que son ambas amigas de i. Ahora bien, cada par de personas tienen que estar en el conjunto de los $\frac{c_i(c_i - 1)}{2}$ pares de personas que son ambas amigas de i, para algún i. Como el total de pares que se forman con 12 personas son $\dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$ tenemos

$$\frac{c_1(c_1-1)}{2} + \frac{c_2(c_2-1)}{2} + \ldots + \frac{c_{12}(c_{12}-1)}{2} \geq 66, \text{es decir}$$

$$c_1(c_1-1) + c_2(c_2-1) + \ldots + c_{12}(c_{12}-1) \geq 132.$$

Si hay 16 o menos pares de amigos, entonces $c_1 + c_2 + \ldots + c_{12} \leq 2 \cdot 16 = 32$, pues cada amistad se cuenta 2 veces, una por cada amigo que participa. Por otra parte, $2 \leq c_i \leq 11$, de modo que $2 \leq c_i \leq 10$ para todo i, pues $11 \cdot 2 + 11 > 32$. Ahora bien, si $2 < j < k < 10$, entonces $j(j-1) + k(k-1) < (j-1)(j-2) + (k+1)k$. En efecto, esta desigualdad equivale a $j^2 - j + k^2 - k < j^2 - 3j + 2 + k^2 + k$, o sea, $2j < 2k + 2$, que es verdadera si $2 < j < k < 10$. Esto significa que si alguien con j amigos pierde un amigo y alguien que tiene k amigos gana un amigo entonces la suma $c_1(c_1-1) + c_2(c_2-1) + \ldots + c_{12}(c_{12}-1)$ aumenta. Y el mayor valor de esta suma se alcanza cuando uno de los c_i vale 10 y los restantes valen 2, o sea cuando no se puede hacer la operación de quitar un amigo a uno con pocos amigos y agregarle un amigo a uno con más amigos. El máximo es igual a $11 \cdot 2 + 10 \cdot 9 = 112 < 132$. Esto demuestra que 16 amistades no son suficientes.

4.3. Problemas del Segundo Nivel

Problema 1. Un número de cuatro cifras es *tartamudo* si tiene las dos primeras cifras iguales entre sí y las dos últimas cifras iguales entre sí, por ejemplo 3311 y 2222 son números tartamudos. Hallar todos los números tartamudos de cuatro cifras que son cuadrados perfectos.

Problema 2. Se tienen dos octógonos regulares de cartulina. Los vértices de cada octógono se numeran de 1 a 8, en cualquier orden (el orden para un octógono puede ser diferente al del otro). Luego los octógonos se superponen, de modo que cada vértice de uno quede en contacto con un vértice del otro. Los números de los vértices en contacto se multiplican, y los 8 productos obtenidos se suman. Demostrar que, cualquiera sea el orden en que hayan sido numerados los vértices, siempre es posible superponer los octógonos de manera que esa suma sea mayor o igual que 162.

Problema 3. En el triángulo ABC, se verifica que $\angle B = 2\angle C$ y $\angle A > 90°$. Llamamos M al punto medio de BC. La perpendicular por C al lado AC corta a la recta AB en el punto D. Demostrar que $\angle AMB = \angle DMC$.

Problema 4. Se dan seis puntos de manera que no haya tres sobre una misma recta y que las longitudes de los segmentos determinados por estos puntos sean todas distintas. Consideramos todos los triángulos que tienen sus vértices en estos puntos. Demostrar que hay un segmento que es a la vez el lado más corto de uno de esos triángulos y el lado más largo de otro.

Problema 5. Hay 27 cajas ubicadas en una fila; cada una contiene por lo menos 12 bolitas. La operación permitida es transferir una bolita desde una caja hacia su vecina de la derecha, siempre y cuando dicha vecina contenga más bolitas que la caja desde la que se hará la transferencia. Diremos que una distribución inicial de las bolitas es *feliz* si es posible lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que todas las bolitas queden en una misma caja. Determinar cuál es el menor número total de bolitas con el que se puede tener una distribución inicial feliz.

4.4. Soluciones del Segundo Nivel

1. El número es de la forma $aabb$ así que es divisible entre 11, como además es un cuadrado debe ser múltiplo de 121. Por lo tanto el número es de la forma $121p$ donde p debe ser un cuadrado. Como el número es de 4 cifras entonces está entre 1100 y 9999, así que $\frac{1100}{121} < p < \frac{9999}{121}$, es decir, $10 \leq p \leq 82$. Los posibles valores de p son 16, 25, 36, 49, 64, 81, de los cuales hay uno solo que da soluciones y es el que corresponde a 64. El número es $7744 = 88^2$.

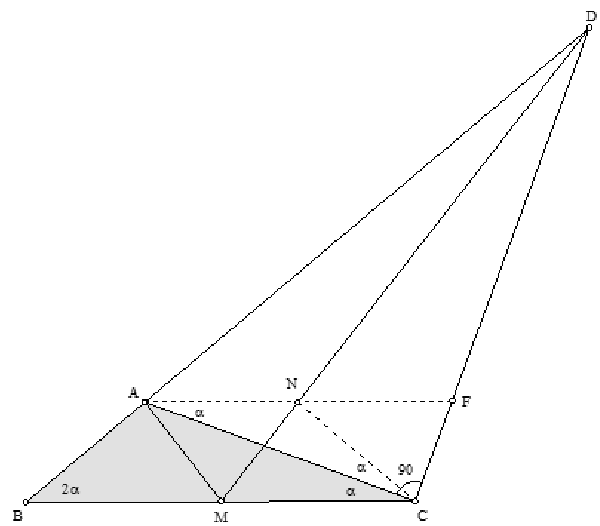
Solución alternativa: Dado que $aabb = 10^3a+10^2a+10b+b = 11(100a+b)$ y $aabb$ es un cuadrado, debe ser $100a+b = 11\cdot k^2 (k \in \mathbb{N})$. Luego $99a+a+b = 11\cdot k^2$, de donde $a+b$ debe ser un múltiplo de 11. Hay 8 casos, con $a = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$ y respectivamente $b = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Como $n = aabb$ es un cuadrado, b solo puede valer 0, 1, 4, 5, 6 ó 9. Por lo tanto, los casos posibles son 2299, 7744, 6655 y 5566, y el único cuadrado es $7744 = 88^2$.

2. Escojamos un vértice del primer octógono y sean $a_1, a_2, \ldots, a_8$ los números que se encuentran al recorrer los vértices, a partir del escogido, en sentido horario. Análogamente, sean $b_1, b_2, \ldots, b_8$ los números que se encuentran al recorrer los vértices del segundo octógono, en sentido horario, a partir de uno de ellos. Si el vértice 1 del primer octógono se superpone al vértice j del segundo, entonces la suma obtenida es $S_j = a_1b_j + a_2b_{j+1} + \ldots + a_8b_{j+7} = \sum_i a_ib_{i+j-1}$, donde los subíndices se toman módulo 8. Entonces

$$\sum_{j=1}^{8} S_j = \sum_{j=1}^{8}\sum_{i=1}^{8} a_ib_{i+j-1} = \sum_{i=1}^{8} a_i \sum_{j=1}^{8} b_{i+j-1} = \left(\sum_{i=1}^{8} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{8} b_{i+j-1}\right).$$

Pero $\sum_{i=1}^{8} a_i = \sum_{j=1}^{8} b_{i+j-1} = \sum_{i=1}^{8} i = 36$, por lo tanto, $\sum_{j=1}^{8} S_j = 36^2$. Como los 8 sumandos S_j no pueden ser todos menores que $36^2/8 = 162$ (pues entonces la suma de ellos sería menor que 36^2) debe existir al menos un j para el cual $S_j \geq 162$.

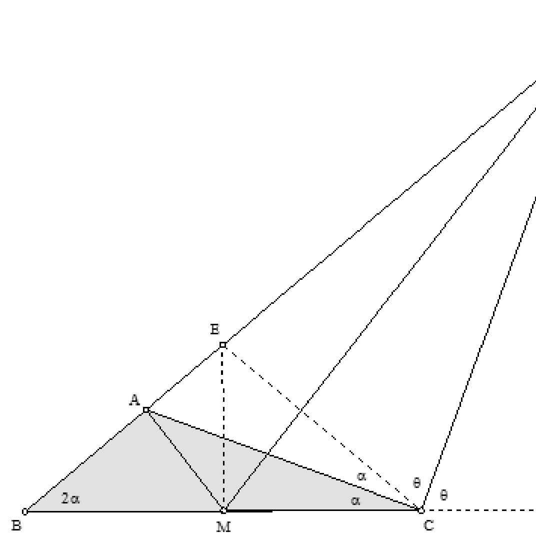
3. La recta que pasa por A y es paralela a BC corta a DM y a DC en los puntos N y F respectivamente. Se sigue que $AN : BM = DN : DM = NF : MC$. Como $BM = MC$, resulta $AN = NF$. Y como además $\angle ACF = 90°$, tenemos que N es el circuncentro del triángulo ACF, por lo que $AN = NC$, de manera que $\angle NCA = \angle NAC = \angle ACB$. Así pues, $\angle NCB = 2 \cdot \angle ACB = \angle ABC$. Como $AN \parallel BC$, el cuadrilátero $ABCN$ es un trapecio isósceles con $AB = NC$. Por consiguiente $\triangle ABM \cong \triangle NCM$ y $\angle AMB = \angle NMC = \angle DMC$.



Solución alternativa: La mediatriz de BC corta a AB en el punto E. Entonces $\angle ECB = \angle EBC = 2 \cdot \angle ACB$ y, por tanto, $\angle ECA = \angle ACB$, con lo que CA es la bisectriz interior del ángulo en C en el triángulo EBC. Dado que $CD \perp AC$, CD es la bisectriz exterior del ángulo en C en $\triangle EBC$. Por consiguiente, tenemos $AE : AB = EC : BC = ED : BD$, de donde

$$AE : ED = AB : BD. \tag{4.2}$$

Como $\angle EMB = 90°$, de (4.2), por el recíproco del teorema de la bisectriz interior y exterior, resulta que $\angle AME = \angle EMD$, de donde se obtiene inmediatamente $\angle AMB = \angle DMC$.



4. Coloreamos el lado más corto de cada triángulo de verde y pudiera ser que de esta forma alguno de los segmentos se colorean de verde más de una vez, pero esto no es esencial. Si el resto de los segmentos se pintan de azul, se tienen seis puntos donde todos los posibles segmentos que los unen (15 segmentos) están coloreados de verde o de azul. Es bien conocido (aplicación sencilla del principio del palomar) que habrá al menos un triángulo T en el que sus tres lados tienen el mismo color: verde o azul. Veámoslo. De cada punto salen 5 segmentos, entonces habrá tres del mismo color, por el principio del palomar. Digamos color A. Consideramos los otros extremos de esos tres segmentos. Si algún par de ellos está unido por un segmento de color A, hemos terminado. Si no, los tres segmentos que los unen son de color B y, de nuevo, hemos terminado. Necesariamente el color de los lados de este triángulo T será verde, pues el triángulo ya tiene su lado más corto pintado de verde. Entonces el lado más largo de T estará coloreado de verde, y por tanto será el más corto en algún otro triángulo.

5. El mínimo es 1000, que se alcanza para la distribución 12, 13, 15, 17,. . . , 59, 61, 63 (los números consecutivos difieren en 2, excepto entre los dos primeros números, el 12 y el 13). Esta sucesión satisface los requisitos. Cada bolita de la primera caja puede «viajar» hasta la última. Una vez vaciada la primera caja, cada bolita de la segunda puede llevarse a la última, y así siguiendo, se vacían una a una todas las cajas y se colocan todas las bolitas en la última caja.

Como las bolitas no retroceden, si el objetivo es alcanzable todas las bolitas deben finalizar en la última caja de la derecha. Además, para que todas las cajas puedan intervenir en alguna operación permitida, las cantidades iniciales de bolitas en las cajas forman una sucesión creciente de números. Consideramos cualquier distribución que permita lograr el objetivo y una sucesión de operaciones permitidas con las que se llevan todas las bolitas a la última caja. Sea $12 \leq a_1 < a_2, \ldots < a_{27}$ la sucesión de las cantidades iniciales de bolitas en las cajas. Supongamos que hay cajas consecutivas a_i y a_{i+1} tales que $a_{i+1} = a_i + 1$; a un par de cajas con estas características lo llamamos par *especial*. Para un par especial, la primera operación en la que alguna de las cajas i o $i+1$ está involucrada (porque se le agrega o se le quita una bolita) es la operación que consiste en pasar una bolita de la caja i a la caja $i+1$, porque si no sería imposible continuar el proceso. (En particular, esto implica que no pueden ser simultáneamente especiales los pares $i, i+1$ e $i+1, i+2$.) Entonces podemos efectuar primero todas las operaciones que involucran a los pares especiales, luego realizar las operaciones restantes. Hay una excepción: si las cajas 1 y 2 son un par especial y $a_1 = 12$, no realizamos por el momento la operación con esas cajas. Esto garantiza que cada caja contiene al menos 12 bolitas después de efectuar la operación a los demás pares especiales. Fijemos nuestra atención en la sucesión b_1, b_2,..., b_{27} que se obtuvo al realizar las operaciones con los pares especiales. Las restantes operaciones hacen que todas las bolitas terminen en la última caja, y $b_1 \geq 12$; entonces esta distribución también es admisible. Además, $b_2 \geq b_1$ y $b_{i+1} \geq b_i + 2$ para $i = 2, 3, \ldots, 26$. Más aun, como se supuso que había al menos una operación con pares especiales, tenemos que $b_{i+1} = b_i + 3 > b_i + 2$ para al menos un índice i. Esto se debe a que luego de aplicar la operación a un par especial $i, i+1$, la diferencia $a_{i+1} - a_i$ se transforma en 3. Entonces podemos decir que tenemos una distribución admisible con la misma cantidad total de bolitas que la original, en la que cada número b_i es al menos tan grande como el número correspondiente en la sucesión 12, 13, 15, 17,..., 59, 61, 63 del primer párrafo. Además, al menos un b_i es estrictamente mayor. En conclusión, si existen pares especiales entonces el número total de bolitas no es mínimo. Entonces basta mirar las distribuciones tales que $12 \leq a_1 \leq a_2 - 1$ y $a_{i+1} \geq a_i + 2$ para $i = 2$, 3,..., 26. Entre todas ellas, es claro que el mínimo se alcanza si $12 = a_1 = a_2 - 1$ y $a_{i+1} = a_i + 2$ para $2 \leq i \leq 26$. Esto conduce a la sucesión 12, 13, 15, 17,..., 59, 61, 63, cuya suma es $12 + \dfrac{13+63}{2} \cdot 26 = 1000$.

Capítulo 5

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe tuvo lugar en La Herradura, La Paz, El Salvador desde el 15 hasta el 23 de junio de 2012. En la misma participaron doce países: Colombia, Costa Rica, El Salvador, Guatemala, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela.

Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Rafael Aznar (Los Arcos, Distrito Capital), Luis Ruiz (Las Colinas, Edo. Lara) y José Guevara (Los Próceres, Edo. Bolívar). El Jefe de la delegación fué José Heber Nieto y la tutora Estefanía Ordaz.

5.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Hallar todos los enteros positivos que sean iguales a 700 veces la suma de sus dígitos.

Problema 2. Sea γ la circunferencia circunscrita al triángulo acutángulo ABC. Sea P el punto medio del menor arco BC. La paralela por P a la recta AB intercepta BC, AC y γ en los puntos R, S y T, respectivamente. Se definen los puntos K y L como las intersecciones de AP con BT y BS con AR. Demostrar que la recta KL pasa por el punto medio de AB si y sólo si $CS = PR$.

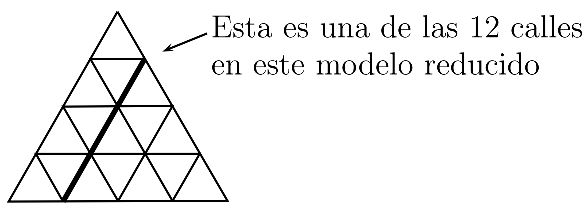
Problema 3. Sean a, b, c números reales que satisfacen $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=1$

y $ab + bc + ca > 0$. Demostrar que

$$a + b + c - \frac{abc}{ab + bc + ca} \geq 4.$$

Segundo Día

Problema 4. Trilandia es una ciudad muy peculiar. La ciudad tiene forma de triángulo equilátero de lado 2 012. Las calles dividen la ciudad en varios bloques que tienen forma de triángulo equilátero de lado 1. También hay calles en el borde de Trilandia. En total hay 6 036 calles. El alcalde quiere ubicar puestos de vigilancia en algunas esquinas de la ciudad, para vigilar las calles. Un puesto de vigilancia puede vigilar todas las calles en las que esté ubicado. ¿Cuál es la menor cantidad de puestos que se requieren para poder vigilar todas las calles de Trilandia?



Problema 5. Alejandro y Luisa son una pareja de ladrones. Cada día por la mañana, Luisa le roba a Alejandro un tercio de su dinero, pero por la tarde sufre de un inusual ataque de conciencia y le da la mitad de todo el dinero que ella tiene. Si Luisa roba por primera vez en el día 1, y antes de eso no tenía dinero, ¿cuál es la menor cantidad entera positiva de dinero que Alejandro debe tener para que al final del día 2012 ambos tengan una cantidad entera de dinero?

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $AB < BC$, y sean E y F puntos en AC y AB, respectivamente, tales que $BF = BC = CE$, ambos ubicados en el mismo lado que A respecto de BC. Sea G la intersección de BE con CF. Se toma un punto H sobre la paralela a AC por G tal que $HG = AF$ (con H en distinto lado que C respecto de BG). Demostrar que $\angle EHG = \dfrac{\angle BAC}{2}$.

5.2. Soluciones

1. Si N cumple la condición entonces debe ser múltiplo de 100 y termina en 00. La suma de sus dígitos es igual a la suma de los dígitos de $n = N/100$, y el problema se reduce a hallar los enteros positivos n que sean iguales a 7 veces la suma de sus dígitos.

Evidentemente no hay ninguno de éstos de una sola cifra. Si $n = 10a + b$ y $n = 7(a + b)$, entonces $3a = 6b$ y $a = 2b$. Resultan así para n los valores 21, 42, 63 y 84, que generan las soluciones 2100, 4200, 6300 y 8400.

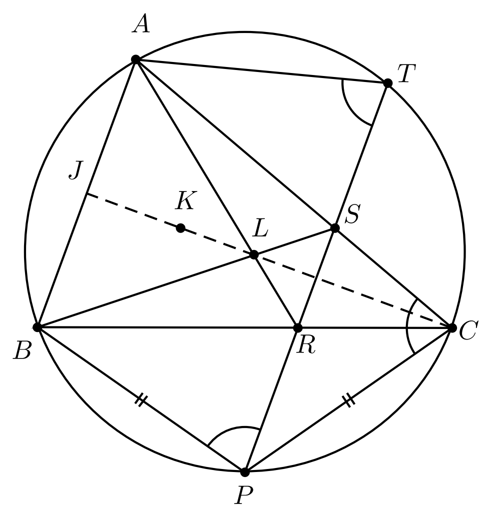
Veamos que no hay más soluciones. Si $n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$, con $k \geq 2$, y $n = 7(a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0)$, entonces

$$(10^k - 7)a_k + (10^{k-1} - 7)a_{k-1} + \cdots + 3a_1 = 6a_0.$$

pero $6a_0 \leq 6 \cdot 9 = 54$, mientras que el miembro izquierdo es al menos $10^k - 7 \geq 93$.

En conclusión hay sólo 4 soluciones, a saber: 2100, 4200, 6300 y 8400.

2.



Como $AB \parallel PT$, entonces $ABPT$ es un trapecio isósceles, y por tanto $\angle BPR = \angle ATP = \angle SCP$. Como P es punto medio del arco BC se tiene $PB = PC$. Observemos que $CS = PR$ si y sólo si $\triangle BRP \equiv \triangle PSC$, que es equivalente a la igualdad $\angle BRP = \angle CSR$. Además la igualdad $\angle BRP = \angle CSR$ es equivalente a $\angle ABC = \angle BAC$, es decir, $AC = CB$.

Por otro lado, sea J el punto medio de AB. Como $ABPT$ es trapecio isósceles se tiene $KJ \perp AB$. Por el teorema de Thales se tiene $\frac{AS}{SC} = \frac{BR}{RC}$. Los puntos C, L y J están alineados puesto que $\frac{AS}{SC} \cdot \frac{CR}{RB} \cdot \frac{BJ}{JA} = 1$ (Teorema de Ceva). Finalmente observamos que la recta KL contiene a J si y sólo si $CJ \perp AB$ o, equivalentemente, $AC = CB$.

Solución Alternativa 1: Sea J punto medio de AB. Como $\angle PAB = \angle TBA$ entonces K está en la mediatriz de AB, y como $RS \parallel AB$ entonces L está en la mediana JC. Si L, K, J están alineados entonces el triángulo ABC es isósceles, entonces $\angle PAC = \angle TBC$ y por tanto $\angle ACP = \angle TPB$. Como P es punto medio del arco BC se tiene que $BP = PC$ y con esto $\triangle PSC \equiv \triangle PRB$, por lo tanto $CS = RP$.

Recíprocamente, si $CS = RP$ entonces $\triangle PSC \equiv \triangle PRB$, de aquí se deduce que $\triangle ABC$ es isósceles, entonces la mediana y la mediatriz relativas a AB coinciden, por tanto K, L, J están alineados.

Solución Alternativa 2:

Probar que AP es bisectriz de $\angle CAB$, $J \in CL \cup AB$. Se demuestra por Ceva y Thales que CL es mediana de AB. Usando que los trapecios $ABPT$ y $ATCP$ son isósceles, se prueba que $TS = SC$.

Si K, L, J están alineados, como CL es mediana K pertenece a esa mediana. Sea $X \in AK \cap BC$ y $Q \in BK \cap AC$ y se prueba que $ABQX$ es trapecio isósceles y por tanto el triángulo ABC es isósceles. De ahí se prueba que $\triangle BRP \equiv \triangle AST$, lo que implica $PR = TS$ y por tanto $PR = CS$.

Recíprocamente, si $CS = PR$ usando que $ABPT$ es trapecio isósceles se llega a que $\triangle ATS \equiv \triangle BPR$. Ya que $ATCB$ es cíclico $\triangle ABC$ es isósceles y de aquí que K es incentro de $\triangle ABC$ y con esto CL pasa por K. Por lo tanto, K, L, J están alineados.

3. Manipulación algebraica muestra que

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = (a+b)(b+c)(c+a) \tag{5.1}$$

La hipótesis del problema es equivalente a

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b). \tag{5.2}$$

Más manipulaciones algebraicas muestran que

$$(a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b) = a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab+bc+ca). \tag{5.3}$$

Dado que se verifica la desigualdad,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca. \tag{5.4}$$

Usando (5.1)-(5.3) y la desigualdad anterior se comprueba que,

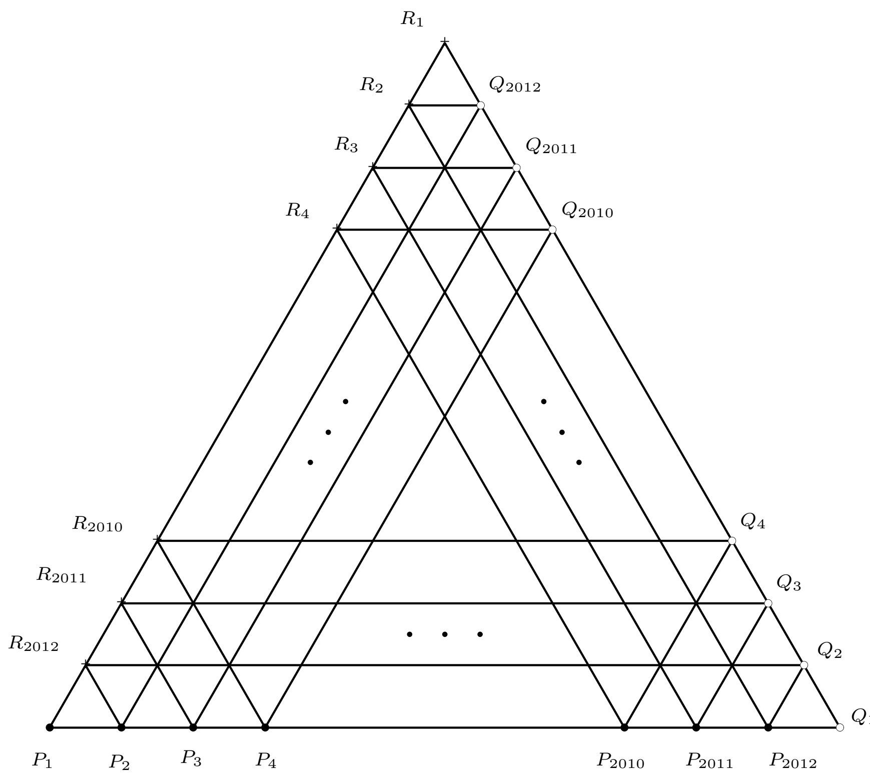
$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \geq 4(ab+bc+ca)$$

Dividiendo por $ab + bc + ca > 0$,

$$a + b + c - \frac{abc}{ab+bc+ca} \geq 4.$$

En (5.4) la igualdad se cumple solamente si $a = b = c = \dfrac{3}{2}$.

4. Considérese el mapa de la ciudad como se presenta a continuación, numerando las esquinas del borde tal como se indica. Se mostrará que el mínimo es 3017.



Considérense las calles P_2R_{2012}, P_3R_{2011}, ..., $P_{1006}R_{1008}$, R_2Q_{2012}, R_3Q_{2011}, ..., $R_{1006}Q_{1008}$, Q_2P_{2012}, Q_3P_{2011}, ..., $Q_{1006}P_{1008}$. Este es un conjunto de 3 015 calles, 1 005 en cada dirección. No hay dos de estas calles que se puedan vigilar con un mismo puesto de vigilancia, de modo que se requieren por lo menos 3 015 puestos de vigilancia. Las calles $P_{1007}R_{1007}$, $R_{1007}Q_{1007}$ y $Q_{1007}P_{1007}$ no pueden vigilarse con ninguno de los puestos de las calles anteriores y se necesitan al menos 2 puestos más para cubrirlas. En total, se requieren mínimo 3 017 puestos.

Para mostrar que esto es suficiente, considérese la configuración en que hay puestos de vigilancia en P_2, P_3, ..., P_{1007}, Q_2, Q_3, ..., Q_{1007}, R_2, R_3, ..., R_{1006}. Esta configuración cumple con las condiciones del problema.

5. Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ las respectivas cantidades de dinero de Alejandro y Luisa al final del n-ésimo día. Las condiciones del problema son entonces

$$a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

Primero notemos que la cantidad $a_n + b_n$ es constante e igual a $a_0 + b_0 = a_0$, así que basta con que uno de los dos chicos tenga una cantidad de dinero entera.

De las dos ecuaciones se puede despejar una relación que solo involucra la cantidad de dinero de uno de los dos, digamos Alejandro: $a_{n+1} = (4a_n - a_{n-1})/3$. Resolviendo esta relación de recurrencia obtenemos una fórmula cerrada para a_n:

$$a_n = \frac{a_0(3^{n+1}+1)}{4\cdot 3^n}.$$

De aquí es claro que $a_{2012} = a_0(3^{2013}+1)/(4\cdot 3^{2012})$ será entero si y sólo si $4\cdot 3^{2012}$ divide a $a_0(3^{2013}+1)$. Ya que 4 divide a $3^{2013}+1$, concluimos que el menor valor de a_0 tal que a_{2012} es entero es 3^{2012}.

Solución Alternativa 1: Del enunciado se deduce que:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{6}a_{n-1} \\ a_n &= \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{5}{6}a_{n-1} \end{aligned}$$

Despejando una recurrencia se llega a alguna de las siguientes dos expresiones:

$$b_n = \frac{1}{3}b_{n-1} + \frac{a_0}{6} \text{ ó } a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{a_0}{2}$$

Ambas recurrencias se resuelven iterando y se llega a:

$$\begin{aligned} b_n &= a_0\frac{3^n-1}{4\cdot 3^n} \\ a_n &= a_0\frac{3^{n+1}+1}{4\cdot 3^n} \end{aligned}$$

Se demuestra que $4|3^n-1$ y $4|3^{n+1}$. Luego se concluye que $3^{2012}|a_0$ y por lo tanto el menor número es $a_0 = 3^{2012}$.

Solución Alternativa 2: Sea a_0 el dinero que posee Alejandro. Note que en los primeros 5 días, analizando la columna de Luisa:

$$\begin{aligned} Primero &= \frac{a_0}{6} \\ Segundo &= \frac{2a_0}{9} \\ Tercero &= \frac{13a_0}{54} \\ Cuarto &= \frac{40a_0}{162} \\ Quinto &= \frac{121a_0}{486} \end{aligned}$$

De estos casos puede conjeturarse que en dado un número par n, las cantidades de dinero para Alejandro y Luisa a_n y b_n son de la forma $a_n = \dfrac{xa_0}{3^n}$ y $b_n = \dfrac{(3^n - x)a_0}{3^n}$ con $(x, 3) = 1$.
Dado que la suma $a_n + b_n$ es entero, basta con el análisis de uno de los dos números por lo que se aplicará inducción sobre n y se demostrará solamente para b_n.
Se tiene que al final del día $k + 1$:

$$b_n = a_0 \frac{(3^n + 2x)}{2 \cdot 3^{k+1}}.$$

De igual manera se tiene que en el día $k + 2$:

$$b_n = a_0 \frac{4x + 3^{k+1} + 5 \cdot 3^k}{4 \cdot 3^{k+2}}.$$

Analizando módulo 4 se demuestra que $4|4x + 3^{k+1} + 5 \cdot 3^k$.
Además $(4x + 3^{k+1} + 5 \cdot 3^k, 3) = (4x, 3) = (x, 3) = 1$.
Esto termina la inducción, por lo que el día 2012, $b_n = \dfrac{k \cdot a_0}{3^{2012}}$ lo cual implica que $3^{2012}|k \cdot a_0$ y esto es: $3^{2012}|a_0$ el mínimo es $a_0 = 3^{2012}$.

Solución Alternativa 3: Similar a la solución anterior conjeturemos que el día n Luisa tiene $\left(\frac{3^n-1}{4}\right)\frac{a_0}{3^n}$ y Alejandro $\left(\frac{3^{n+1}+1}{4\cdot 3^n}\right)a_0$. Se prueba por inducción sobre n que se cumplen estas 2 expresiones, es decir en el día $n+1$ Luisa tendría,

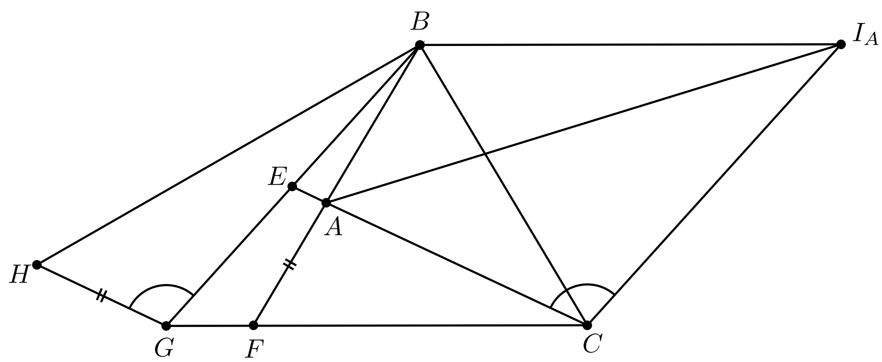
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3^n - 1}{2}\right)\frac{a_0}{3^n} + \frac{1}{3}\left(\frac{3^{n+1}+1}{4 \cdot 3^n}\right)a_0\right] \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1}-1}{2}\right)\frac{a_0}{3^{n+1}}$$

Lo mismo sucede para el caso de Alejandro por lo que al finalizar el día 2012 Luisa tendría

$$\left(\frac{3^{2012} - 1}{4}\right)\frac{a_0}{3^{2012}}$$

y Alejandro tendría
$$\left(\frac{3^{2012}+1}{4\cdot 3^{2012}}a_0\right).$$
Analizando en módulo 4 las expresiones $3^{2012}+1$ y $3^{2013}-1$ se demuestra que ambas son múltiplos de 4. Por lo tanto para que ambas cantidades sean enteras, es suficiente con que $3^{2012}|a_0$
Por lo que el mínimo es $a_0 = 3^{2012}$.

6.



Sea I_A el excentro de $\triangle ABC$ relativo al vértice A. Notar que $\angle GBC = \angle BEC = 90°-\frac{1}{2}\angle BCE = \angle I_ACB$, de donde $BG \parallel CI_A$; y de manera análoga $CG \parallel BI_A$. Se obtiene que $BGCI_A$ es un paralelogramo, de donde es posible concluir $GB = CI_A$ y $\angle HGE = \angle ACI_A$.
Aplicando el Teorema de Menelao en el triángulo $\triangle ABE$ con respecto a la transversal FGC se tendría:
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BG}{GE}\cdot\frac{EC}{CA}=1$$
Pero $FB = CE$, $GB = CI_A$ y $FA = HG$. Por lo tanto $\frac{AC}{CI_A} = \frac{HG}{GE}$, implicando $\triangle ACI_A \sim \triangle HGE$. Esta semejanza permite concluir que $\angle EHG = \angle CAI_A = \frac{1}{2}\angle BAC$.

Capítulo 6

Olimpiada Iberoamericana de Matemática

La XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemática tuvo lugar en Cochabamba, Bolivia, del 1 al 6 de octubre de 2012. En la misma participaron dieciocho países: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico y Uruguay. Portugal ganó la Copa Puerto Rico.

6.1. Problemas

(Primer Día)

Problema 1. Sobre el rectángulo $ABCD$ se dibujan los triángulos equiláteros BCX y CDY de modo que cada uno comparte puntos con el interior del rectángulo. La recta AX corta a la recta DC en P. La recta AY corta a la recta BC en Q. Demostrar que el triángulo APQ es equilátero.

Problema 2. Un entero positivo es *bisumado* si lo podemos escribir como suma de dos enteros positivos que tengan la misma suma de dígitos entre sí. Por ejemplo, 2012 es bisumado pues $2012 = 2005+7$ y tanto 2005 como 7 tienen suma de dígitos igual a 7. Encontrar todos los enteros positivos que no son bisumados.

Problema 3. Sea n un entero positivo. Dado un conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de enteros entre 0 y $2^n - 1$ inclusive, a cada uno de sus 2^n subconjuntos se le asigna la suma de sus elementos; en particular, el subconjunto vacío tiene suma 0. Si estas 2^n sumas son todas distintas módulo 2^n, se dice que el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es n-completo. Determinar, para cada n, la cantidad de conjuntos n-completos.

(Segundo Día)

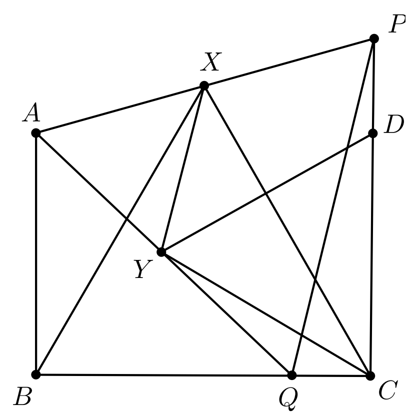
Problema 4. Sean a, b, v, d números enteros positivos tales que $a-b+c-d$ es impar y divide a $a^2-b^2+c^2-d^2$. Demostrar que $a-b+c-d$ divide a $a^n-b^n+c^n-d^n$ para todo entero positivo n.

Problema 5. Sea ABC un triángulo y sean P y Q los puntos de intersección de la paralela a BC por A con las bisectrices exteriores de los ángulos B y C, respectivamente. La perpendicular a BP por P y la perpendicular a CQ por Q se cortan en R. Sea I el incentro de ABC. Demostrar que $AI = AR$.

Problema 6. Demostrar que para todo entero positivo n existen n enteros positivos consecutivos tales que ninguno es divisible por la suma de sus respectivos dígitos.

6.2. Soluciones

1. Como X pertenece a la mediatriz de AD es claro que X es punto medio de AP. Análogamente Y es punto medio de AQ. Entonces $\triangle APQ$ y $\triangle AXY$ son homotéticos, y $\triangle APQ$ es equilátero si y sólo si $\triangle AXY$ lo es. Pero $\triangle YCX$, $\triangle YDA$ y $\triangle ABX$ son congruentes, pues tienen dos lados respectivamente iguales a los del rectángulo $ABCD$ y los ángulos comprendidos de $30°$. Por lo tanto $AX = XY = YA$.



2. Los números pares obviamente son bisumados. Si examinamos los impares, los primeros que *no son* bisumados son: 1, 3, 5, 7, 9, 29, 49, 69, 89, 199, 399,... Esto nos lleva a conjeturar que todos los enteros positivos son bisumados excepto los de la forma $a\underbrace{99\ldots9}_{k}$ con a y k de diferente paridad. Veamos primero que ninguno de estos es bisumado. En efecto, si $a99\dots9 = b_0b_1\dots b_k + c_0c_1\dots c_k$ (donde algunos b_i o c_i a la izquierda pueden ser nulos) entonces es claro que no hay arrastres y que $b_0+c_0 = a$ y $b_i+c_i = 9$ para $i = 1,\dots,k$. Es decir que $\sum_{i=0}^k b_i+\sum_{i=0}^k c_i = a+9k$. Si a y k tienen diferente paridad entonces $a+9k$ es impar y por lo tanto $\sum_{i=0}^k b_i$ y $\sum_{i=0}^k c_i$ no pueden ser iguales.

Un número $a_0a_1\dots a_k$ con un número par de cifras impares es bisumado. En efecto, si a_i espar pongamos $b_i = c_i = a/2$. Las cifras impares las agrupamos de a pares. Si por ejemplo $a_i = 2r+1$ y $a_j = 2s+1$ son uno de esos pares, entonces pongamos $b_i = r+1$, $c_i = r$, $b_j = s$, $c_j = s+1$. Por ejemplo $145387 = 122243+23144$. Observemos que los b_i y los c_i son menores o iguales que 5, y que sólo pueden ser 5 si $a_i = 9$.

Veamos ahora que cualquier número $n = a_0a_1\dots a_k$ con $a_i \neq 9$ para algún $i > 0$ es bisumado. Por lo que acabamos de ver, es suficiente tratar el caso en que hay un número impar de cifras impares. Tomemos el menor $i > 0$ tal que $a_i \neq 9$. Entonces $a_{i-1} > 0$ y, si se sustituye a_{i-1} por $a_{i-1}-1$ se obtiene un número n' con un número par de cifras impares, que por consiguiente es bisumado y se puede escribir como $b_0b_1\dots b_k+c_0c_1\dots c_k$ como vimos en el párrafo anterior. Ahora bien, como $a_i \neq 9$ entonces $b_i, c_i \leq 4$, por lo cual podemos sustituir b_i y c_i por b_i+5 y c_i+5 respectivamente, obteniendo dos números con igual suma de dígitos y cuya suma es n.

Sea n un entero positivo. Dado un conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de enteros entre 0 y 2^n-1 inclusive, a cada uno de sus 2^n subconjuntos se le asigna la suma de sus elementos; en particular, el subconjunto vacío tiene suma 0. Si estas 2^n sumas son todas distintas módulo 2^n, se dice que el conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es n-completo. Determinar, para cada n, la cantidad de conjuntos n-completos.

3. Sea $S(n)$ la cantidad de conjuntos n-completos. Para $n = 2$ hay 7 subconjuntos de $\{0, 1, 2, 3\}$ con 2 elementos, de los cuales los únicos 2-completos son $\{1, 2\}$ y $\{2, 3\}$, es decir que $S(2) = 2$.

Sea k un entero impar y supongamos que $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es n-completo. Sea $b_i = ka_i \pmod{2^n}$ el resto de la división entera de ka_i entre 2^n. Entonces el conjunto $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ es n-completo. En efecto, si dos sumas de diferentes b_i's fuesen congruentes módulo 2^n, las correspondientes sumas de ka_i's también lo serían, y como k es impar habría dos sumas de diferentes a_i's congruentes módulo 2^n, contradiciendo el hecho de que $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es n-completo.

Si $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es n-completo entonces algún a_i es impar (de lo contrario no se podría obtener ninguna suma impar). Sin pérdida de generalidad supongamos que a_1 es impar. Sea c un inverso multiplicativo de a_1 módulo 2^n, es decir un entero entre 0 y 2^n-1 tal que $ca_1 \equiv 1 \pmod{2^n}$. Si $b_i = ca_i \pmod{2^n}$ entonces $\{1, b_2, \dots, b_n\}$ es n-completo.

Sea A el conjunto de sumas módulo 2^n de los subconjuntos de $\{1, b_2, \dots, b_n\}$ que no contienen al 1, y B el conjunto de las sumas módulo 2^n de los subconjuntos que sí contienen al 1. Notemos que tanto A como B tienen 2^{n-1} elementos y que la unión de A y B es el conjunto de todos los restos módulo 2^n.

Afirmamos que todos los restos pares están en A y todos los impares en B. Procedamos por inducción: el 0 claramente está en A, porque es la suma del conjunto vacío. El 1 claramente está en B. Supongamos que ya lo probamos hasta r. Si r es par, sabemos que hay un subconjunto que no contiene al 1 con suma r. Entonces le agregamos el 1 y tenemos un subconjunto que contiene al 1 con suma $r+1$, es decir que el impar $r+1$ está en B. Si r es impar, supongamos que $r+1$ estuviese en B para llegar a un absurdo. Entonces habría un subconjunto que contiene al 1 con suma $r+1$, y quitándole el 1 se tiene un subconjunto que no contiene al 1 con suma r, que es impar, absurdo por hipótesis inductiva.

Observemos que como todos los números en A son pares, todos los números del conjunto $\{b_2,\ldots,b_n\}$ son pares, y por lo tanto también $a_2,\ldots,\ a_n$ son pares. Es decir que en cualquier conjunto n-completo hay exactamente un número impar.

Además, como las sumas de los subconjuntos de $\{b_2,\ldots,b_n\}$ son todos los restos pares módulo 2^n, las sumas de los subconjuntos de $\{b_2/2,\ldots,b_n/2\}$ son todos los restos módulo 2^{n-1}, es decir que $\{b_2/2,\ldots,b_n/2\}$ es $(n-1)$-completo.

Procediendo a la inversa se pueden construir todos los conjuntos n-completos a partir de los $(n-1)$-completos. Para ello se toma un $(n-1)$-completo, sus elementos se multiplican por 2, se les agrega el 1, y finalmente se multiplica por cualquier impar entre 1 y 2^n-1 (módulo 2^n). Esto muestra que $S(n)=2^{n-1}S(n-1)$, y por lo tanto

$$S(n)=2^{n-1}2^{n-2}\cdots 2^2\cdot S(n-2)=2^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

4. Sea $m=a-b+c-d$. Entonces $a+c\equiv b+d \pmod{m}$ y $a^2+c^2\equiv b^2+d^2 \pmod{m}$. Elevando la primera congruencia al cuadrado y restándole la segunda resulta $2ac\equiv 2bd \pmod{m}$, pero como m es impar, se tiene que $ac\equiv bd \pmod{m}$. Probaremos por inducción que $a^n+c^n\equiv b^n+d^n \pmod{m}$ para todo $n\geq 1$. Para $n=1$ y $n=2$ es cierto. Supongamos que $a^k+c^k\equiv b^k+d^k \pmod{m}$ para $k=1,2,\ldots,n$. Entonces multiplicando las congruencias $a+c\equiv b+d \pmod{m}$ y $a^n+c^n\equiv b^n+d^n \pmod{m}$ miembro a miembro se tiene

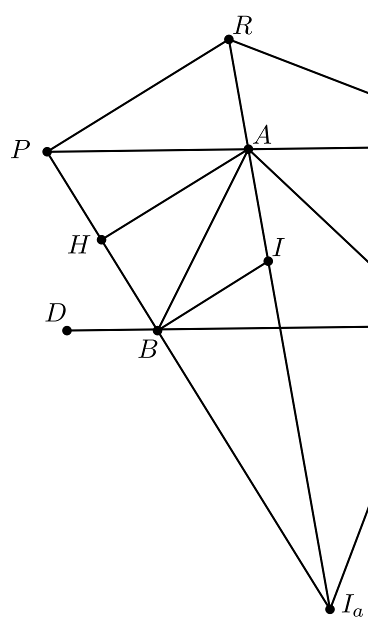
$$(a+c)(a^n+c^n)\equiv(b+d)(b^n+d^n) \pmod{m},$$

es decir

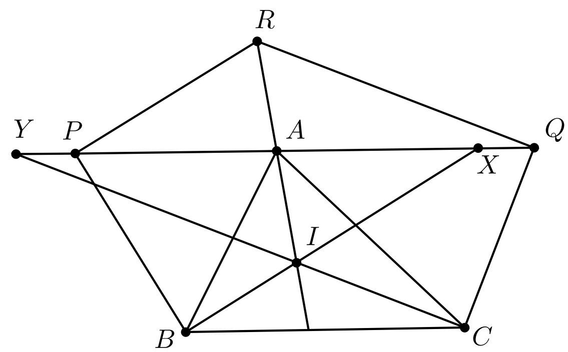
$$a^{n+1}+c^{n+1}+ac(a^{n-1}+c^{n-1})\equiv b^{n+1}+d^{n+1}+bd(b^{n-1}+d^{n-1}) \pmod{m}.$$

Pero como $ac\equiv bd \pmod{m}$ y $a^{n-1}+c^{n-1}\equiv b^{n-1}+d^{n-1} \pmod{m}$ por hipótesis inductiva, resulta $a^{n+1}+c^{n+1}\equiv b^{n+1}+d^{n+1}$ como queríamos.

5. Sea I_a el excentro correspondiente al vértice A. La bisectriz de $\angle BAC$ y las bisectrices exteriores de $\angle ABC$ y $\angle BCA$ pasan por I_a, es decir que I_a, I y A son colineales. Como $\angle I_aBI = \angle I_aCI = 90°$, los puntos I_a, B, I y C son concíclicos (pertenecen a la circunferencia de diámetro II_a) y por lo tanto $\angle CI_aI = \angle CBI$. Del mismo modo I_a, P, R y Q son concíclicos (pues $\angle I_aPR = \angle I_aQR = 90°$) y por lo tanto $\angle QI_aR = \angle QPR$. Pero $QP \parallel CB$ y $RP \parallel IB$ (pues $RP \perp PB \perp IB$), por lo tanto $\angle QPR = \angle CBI$ y resulta $\angle QI_aR = \angle CBI = \angle CI_aI$. Por lo tanto R es colineal con I_a, I y A. Ahora bien, $\triangle PAB$ es isósceles pues $\angle APB = \phi = \angle PBA$, luego el pie H de la altura desde A es el punto medio de PB, y por el teorema de Tales A es el punto medio de RI.



Solución alternativa: Sean X e Y los puntos de intersección de BI y CI con PQ, respectivamente. Como $\angle AXB = \angle XBC = \angle XBA$ resulta $AX = AB$, y análogamente $AB = AP$, es decir que A es punto medio de PX. Por un razonamiento análogo A es punto medio de YQ. Entonces la simetría de centro A transforma P en X y Q en Y. Pero como $\angle YXB = \angle XBC = \angle RPQ$ y $\angle QYC = \angle YCB = \angle RQP$, las rectas PR y QR se transforman en las XB e YC, respectivamente, y la intersección R se transforma en I, de donde $AR = AI$.



6. Sea $S(a)$ la suma de los dígitos de a. Probaremos que para cualquier $k \geq 4$ existe A tal que $10^k \cdot A + j$ no es divisible entre $S(10^k \cdot A + j)$, para $j = 1, 2, \ldots, 10^k - 1$. Es claro que esto es suficiente.

Primero observemos que para cada natural i, por el postulado de Bertrand, existe un primo p_i tal que $2^{i-1} \cdot 10^k < p_i < 2^i \cdot 10^k$. Consideremos p_1, p_2,... p_{9k} y sea P el producto de esos $9k$ primos. Como todos los p_i son menores que $2^{9k}10^k = 8^{3k}10^k < 10^{4k}$, su producto P es menor que $(10^{4k})^{9k} = 10^{36k^2}$. Es decir que P tiene a lo sumo $36k^2$ cifras y por lo tanto $S(P) \leq 9 \cdot 36k^2 = 324k^2$. Pero es fácil ver que $324k^2 < 10^k$ para $k \geq 4$, por lo tanto ningún p_i divide a $S(P)$. Entonces $S(P)$ tiene un inverso multiplicativo b_i módulo p_i para cada $i = 1, \ldots, 9k$. Consideremos ahora el sistema de congruencias $S(P)x + i \equiv 0 \pmod{p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, 9k$. Este sistema es equivalente a $x \equiv -ib_i \pmod{p_i}$, que por el teorema chino de los restos tiene una solución x entera positiva. Sea ahora A el número obtenido concatenando x copias de P. Entonces $S(10^k \cdot A + j) = S(A) + S(j) = S(P)x + S(j)$ es divisible entre $p_{S(j)}$, pero como $p_{S(j)}$ divide a P y por lo tanto a A, y como $0 < j < 10^k < p_{S(j)}$, resulta que $p_{S(j)}$ no divide a $10^k \cdot A + j$. Por lo tanto, $S(10^k \cdot A + j)$ no divide a $10^k \cdot A + j$, y listo.

Capítulo 7

Olimpiada Internacional de Matemática

ESTA sección está dedicada a la Olimpiada Internacional de Matemáticas 2012, IMO, celebrada en Mar del Plata, Argentina, del 4 al 16 de Julio. Nuestro equipo estuvo integrado por la joven Rubmary Rojas, del colegio San Vicente de Paúl, de Barquisimeto, Diego Peña, colegio Los Hipocampitos, Altos Mirandinos y Sergio Villarroel, colegio San Lázaro, Cumaná. La tutora de la delegación fue la profesora Laura Vielma, de la Academia Washington y el jefe de delegación, el profesor Rafael Sánchez Lamoneda, de la UCV. El joven Diego Peña obtuvo una Mención Honorífica por su solución al problema 1 de la competencia. Las soluciones que damos a los problemas planteados son las oficiales del banco de problemas, y en el problema 1 mostramos además la solución dada por Diego Peña.

7.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Dado un triángulo ABC, el punto J es el centro del excírculo opuesto al vértice A. Este excírculo es tangente al lado BC en M, y a las rectas AB y AC en K y L, respectivamente. Las rectas LM y BJ se cortan F, y las rectas KM y CJ se cortan en G. Sea S el punto de intersección de las rectas AF y BC, y sea T el punto de intersección de las rectas AG y BC. Demostrar que M es el punto medio de ST.

Problema 2. Sea $n \geq 3$ un entero, y sean $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$ Demostrar que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^2\dots(1+a_n)^2 > n^n$$

Problema 3. El *juego de la adivinanza del mentiroso* es un juego para dos jugadores A y B. Las reglas del juego dependen de dos enteros positivos k y n conocidos por ambos jugadores. Al principio del juego, el jugador A elige enteros x y N con $1 \leq x \leq N$. El jugador A mantiene x en secreto, y le dice a B el verdadero valor de N. A continuación, el jugador B intenta obtener información acerca de x formulando preguntas a A de la siguiente manera: en cada pregunta, B especifica un conjunto arbitrario S de enteros positivos (que puede ser uno de los especificados en alguna pregunta anterior), y pregunta a A si x pertenece a S. El jugador B puede hacer tantas preguntas de ese tipo como desee. Después de cada pregunta, el jugador A debe responderla inmediatamente con sí o no, pero puede mentir tantas veces como quiera. La única restricción es que entre cualesquiera $k+1$ respuestas consecutivas, al menos una debe ser verdadera. Cuando B haya formulado tantas preguntas como haya deseado, debe especificar un conjunto X de a lo más n enteros positivos. Si x pertenece a X entonces gana B; en caso contrario, pierde. Demostrar que:

1. Si $n \geq 2^k$, entonces B puede asegurarse la victoria.
2. Para todo k suficientemente grande, existe un entero $n \geq 1,99^k$ tal que B no puede asegurarse la victoria.

Segundo Día

Problema 4. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplen la siguiente igualdad

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

para todos los enteros a, b, c que satisfacen $a + b + c = 0$.
($\mathbb{Z}$ denota al conjunto de los números enteros)

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BCA = 90°$, y sea D el pie de la altura desde C. Sea X un punto interior del segmento CD. Sea K el punto del segmento AX tal que $BK = BC$. Análogamente, sea L el punto del segmento BX tal que $AL = AC$. Sea M el punto de intersección de AL y BK. Demostrar que $MK = ML$.

Problema 6. Hallar todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros no negativos a_1, a_2,..., a_n tales que

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

7.2. Soluciones

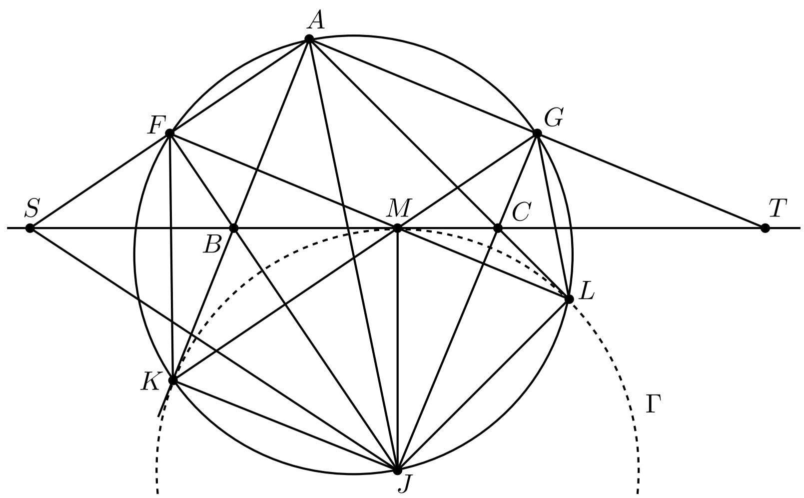
1. Sea Γ el excírculo opuesto a A y centro J. Sea $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ y $\gamma = \angle BCA$. Como la recta AJ es la bisectriz de α, tenemos

$$\angle JAK = \angle JAL = \frac{\alpha}{2}.$$

Sea ω la circunferencia de diámetro AJ. Como AK y AL son rectas tangentes a Γ tenemos que

$$\angle AKJ = \angle ALJ = 90^\circ.$$

En consecuencia los puntos K y L están en ω.



Como BK y BM son tangentes a Γ, entonces el triángulo KBM es isósceles. Por otra parte la recta BJ es bisectriz del ángulo $\angle KBM$, por lo tanto $\angle MBJ = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ y $\angle BMK = \frac{\beta}{2}$. Análogamente, $\angle MCJ = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ y $\angle CML = \frac{\gamma}{2}$

Además $\angle BMF = \angle CML$, y $\angle JBS = \angle MBF$, por ser opuestos por el vértice.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \angle LFJ + \angle BMF &= 180^\circ - \angle MBF \\ &= 180^\circ - \angle JBS \\ &= \angle MBJ \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\angle LFJ = \angle MBJ - \angle BMF = (90^\circ - \frac{\beta}{2}) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} \angle LAJ.$$

En consecuencia F está en ω.

Análogamente, G también está en ω. Como AJ es un diámetro de ω, tenemos finalmente que $\angle AFJ = \angle AGJ = 90°$

Consideremos ahora las rectas AB y BC, ellas son simétricas con respecto a la bisectriz exterior BF.

Como AF es perpendicular a BF y KM es perpendicular a BF, los segmentos SM y AK también son simétricos con respecto a BF y por lo tanto $SM = AK$.

Por simetría $TM = AL$, y con esto tenemos lo que queremos demostrar pues AK y AL son tangentes al excírculo desde A y por lo tanto son iguales y entonces $SM = AK = AL = TM$.

Solución de Diego Peña. Sean l_1 la recta que contiene a F, M y L y l_2 la recta que contiene a G, M y K. Aplicando el teorema de Menelao a l_1 y al triángulo ASC tenemos que

$$\frac{AS}{FS} \cdot \frac{SM}{MC} \cdot \frac{CL}{LA} = 1. \tag{1}$$

Aplicando el teorema de Menelao a l_2 y al triángulo ATM tenemos que

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MT} \cdot \frac{TG}{GA} = 1. \tag{2}$$

Como AK, AL, BK, BM, CM y CL son tangentes al excírculo Γ del triángulo ABC opuesto a A, tenemos que

$$AK = AL, \quad BK = BM \quad \text{y} \quad CM = CL. \tag{3}$$

Multiplicando (1) por (2) y reordenando nos queda:

$$\frac{SM}{MT} \cdot \frac{AF}{FS} \cdot \frac{GT}{GA} \cdot \frac{CL}{CM} \cdot \frac{AK}{AL} \cdot \frac{BM}{KB} = 1,$$

pero reordenando las igualdades en (3) podemos simplificar y queda:

$$\frac{SM}{MT} \cdot \frac{AF}{FS} = 1. \tag{4}$$

Supongamos que $FG \parallel ST$. Entonces por el teorema de Tales, $\frac{FA}{FS} = \frac{GA}{GT}$ implica que $\frac{AF}{FS} \cdot \frac{GT}{GA} = 1$ y reemplazando en (4) nos diría que $SM = MT$, por lo tanto M es el punto medio ST. Es decir: si FG y ST son paralelas, entonces M es el punto medio de ST.

Demostraremos ahora que FG y ST son paralelas. Sean D y P los puntos medios de MK y ML respectivamente. Como J es el centro de Γ, entonces $JM = JK$. Como ya vimos en (3), $BK = BM$. Luego, tenemos que BJ es la mediatriz de KM. Es decir, J, D y B son colineales y $\angle BDM = 90°$. De igual manera vemos que CJ es la mediatriz de ML por lo que C, P y J son colineales y $\angle CPM = 90°$.

Como $\angle GPF = \angle CPM = 90°$ y $\angle FDG = \angle BDM = 90°$, los ángulos $\angle GPF$ y $\angle GDF$ son iguales y entonces el cuadrilátero $GPDF$ es concíclico, de donde;

$$\angle FGM = \angle FGD = \angle FPD = \angle MPD.$$

Como D y P son los puntos medios de MK y ML, tenemos que DP es paralela a KL, por lo tanto $\angle MLK = \angle MPD$. Como BM es tangente a Γ, $\angle BMK = \angle MLK$. Por ser ángulos opuestos por el vértice, $\angle GMC = \angle BMK$. Entonces tenemos que:

$$\angle GMC = \angle BMK = \angle MLK = \angle MPD = \angle FGM.$$

Por lo tanto las rectas FG y MC son paralelas. Pero las rectas MC y ST son la misma recta, entonces FG y ST son paralelas y la demostración es completa.

2. Comencemos haciendo una sustitución, con la finalidad de obtener una desigualdad equivalente, pero que nos permita trabajarla mejor. Con este fin, consideremos $n-1$ números reales positivos $x_1, \ldots, x_{n-1} > 0$ y hagamos

$$a_2 = \frac{x_2}{x_1}, a_3 = \frac{x_3}{x_2}, \ldots, a_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}, a_n = \frac{x_1}{x_{n-1}}.$$

Entonces tenemos las siguientes equivalencias,

$$\begin{aligned}
&(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n \Leftrightarrow \\
&(1+\frac{x_2}{x_1})^2(1+\frac{x_3}{x_2})^3\cdots(1+\frac{x_1}{x_{n-1}})^n > n^n \Leftrightarrow \\
&(x_1+x_2)^2(x_2+x_3)^3\cdots(x_{n-1}+x_n)^n > n^n x_1^2 x_2^3 \cdots x_{n-1}^n,
\end{aligned}$$

para todo $x_1, \ldots, x_{n-1} > 0$.

Usando ahora $MA - MG$ en cada factor del lado izquierdo de la última desigualdad, tenemos:

$$\begin{array}{ccc}
(x_1+x_2)^2 & \geq & 2^2 x_1 x_2 \\
(x_2+x_3)^3 = (2\frac{x_2}{2}+x_3)^3 & \geq & 3^3(\frac{x_2}{2})^2 x_3 \\
(x_3+x_4)^4 = (3\frac{x_3}{3}+x_4)^4 & \geq & 4^4(\frac{x_3}{3})^3 x_4 \\
 & \vdots & \\
(x_{n-1}+x_1)^n = ((n-1)\frac{x_{n-1}}{n-1}+x_1)^n & \geq & n^n(\frac{x_{n-1}}{n-1})^{n-1} x_1.
\end{array}$$

Multiplicando ahora miembro a miembro obtenemos:

$$(x_1+x_2)^2(x_2+x_3)^3\ldots(x_{n-1}+x_1)^n \geq n^n x_1^2 x_2^3 \ldots x_{n-1}^n.$$

La igualdad ocurre si $x_1 = x_2$, $x_2 = 2x_3$, $\;x_{n-1} = (n-1)x_1$, lo cual implica que $x_1 = (n-1)!x_1$. Pero como $x_1 > 0$ y $n \geq 3$, tenemos una contradicción y por lo tanto la desigualdad es estricta, como queríamos demostrar.

3. (a) Supongamos que el jugador B ha determinado un conjunto T de m elementos que contiene a x (al principio del juego $T = \{1, 2, \dots, N\}$). Si $m \leq n$ entonces B gana. Si $m > n \geq 2^k$ veremos que B puede descartar uno de los elementos de T como candidato a x. Así podrá ir descartando elementos uno tras otro hasta quedar con un conjunto T de n elementos, ganando. Comencemos por etiquetar los elementos de T con enteros consecutivos a partir del 0. En lo que sigue nos referiremos a los elementos de T por sus etiquetas. Primero B pregunta si x está en $\{2^k\}$ (es decir, si x es el elemento de T etiquetado como 2^k). Si la respuesta es negativa, repite la pregunta hasta obtener un SI o completar $k+1$ preguntas, lo que ocurra primero. Si obtiene una sucesión de $k+1$ respuestas negativas, alguna de ellas (y por lo tanto todas) es verdadera, es decir que se puede descartar 2^k de T. Si en cambio obtiene un SI, B continúa preguntando, para i desde 1 hasta k, si x está en el conjunto de los elementos de T que tienen un 1 en la posición i (de derecha a izquierda) de su representación binaria. Con las respuestas B construye un número y ($0 \leq y < 2^k$) poniendo, en la posición i, un 0 si la respuesta fue SI o un 1 si la respuesta fue NO. Una de las últimas $k+1$ respuestas fue verdadera, luego o bien $x = 2^k$ o bien x difiere de y en alguna de las primeras k posiciones binarias; en cualquier caso $y \neq x$, es decir que se puede descartar y de T.

(b) Sea $\lambda = 0{,}995$. Definamos una estrategia para A así: se toma $N = n + 1$ y x cualquiera en $\{1, 2, \dots, N\}$. Tomemos $n = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$. Como

$$\frac{n}{1{,}99^k} \geq \frac{(2-\lambda)\lambda^{k+1} - 2}{1{,}99^k} = 0{,}005\lambda\alpha^k - \frac{2}{1{,}99^k},$$

donde $\alpha = \lambda/1{,}99 > 1$, es claro que para k suficientemente grande se tiene $n \geq 1{,}99^k$.

Ahora para cada $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ sea m_i la cantidad de respuestas consecutivas anteriores al momento presente que serían falsas si el número a adivinar fuese i. Sea

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i}.$$

Para cada pregunta que B formule, A dará la respuesta que minimice Φ. Probaremos que esta estrategia en ningún momento violará la condición sobre el máximo de respuestas falsas consecutivas y más aún, garantiza la victoria de B. Ambas cosas quedarán probadas si se muestra que en todo momento $\Phi < \lambda^{k+1}$, ya que entonces ningún m_i llegará a valer $k+1$ y, como la estrategia es independiente de x, B no podrá hacer ninguna deducción acerca de x.

Inicialmente el valor de Φ es

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda^0 = n + 1 = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor < \lambda^{k+1}.$$

Supongamos que en cierto momento $\Phi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i} < \lambda^{k+1}$ y que B ha preguntado si x pertenece a cierto S. Según que A responda SI o NO, el nuevo valor de Φ será

$$\Phi_1 = \sum_{i\in S} 1 + \sum_{i\notin S} \lambda^{m_i+1} \qquad \text{o} \qquad \Phi_2 = \sum_{i\in S} \lambda^{m_i+1} + \sum_{i\notin S} 1.$$

Según la estrategia, A responderá de modo que el nuevo valor de Φ sea $\min(\Phi_1, \Phi_2)$. Pero

$$\Phi_1 + \Phi_2 = n + 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i+1} = n + 1 + \lambda\Phi < (2-\lambda)\lambda^{k+1} + \lambda^{k+2} = 2\lambda^{k+1},$$

de donde

$$\text{mín}(\Phi_1, \Phi_2) \leq \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) < \lambda^{k+1}.$$

4. Comenzamos dando valores de a, b y c, a fin de obtener información inicial sobre las funciones buscadas.

Consideremos $a = b = c = 0$, entonces

$$3f(0)^2 = 6f(0)^2$$

y tenemos que

$$f(0) = 0. \tag{1}$$

Hagamos ahora $b = -a$ y $c = 0$, entonces

$$f(a)^2 + f(-a)^2 = 2f(a)f(-a).$$

es decir,$(f(a) - f(-a))^2 = 0$ y en consecuencia para todo entero a, $f(a) = f(-a)$, es decir f es una función par.

Ahora hagamos $b = a$ y $c = -2a$, entonces

$$2f(a)^2 + f(2a)^2 = 2f(a)^2 + 4f(a)f(2a).$$

Por lo tanto

$$f(2a)(f(2a) - 4f(a)) = 0$$

y entonces

$$f(2a) = 0 \quad \text{ó} \quad f(2a) = 4f(a) \quad \text{para todo } a \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Supongamos ahora que para algún $r \geq 1$ $f(r) = 0$, entonces sustituyendo $b = r$ y $c = -a - r$, nos queda

$$f(a)^2 + f(a+r)^2 = 2f(a)f(a+r).$$

Por lo tanto

$$\big(f(a+r) - f(a)\big)^2 = 0,$$

es decir, $f(a+r) = f(a)$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ y en consecuencia f es periódica con período r.

En particular si $f(1) = 0$, entonces f es la función nula, la cual claramente satisface la ecuación funcional original.

Para el resto del análisis, supongamos que $f(1) = k \neq 0$. Por (2) hay dos posibilidades, o bien $f(2) = 0$ o bien $f(2) = 4k$.

Si $f(2) = 0$, entonces f es periódica de periódo 2, y tenemos $f(2n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $f(2n+1) = k$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

esta función es una solución para todo $k \in \mathbb{Z}$. Esto será veificado al final.

Supongaomos entonces que $f(2) = 4k \neq 0$.

De nuevo por (2), o bien $f(4) = 0$ o bien $f(4) = 4f(2) = 16k \neq 0$.

Si $f(4) = 0$, entonces f es periódica de período 4 y

$$f(3) = f(-1+4) = f(-1) = f(1) = k \neq 0,$$

en consecuencia tenemos que $f(4n) = 0$, $f(4n+1) = f(4n+3) = k$ y $f(4n+2) = f(2) = 4k$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Esta función también es una de las soluciones buscadas, como verificaremos al final.

Para el resto del análisis supongamos que $f(4) = 16k \neq 0$.

Sabemos entonces que $f(1) = k$, $f(2) = 4k$ y $f(4) = 16k$. Calculemos ahora $f(3)$. Para ello consideraremos las sustituciones: $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$ y $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$.

En el primer caso

$$f(1)^2 + f(2)^2 + f(3)^2 = 2f(1)f(2) + 2f(2)f(3) + 2f(3)f(1),$$

es decir

$$k^2 + 16k^2 + f(3)^2 = 8k^2 + 8f(3)k + 2f(3)k$$

o bien

$$f(3)^2 - 10kf(3) + 9k^2 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática en $f(3)$, nos da las soluciones $f(3) = 9k$ o $f(3) = k$. Dicho de otra forma, $f(3) \in \{k, 9k\}$.

En el segundo caso, procediendo de manera análoga nos queda la ecuación cuadrática en $f(3)$, $f(3)^2 - 34kf(3) + 225k^2 = 0$ y entonces $f(3) \in \{9k, 25k\}$.

Por lo tanto $f(3) = 9k$.

Tenemos entonces que $f(0) = 0$, $f(1) = k$, $f(2) = 4k$, $f(3) = 9k$ y $f(4) = 16k$. Demostraremos por inducción para todo $x \in \mathbb{Z}$, que la única posibilidad para f, cuando f no es periódica y $f(1) = k \neq 0$, es que $f(x) = kx^2$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $n \geq 4$ y que $f(x) = kx^2$, para todo entero $x \in [0, n]$. Haciendo las sustituciones $a = n$, $b = 1$, $c = n - 1$ y $a = n - 1$. $b = 2$, $c = -n - 1$, un análisis similar al anterior nos lleva a que $f(n+1) \in \{k(n+1)^2, k(n-1)^2\}$ y $f(n+1) \in \{k(n+1)^2, k(n-3)^2\}$.

Como $k(n-1)^2 \neq k(n-3)^2$, pués $n \geq 4$, tenemos que $f(n+1) = k(n+1)^2$, y esto completa la inducción. En consecuencia $f(x) = kx^2$ para todo $x \geq 0$ y como f es una función par, entonces $f(x) = kx^2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Demostremos ahora que $f(x) = kx^2$ es una solución. Sean a, b y c números enteros tales que, $a + b + c = 0$. Entonces $c = -a - b$ y como f es par, nos queda que:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = f(a)^2 + f(b)^2 + f(a+b)^2 = k^2a^4 + k^2b^4 + k^2(a+b)^4.$$

Por otra parte

$$2f(a)f(b)+2f(b)f(a+b)+2f(a+b)f(a) = 2k^2a^2b^2+2k^2b^2(a+b)^2+2k^2(a+b)^2a^2,$$

pero como se puede ver calculando directamente, $a^4+b^4+(a+b)^4 = 2a^2b^2+2b^2(a+b)^2+2(a+b)^2a^2$ y como $k \neq 0$, tenemos que $f(x) = kx^2$ cumple la condición pedida y es una solución.

En conclusión, las únicas soluciones posibles son la función nula, $f_1(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, la función dada por $f_2(x) = kx^2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$ y además las siguientes:

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es par,} \\ k & \text{si } x \text{ es impar,} \end{cases}$$

y

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv 0 \pmod{4}, \\ k & \text{si } x \equiv 1 \pmod{2}, \\ 4k & \text{si } x \equiv 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

para cualquier entero $k \neq 0$.

Ya hemos verificado que las dos primeras, f_1 y f_2 son soluciones, solo nos queda para finalizar la demostración, verificar que también lo son f_3 y f_4.

Veamos que f_3 es una solución. Sean a, b y c números enteros tales que, $a + b + c = 0$. Entonces, o bien los tres son pares, o dos son impares y uno es par. Si los tres son pares, entonces

$f_3(a) = f_3(b) = f_3(c) = 0$ y se satisface la igualdad inicial. Si solo dos son impares y el otro es par, por la simetría de la igualdad inicial, podemos decir sin pérdida de generalidad que a y b son impares y c es par. Entonces f_3 es una solución, pues ambos lados de la igualdad son iguales a $2k^2$.

Para el caso de f_4 usamos un argumento similar de paridad y simetría de la igualdad inicial y así se reduce la verificación a las ternas $(0, k, k)$, $(4k, k, k)$, $(0, 0, 0)$ y $(0, 4k, 4k)$, donde cada terna nos indica los valores de $f(a)$, $f(b)$ y $f(c)$, respectivamente. Un cálculo sencillo nos muestra que en cada caso se verifica la igualdad inicial.

5. Sea C' la reflexión de C con respecto a la recta AB y sean ω_1 y ω_2 las circunferencias con centros en A y B y que pasan por L y K respectivamente.

Como $AC' = AC = AL$ y $BC' = BC = BK$, ambas circunferencias ω_1 y ω_2 pasan por C y C'.

Como $\angle BCA = 90°$, AC es tangente a ω_2 en C y BC es tangente a ω_1 en C.

Sea $K_1 \neq K$ el otro punto de intersección de AX con ω_2 y sea $L_1 \neq L$ el otro punto de intersección de BX con ω_1.

Por las potencias del punto X con respecto a ω_2 y ω_1 tenemos

$$XK \cdot XK_1 = XC \cdot XC' = XL \cdot XL_1,$$

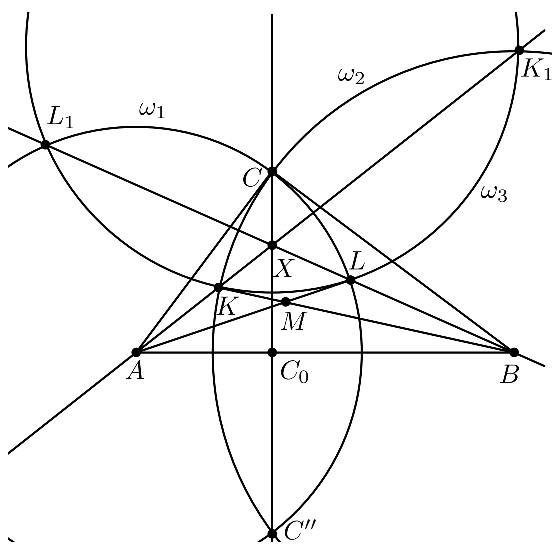
por lo tanto, K_1, L, K y L_1 están en una circunferencia ω_3.

Por otra parte la potencia de A con respecto a ω_2 nos dice que,

$$AL^2 = AC^2 = AK \cdot AK_1,$$

indicando que AL es tangente a ω_3 en L.

Analogamente, BK es tangente a ω_3 en K. Por lo tanto MK y ML son tangentes a ω_3 desde M y en consecuencia $MK = ML$.



6. Demostraremos que los números enteros no negativos a_1, a_2,..., a_n, existen si y solo si $n \equiv 1 \pmod 4$ o $n \equiv 2 \pmod 4$.

Sea $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^{a_k}} = 1$, con a_1, a_2,..., a_n enteros no negativos. Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad y despejando tenemos que $1{\cdot}x_1{+}2{\cdot}x_2{+}\cdots{+}n{\cdot}x_n = 3^a$, donde x_1, x_2,..., x_n son potencias de 3 y $a \geq 0$. Observemos que el lado derecho de esta última igualdad es un número impar y que la paridad del lado izquierdo es la misma de $1 + 2 + \cdots + n$. Por lo tanto si $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + n \cdot x_n$ es impar, entonces $1+2+\cdots+n$ es impar y esto implica que $n \equiv 1 \pmod{4}$ o $n \equiv 2 \pmod{4}$. Ahora nos queda demostrar la proposición recíproca.

Diremos que una sucesión $b_1, b_2,\ldots, b_n$ es *factible* si existen enteros no negativos a_1, a_2,..., a_n tales que

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{b_1}{3^{a_1}}+\frac{b_2}{3^{a_2}}+\cdots+\frac{b_n}{3^{a_n}}=1.$$

Sea b_k un término de una sucesión factible $b_1, b_2,\ldots, b_n$, con exponentes $a_1, a_2,\ldots,$ a_n, como antes, y sean u, v enteros no negativos tales que $u+v=3b_k$. Obsérvese que

$$\frac{1}{2^{a_k+1}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=\frac{1}{2^{a_k}} \qquad \text{y} \qquad \frac{u}{3^{a_k+1}}+\frac{v}{3^{a_k+1}}=\frac{b_k}{3^{a_k}}.$$

Esto implica que la sucesión $b_1,\ldots,b_{k-1},u,v,b_{k+1},\ldots,b_n$ es *factible*, con exponentes a_i para los términos b_i con $i\neq k$, y para los nuevos términos u y v ponemos el exponente a_k+1. Recíprocamente, si reemplazamos dos términos u y v de una sucesión por un término $\frac{u+v}{3}$ y la nueva sucesión que así obtenemos es factible, entonces la sucesión original también es factible. Denotemos por α_n la sucesión $1, 2,\ldots, n$. Para demostrar que α_n es factible para $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$, la transformamos haciendo $n-1$ reemplazos $\{u, v\} \mapsto \frac{u+v}{3}$ en la sucesión de un solo término α_1, la cual es factible, con $a_1 = 0$. Es importante observar que si m y $2m$ son términos de una sucesión, entonces $\{m, 2m\} \mapsto m$, por lo que, de ser necesario, podemos ignorar a $2m$. Esta observación es muy importante en el resto del razonamiento.

Sea $n \geq 16$. Demostremos que α_n se puede reducir a α_{n-12} por medio de 12 operaciones. Escribamos $n = 12k + r$, donde $k \geq 1$ y $0 \leq r \leq 11$. Si $0 \leq r \leq 5$, entonces los últimos 12 términos de α_n se pueden dividir de la siguiente manera: dos conjuntos singulares, $\{12k-6\}$ y $\{12k\}$ y los siguientes 5 subconjuntos de 2 elementos:

$$\begin{aligned}&\{12k-6-i, 12k-6+i\}, \quad i=1,\ldots,5-r,\\ &\{12k-j, 12k+j\}, \quad j=1,\ldots,r.\end{aligned}$$

(En el caso $r = 0, 5$ hay un solo tipo de subconjunto de 2 elementos).

Ahora, por la observación hecha arriba, podemos ignorar a $12k-6$ y a $12k$, ya que $6k-3$ y $6k$ aparecen en α_n. Además las 5 operaciones $\{12k-6-i, 12k-6+i\} \mapsto 8k-4$ y $\{12k-j, 12k+j\} \mapsto 8k$, sustituyen los 10 términos en estas parejas por 5 nuevos términos iguales a $8k-4$ o $8k$. Como $4k-2$ y $4k$ siguen presentes en la sucesión, todos estos términos se pueden ignorar también. De hecho la desigualdad $4k \leq n-12$ es equivalente a $8k \geq 12-r$, la cual es evidentemente cierta para $r = 4, 5$, y en el caso en el cual $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, tenemos que $n \geq 16$ implica que $k \geq 2$ y por lo tanto, $8k \geq 12-r$ es cierta. Esto indica que α_n se ha reducido a α_{n-12}.

El caso $6 \leq r \leq 11$ es análogo. Consideremos los conjuntos $\{12k\}$ y $\{12k+6\}$ y los 5 subconjuntos de 2 elementos

$$\begin{aligned}
&\{12k-i, 12k+i\}, \quad i = 1, \ldots, 11-r, \\
&\{12k+6-j, 12k+6+j\}, \quad j = 1, \ldots, r-6.
\end{aligned}$$

Al igual que antes ignoramos los conjuntos de un solo elemento y luego removemos los pares por medio de las operaciones $\{12k-i, 12k+i\} \mapsto 8k$ y $\{12k+6-j, 12k+6+j\} \mapsto 8k+4$. Los 5 nuevos términos que aparecen, a saber, $8k$ y $8k+4$ los podemos ignorar pues como $k \geq 1$ y $r \geq 6$, entonces $4k+2 \leq n-12$ y obtenemos de nuevo a la sucesión α_{n-2}.

El problema se reduce entonces a $2 \leq n \leq 15$, pero como $n \equiv 1, 2 \pmod 4$, el problema se reduce aún más, a saber, a considerar solo $n \in \{2, 5, 6, 9, 10, 13, 14\}$. Los casos $n = 2, 6, 10, 14$ se reducen a los casos $n = 1, 5, 9, 13$, respectivamente, pues podemos ignorar el último término par en la correspondiente α_n. Para $n = 5$, aplicamos la operación $\{4, 5\} \mapsto 3$, así obtenemos la sucesión $1, 2, 3, 3$, aplicamos luego $\{3, 3\} \mapsto 2$, de esta forma nos queda $1, 2, 2$, e ignoramos los dos 2. Para $n = 9$, ignoramos primero al 6, luego aplicamos $\{5, 7\} \mapsto 4$, $\{4, 8\} \mapsto 4$ y $\{3, 9\} \mapsto 4$, obteniendo la sucesión, $1, 2, 4, 4, 4$. Ignoramos entonces las tes veces que ocurre el 4 y luego al 2. Finalmente $n = 13$ se reduce a $n = 10$ por medio de $\{11, 13\} \mapsto 8$ e ignorando al 8 y al 12. De esta forma terminamos la demostración.

Glosario

Ángulo inscripto. Si A, B y C son puntos de una circunferencia de centro O, se dice que el ángulo $\angle ABC$ está *inscripto* en la circunferencia y que *subtiende* el arco $\widehat{AC}$ que no contiene a B. La medida de $\angle ABC$ es igual a la mitad del ángulo central $\angle AOC$.

Ángulo semiinscripto. Es el que tiene el vértice en una circunferencia, un lado tangente a la misma y el otro secante.

Centro radical. Dadas tres circunferencias con centros no alineados, es el único punto que tiene igual potencia respecto a todas ellas.

Ceviana. Es cualquier segmento que una un vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto.

Círculo de Apolonio. Es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su razón de distancias a dos puntos dados A y B es una constante dada $r > 0$, $r \neq 1$. Es una circunferencia cuyo centro está sobre el segmento AB. (Si $r = 1$ el lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB).

Circuncírculo. Es la (única) circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo.

Circunferencia circunscripta. Ver *Circuncírculo*.

Coeficiente binomial. Es el coeficiente de x^k en el desarrollo de $(1+x)^n$. También es igual al número de subconjuntos de k elementos que tiene un conjunto de n elementos. Se denota $\binom{n}{k}$ y puede calcularse así:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Colineales. Dícese de los puntos que están sobre una misma línea recta.

Coprimos (o **primos relativos**). Dícese de dos números enteros sin factores primos comunes (o, equivalentemente, cuyo máximo común divisor es 1).

Cuadrilátero cíclico (también llamado **concíclico** o **inscriptible**). Es un cuadrilatero que puede ser inscripto en una circunferencia, es decir, tal que alguna circunferencia pasa por sus cuatro vértices. Una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico es que tenga un par de ángulos opuestos suplementarios.

Cuaterna armónica. Los puntos alineados A, B, C y D forman una *cuaterna armónica* si y sólo si exactamente uno de los puntos A y B pertenece al segmento CD y además se cumple $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

Eje radical. Dadas dos circunferencias no concéntricas, es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto a ambas. Siempre es una recta perpendicular a la que une los centros de ambas circunferencias.

Excentro. Es el punto en que concurren la bisectriz de un ángulo y las bisectrices exteriores de los otros dos ángulos de un triángulo. Como equidista de los tres lados del triángulo, es el centro de una circunferencia tangente a ellos y exterior al triángulo.

Incentro. Es el punto en que concurren las tres bisectrices de un triángulo. Como equidista de los tres lados del triángulo, es el centro de una circunferencia tangente internamente a ellos.

Incírculo. Es la circunferencia tangente internamente a los tres lados de un triángulo.

Potencia. Sean P un punto, Γ una circunferencia y r una recta que pase por P y corta a la circunferencia en A y B (si r es tangente a Γ consideramos que $A = B$). Entonces el producto $PA \cdot PB$ no depende de r, y su valor es por definición la *potencia* de P respecto a Γ, $\mathrm{Pot}(P, \Gamma)$. Las distancias PA y PB se consideran orientadas, es decir que la potencia es positiva o negativa según que P sea exterior o interior a Γ. Obviamente $\mathrm{Pot}(P, \Gamma) = 0$ si y sólo si P pertenece a Γ.

Principio de las casillas. Si n objetos se distribuyen en k cajas, y $n > k$, entonces alguna caja recibe más de un objeto.

Razón áurea. Se dice que un punto C divide a un segmento AB en *media y extrema razón* si $AB/BC = AC/AB$. En este caso a la razón AC/AB se le conoce como *razón áurea*, *número áureo*, *divina proporción* y varios otros nombres. Se suele denotar con la letra griega φ y su valor es

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Teorema de Ceva. Sea ABC un triángulo y sean P, Q y R tres puntos ubicados respectivamente en las rectas BC, CA y AB y diferentes de A, B y C. Entonces AP, BQ y CR son concurrentes si y sólo si

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

Nota: las medidas en cada recta se toman orientadas.

Teorema de la bisectriz. Sean ABC un triángulo, V el punto en que la bisectriz desde A corta al lado BC y U el punto en que la bisectriz exterior por A corta a la prolongación del lado BC. Entonces

$$\frac{VB}{VC} = \frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AB + AC}.$$

Admite los siguientes recíprocos:

1. Si V es un punto del lado BC del $\triangle ABC$ y $\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC}$ entonces AV es la bisectriz del $\angle BAC$.

2. Si U es un punto de la prolongación del lado BC del $\triangle ABC$ y $\frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC}$ entonces AU es la bisectriz exterior del $\angle BAC$.

3. Si V y U son puntos del lado BC y de su prolongación, respectivamente, del $\triangle ABC$, y si $\frac{VB}{VC} = \frac{UB}{UC}$ y $\angle UAV = 90°$, entonces AV es la bisectriz interior y AU es la bisectriz exterior del $\angle BAC$.

Teorema de Menelao. Sea ABC un triángulo y sean P, Q y R tres puntos ubicados respectivamente en las rectas BC, CA y AB y diferentes de A, B y C. Entonces P, Q y R están alineados si y sólo si

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

Nota: las medidas en cada recta se toman orientadas.

Teorema de Stewart. Sean ABC un triángulo, D un punto del lado AB, $p = CD$, $m = AD$ y $n = DB$. Este teorema afirma que $c(mn + p^2) = a^2m + b^2n$.

Terna pitagórica. Es un conjunto de tres enteros positivos a, b y c que cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Si $\operatorname{mcd}(a, b, c) = 1$ la terna se dice *primitiva*. En ese caso a y b deben ser de diferente paridad, digamos a impar y b par, y se puede probar que existen enteros u y v, coprimos y de diferente paridad, tales que $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ y $c = u^2 + v^2$.

Estudiantes Premiados en la Final Nacional de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2012

Primer Año

Medallas de Oro

Nombre	Instituto	Estado
Franklin Bello	Iberoamericano	Bolívar
Gabriel Matute	Academia Washington	Distrito Capital

Medallas de Plata

Juan Cabrera	Santiago de Leon	Distrito Capital
Eugenia Hernandez	Academia Merici	Distrito Capital
Miguel Römer	San Ignacio	Distrito Capital
Ruben Sucre	San Ignacio	Distrito Capital

Medallas de Bronce

Johann Bastardo	Iberoamericano	Bolívar
Luis Cedeño	Liceo Los Robles	Zulia
Sofía Fleitas	Los Caminos	Portuguesa
León Herdan	Moral y Luces	Distrito Capital
Luis Kuffner	Colegio Francia	DDistrito Capital
Maria Leon	Altamira	Zulia
Ignacio Muñoz	Santiago de Leon	Distrito Capital
Wemp Pacheco	Calicantina	Aragua
Vitor Pombo	Olga Bayone	Carabobo
Valeria Sanchez	Escuela Bella Vista	Zulia
Herenia Sarabia	Independencia	Lara
José Vitale	San Gabriel Arcángel	Carabobo

Menciones de Honor

Ronald Blanco	San Agustin	Zulia
María Cecilia Dávila	U. E. Paideia	Mérida
Veruska Villarroel	San Lázaro	Sucre

Segundo Año

Medallas de Oro

Rafael Aznar	Los Arcos	Distrito Capital
Miguel Peña	Los Hipocampitos	Miranda
Luis Uzcátegui	Los Próceres	Bolívar

Medallas de Plata

Sara Camacho	I.E.A. El Peñón	Distrito Capital
Jose Guevara	Bella Vista	Aragua
Cesar Leon	Gustavo H. Machado	Aragua
Carlos Nicolas	San Agustin	Zulia
Miguel Orduz	Independencia	Lara
Luis Sanchez	I.E.A. El Peñón	Distrito Capital

Medallas de Bronce

Juan Comella	Bellas Artes	Zulia
Oscar Lopera	Independencia	Lara
Lerones Marcos	Cristo Rey Santa Monica	Distrito Capital
Verónica Paulon	Los Hipocampitos	Miranda
Luis Pérez	Nuestra Señora De Lourdes	Carabobo
Nicolas Raga	Escuela Bella Vista	Zulia
Karen Taub	Moral Y Luces	Distrito Capital

Menciones de Honor

Sofia Castejon	Alemán de Maracaibo	Zulia
Amanda Deftereos	I.E.A. El Peñón	Distrito Capital
Filippo Elmi	Claret	Zulia
Rebeca Quintero	I.E.A. El Peñón	Distrito Capital
Samuel Valery	Monseñor Bosset	Mérida

Tercer Año

Medallas de Oro

Juan Cramer	San José Maristas	Aragua
Luis Ruiz	Las Colinas	Lara

Medallas de Plata

Daniel Bastardo	Los Hipocampitos	Miranda
Jesus Bastardo	Iberoamericano	Bolívar
Arturo Story	San Ignacio	Distrito Capital

Medallas de Bronce

Daniel Calderas	Colegio Francia	Distrito Capital
Laura Castillo	Altamira	Zulia
María Costantini	San Lázaro	Sucre
Carlos Fernandez	Colegio Cumbres	Distrito Capital
Ricardo Mathison	I.E.A. El Peñón	Distrito Capital
Jorge Navia	Bellas Artes	Zulia

Menciones de Honor

Luis Dominguez	San Ignacio	Distrito Capital
Arnaldo Escalona	Cristo Rey	Carabobo
Maria Daniela Martin	Las Colinas	Lara

Cuarto Año

Medallas de Oro

Gianpaolo Cuticchia	San José Maristas	Aragua
Rubmary Rojas	San Vicente De Paul	Lara
Pedro Romero	I.E.A. El Peñón	Distrito Capital

Medallas de Plata

Joel Arteaga	Juan XXIII	Carabobo
Luis Requiz	I.E.A. El Peñón	Distrito Capital

Medallas de Bronce

Daniel Núñez	Valle Alto	Miranda
Juan Ocando	República De Venezuela	Trujillo

Menciones de Honor

Jorge Millano	Andrés Eloy Blanco	Zulia

Quinto Año

Medallas de Oro

Diego Peña	Los Hipocampitos	Miranda

Medallas de Plata

Elizabeth Acosta	Cristo Rey Santa Monica	Distrito Capital
Juan Balzan	Colegio Francia	Distrito Capital
Ezequiel Quijada	Nuestra Señora De La Paz	Anzoátegui
Mariana Saavedra	Nuestra Señora De Lourdes	Carabobo
Sergio Villarroel	San Lázaro	Sucre

Medallas de Bronce

Alessandro Carlucci	Emil Friedman	Distrito Capital
Jorge Pérez	Simón Bolívar	Monagas
Jeremy Rojas	Andrés Eloy Blanco	Zulia

Menciones de Honor

Andrea Nuñez	San José Maristas	Aragua
Santiago Rojas	I.E.A. El Peñón	Distrito Capital

Premios Especiales

Rubmary Rojas (San Vicente de Paul, Edo. Lara)
Premio de la Fundación Empresas Polar a la mejor prueba.

Luis Uzcátegui (Los Próceres, Edo. Bolivar)
Premio UNEXPO a la respuesta más creativa.

Lisandro Alvarado (Estado Miranda)
Premio *Eduardo Contreras* al Coordinador más destacado.

Olimpiada de Mayo 2012

Nivel I

Nombre	**Instituto**	**Ciudad**	**Premio**
Rodrigo Lobo	Iberoamericano	Puerto Ordaz	Oro
Johann Bastardo	Iberoamericano	Puerto Ordaz	Plata
Luis Kuffuen	Colegio Francia	Caracas	Bronce
María Cecilia Dávila	Escuela Paideia	Mérida	Mención H.
María León	Altamira	Maracaibo	Mención H.
Vicente Mirabal	San Pedro	Barquisimeto	Mención H.
Oriana Ortega	Loefling	Puerto Ordaz	Mención H.
Valeria Sánchez	Bella Vista	Maracaibo	Mención H.
Veruska Villaroel	San Lázaro	Cumaná	Mención H.

Nivel II

Carlos Nicolás	San Agustín	Ciudad Ojeda	Bronce
Miguel Romer	San Ignacio	Caracas	Bronce
Hugo Troyani	N. Sra, de las Nieves	Ciudad Bolívar	Mención H.
Juan Andrés Cramer	San José	Maracay	Mención H.
Jesús Fernández	Liceo Los Robles	Maracaibo	Mención H.
José Fuenmayor	Alemán	Maracaibo	Mención H.
José Guevara	Bella Vista	Maracay	Mención H.
Vittoria Lugarini	San Pedro	Barquisimeto	Mención H.
Rebeca Quintero	IEA El Peñón	Caracas	Mención H.

Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2012

Comité Organizador Nacional

Rafael Sánchez Lamoneda (Presidente)
Saturnino Fermín Reyes (Coordinador Administrativo)
José Heber Nieto Said (Coordinador Académico)
Laura Vielma Herrero (Coordinadora de Entrenamientos)

Coordinadores Regionales

Prof. Lisandro Alvarado (Altos Mirandinos)
Prof. Luis Alberto Rodríguez (Anzoátegui)
Prof. Rafael Antonio Valdez Tovar (Apure)
Prof. Jesús Acosta (Aragua-Maracay)
Prof. Orlando Mendoza (Aragua-Cagua)
Prof. Mary Acosta (Bolívar)
Prof. Luis Rodríguez (Carabobo)
Prof. Sonia Chacón (Cojedes)
Prof. Miguel Gerdez (Delta Amacuro)
Prof. Addy Goitía (Falcón)
Prof. Carlos Lira (Guárico)
Prof. Víctor Caruci (Lara)
Prof. José Toloza (Mérida)
Prof. Yelenny Guanipa (Monagas)
Prof. Emilia Peña (Nueva Esparta)
Prof. María Martínez G. (Portuguesa)
Prof. Luisa López (Sucre)
Prof. Ramón Blanco (Trujillo)
Prof. Larry Mendoza (Vargas)
Prof. Nancy Candiales (Yaracuy)
Prof. José Heber Nieto Said (Zulia)
Prof. Lisbardo Serrudo (Sta. Bárbara del Zulia)

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y NATURALES

Association Le Kangourou des Mathématiques Kangourou sans frontiéres

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ofic. 331
Los Chaguaramos, Caracas 1020. Venezuela. Telefax: 212.6051512
email:asomatemat8@gmail.com. Página Web:www.acfiman.org