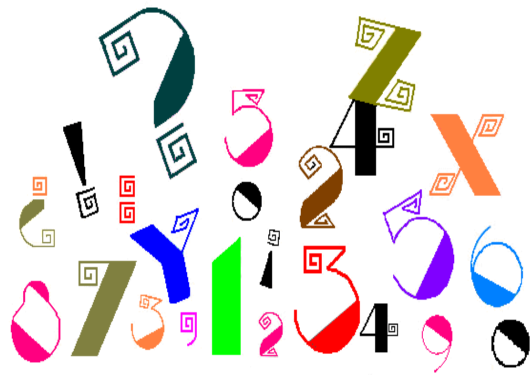
OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

2013

Problemas y Soluciones

JOSÉ HEBER NIETO SAID, RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA,
ESTEFANÍA ORDAZ, SOPHIA TAYLOR Y LAURA VIELMA



COLECCIÓN ESTUDIOS
DIVULGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS,
MATEMÁTICAS Y Y NATURALES

José Heber Nieto Said. Venezolano de origen uruguayo, es egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Buenos Aires, M.Sc. en Matemática y Dr. H.C. por la Universidad del Zulia (LUZ). Es profesor titular emérito de LUZ, donde fue Director del Departamento de Matemática y Computación, profesor de casi todas las materias dictadas por ese Departamento, proyectista de la Licenciatura en Computación y editor de revistas científicas. Ha escrito varios libros y artículos sobre diversos aspectos de la matemática. Es miembro de varias asociaciones académicas y profesionales (AMV, AVCM, MAA, AMS y CMS). En las olimpiadas matemáticas venezolanas ha participado desde hace más de quince años como entrenador, jefe o tutor de delegaciones, jurado y apoyo académico.

Rafael Sánchez Lamoneda. Venezolano. Profesor Titular de la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV. Egresado del Instituto Pedagógico de Caracas, M.Sc. en Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar y PhD en Matemáticas de Brandeis University, Massachusetts, USA. Ha escrito varios artículos sobre Algebra en revistas internacionales. Fue Jefe del Departamento de Matemáticas del Ivic y miembro de la Comisión de postgrado de ese Instituto y de la Escuela de Matemáticas de la UCV. Premio Erdös 2010, otorgado por la World Federation for National Mathematical Competitions. Premio al mejor trabajo en el área de Matemáticas otorgado por el Conicit en el año 1993. Ha trabajado en las Olimpiadas Matemáticas en Venezuela desde 1978, ha sido jefe o tutor de delegaciones del país en Olimpiadas de Matemáticas Internacionales desde 1981. Asesor de la Organización de Estados Ibero-americanos para la Educación la Ciencia y la Cultura, OEI, en el área de Matemáticas y Olimpiadas Matemáticas. Asesor en el área de Matemáticas de la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Pertenece a la directiva de la Asociación Matemática Venezolana desde hace más de diez años. En la actualidad es el Presidente de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM.

Laura Vielma Herrero. Profesor de Matemáticas y de Inglés con menciones Magna Cum Laude de la UPEL-IPC, Caracas, Venezuela. Magíster en Ingeniería Industrial en el área de Investigación de Operaciones y Estadística de la Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia. Trabajó como asistente graduado y profesor en la Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. Profesor de la UPEL-IPC. Coordinador de proyectos y gerente de sector y territorio de una consultora internacional cuyas soluciones se enmarcan en el uso de modelos matemáticos para soportar la toma de decisiones en procesos industriales. Actualmente realiza estudios del Doctorado de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar Profesor y Jefe de Departamento de Matemáticas en la Academia Washington. Colabora activamente desde el año 2001 con el Programa de Olimpiadas Matemáticas de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM. Ha desempeñado el rol de entrenador, tutor y jefe de delegaciones venezolanas en competencias internacionales y se encarga de la realización del Calendario Matemático que publica la ACM.

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

(OJM, OMCC, OIM, IMO)

2013

Problemas y Soluciones

JOSÉ HEBER NIETO SAID
RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA
ESTEFANÍA ORDAZ
SOPHIA TAYLOR
Y
LAURA VIELMA HERRERO

OLIMPIADA DE MATEMÁTICA 2012

COLECCIÓN ESTUDIOS

Hecho el Depósito de Ley
Deposito Legal: lfi65920145101012
ISBN: 978-980-6195-34-9

Diseño General: Antonio Machado-Allison

Diseño Carátula: Claudia Nieto y Antonio Machado-Allison

Olimpiadas Matemáticas 2013

(OJM, OM, OMCC, OIM, IMO)

Problemas y Soluciones

José Heber Nieto Said
Rafael Sánchez Lamoneda
Estefanía Ordaz
Sophia Taylor
Laura Vielma Herrero

Índice general

Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas son competencias dirigidas principalmente a jóvenes de escuela elemental y secundaria. Actualmente esta actividad se ha extendido por todo el mundo debido a su gran efectividad en la popularización de las matemáticas y en la detección de jóvenes con talento para el estudio de esta ciencia.

El presente libro reúne todos los problemas propuestos en la Olimpiada Juvenil de Matemáticas (OJM) 2013, así como aquellos de los eventos internacionales en los cuales participamos desde hace varios años. Estos son la 54^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) celebrada en Santa Marta, Colombia, del 18 al 28 de Julio, la XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC), celebrada en Managua, Nicaragua, del 22 al 30 de Junio y la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM), celebrada en Panamá, del 21 al 28 de septiembre. Las tres competencias son de carácter presencial. Cada una de ellas consta de dos exámenes, presentados en días consecutivos. Cada prueba tiene 3 problemas y los participantes disponen de cuatro horas y media para resolverlos. El valor de cada pregunta es de 7 puntos, para un máximo posible de 42 puntos en la competencia. Los ganadores reciben medallas de oro, plata o bronce y mención honorífica, según sea su desempeño. También incluimos en este libro los problemas de la Olimpiada Matemática de Mayo, competencia por correspondencia de carácter iberoamericano que se plantea a dos niveles (para alumnos no mayores de 13 y 15 años). Agradecemos a la Fundación Olimpiada Matemática Argentina, organizadores de esta competencia, por permitirnos publicar aquí los problemas y sus soluciones.

Al final del libro aparece la lista de alumnos premiados en todas estas competencias en el año 2013 y los premios que obtuvieron.

En las soluciones a los problemas de la OIM, hemos incluido las respuestas de Rubmary Rojas y Rafael Aznar. Ambos estudiantes ganaron premios en esta competencia.

La OJM consta de tres etapas o pruebas. La primera de ellas es el *Canguro Matemático*, un examen de treinta problemas de selección simple, que fue presentado por 61.572 estudiantes provenientes de 21 estados del país. La segunda etapa de la competencia es la *Prueba Final Regional*. La misma consta de un examen de cinco problemas de desarrollo donde compiten los alumnos que quedaron ubicados en el nueve por ciento superior en el Canguro Matemático. Esta prueba se organiza en cada estado que participa en la OJM. Los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce. La tercera y última fase es la *Prueba Final Nacional*, la misma consta de un examen de cuatro problemas de desarrollo y en ella participan los alumnos ganadores de medalla de oro en la Prueba Final Regional. En la primera fase de la competencia los alumnos presentan la prueba en sus colegios. La Prueba Regional la presentan juntos todos los estudiantes de cada estado, en una sede previamente seleccionada por el coordinador local. Para la Final Nacional se elige cada año una sede y allí se organiza el evento, permitiendo a los participantes, sus profesores y representantes estrechar lazos de amistad y compartir una experiencia educativa enriquecedora. La Prueba Final Nacional 2013 se realizó en la *Universidad Central de Venezuela*, en Caracas y participaron 137 alumnos representando a 19 estados.

Esta obra consta de siete capítulos. En los tres primeros se estudian los problemas de la OJM, dedicando un capítulo a cada fase de la competencia. Los últimos cuatro capítulos versan sobre las competencias internacionales. En ellos se presentan los problemas y sus soluciones. Al final del libro incluimos un glosario de conceptos matemáticos utilizados a los largo del texto. Esperamos que este libro sea de gran utilidad tanto para profesores como para estudiantes y que les permita conocer las matemáticas desde un punto de vista interesante y entretenido.

Agradecemos la valiosa colaboración de nuestro grupo de instructores ex olímpicos: Diego Peña, Estefanía Ordaz, Mauricio Marcano y Sofía Taylor, quienes han revisado este trabajo. Gracias a ellos tenemos una mejor versión del libro. Cualquier error que se haya escapado es, sin embargo, total esponsabilidad de los autores.

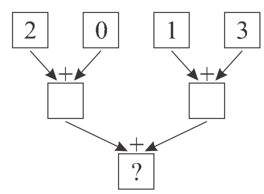
No queremos terminar esta introducción sin agradecer a nuestros patrocinadores, en especial a la *Fundación Empresas Polar*, a la *Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales*, a la *Facultad de Ciencias de la UCV* junto a la *Fundación Amigos de Ciencias*, a la *Universidad Metropolitana*, a la *Universidad Simón Bolívar*, la *Universidad Rafael Urdaneta*, a *Acumuladores Duncan*, a *MRW* y a la *Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman*, así como a todos los colegas que con su trabajo y esfuerzo, permiten que la Olimpiada Juvenil de Matemáticas sea una realidad.

Capítulo 1

Prueba Canguro

1.1. Prueba de Primer Año y Segundo Año

Problema 1. Se introducen los números 2, 0, 1, 3 en una máquina de sumar, como se muestra en la figura. ¿Cúal es el resultado de la caja con el símbolo de interrogación?



Ⓐ 2; Ⓑ 5; Ⓒ 3; Ⓓ 6; Ⓔ 4.

Problema 2. Natalia quería armar el mismo cubo que Diana había armado (ver figura 1) pero al intentarlo, a Natalia se le acabaron los cubos pequeños y sólo armó la parte del cubo que se muestra en la figura 2. ¿Cúantos cubos pequeños se deben agregar a la figura 2 para formar la figura 1?

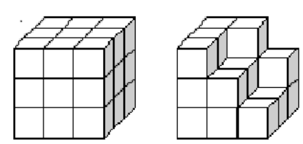
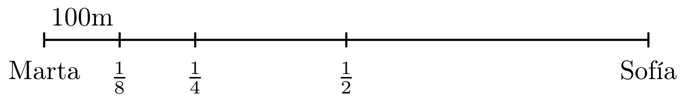


Figura 1 Figura 2

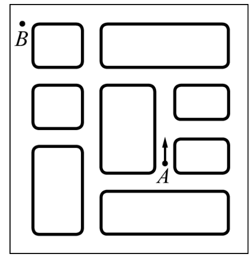
Ⓐ 5; Ⓑ 6; Ⓒ 7; Ⓓ 8; Ⓔ 9.

Problema 3. Halle la distancia que Marta debe recorrer para llegar hasta donde está su amiga Sofía.



Ⓐ 300 m; Ⓑ 400 m; Ⓒ 800 m; Ⓓ 1 km; Ⓔ 700 m.

Problema 4. Nicolás está aprendiendo a manejar. Él sabe como girar a la derecha pero aún no puede girar a la izquierda. ¿Cuál es el menor número de giros que debe dar para llegar del punto A al B comenzando en la dirección de la flecha?



(A) 3; (B) 10; (C) 4; (D) 8; (E) 6.

Problema 5. La suma de las edades de Ana, Braulio y Cristina es 31 años. ¿Cúal será la suma de sus edades dentro de tres años?

(A) 32; (B) 34; (C) 35; (D) 37; (E) 40.

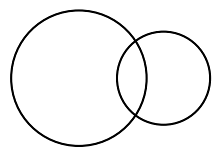
Problema 6. ¿Qué dígito se debe colocar en las tres cajas de manera que la multiplicación $\square\square \cdot \square = 176$ se satisfaga?

(A) 9; (B) 8; (C) 7; (D) 6; (E) 4.

Problema 7. Miguel debe tomarse una pastilla cada 15 minutos. Él se tomó la primera pastilla a las 11:05. ¿A qué hora debe tomarse la cuarta pastilla?

(A) 11:40; (B) 11:50; (C) 11:55; (D) 12:00; (E) 12:05.

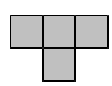
Problema 8. Al dibujar dos círculos, Carmela obtuvo una figura que consiste de tres regiones (ver figura). A lo más, ¿cuántas regiones podrá obtener al dibujar dos cuadrados?

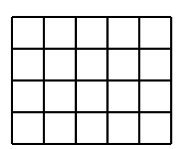


(A) 3; (B) 5; (C) 6; (D) 8; (E) 9.

Problema 9. El número 36 tiene la propiedad de ser divisible por el dígito que tiene en las unidades ya que 36 es divisible por 6. El número 38 no tiene esta propiedad. ¿Cuántos números entre 20 y 30 tienen esta propiedad?

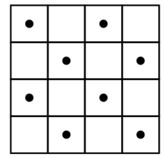
(A) 4; (B) 2; (C) 6; (D) 3; (E) 5.

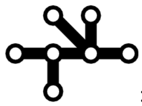
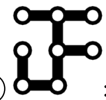
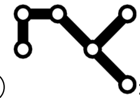
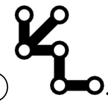
Problema 10. Ana tiene muchas piezas como ésta: .
Ella trata de colocar la mayor cantidad posible de estas piezas en un rectángulo de 4 por 5. Las piezas no pueden superponerse. ¿Cuál es el mayor número posible de piezas que Ana puede colocar en el rectángulo?



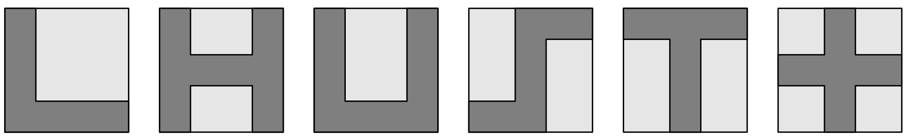
(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5; (E) 6.

Problema 11. ¿Cuál de las figuras de abajo cubre el mayor número de puntos del tablero de la derecha?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

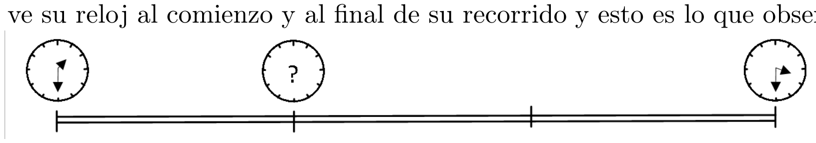
Problema 12. María dibujó varias figuras en hojas de papel cuadradas e idénticas:



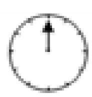
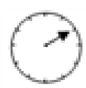
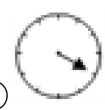
¿Cuántas de estas formas tienen el mismo perímetro que la hoja de papel en que están dibujadas?

Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ 4; Ⓓ 5; Ⓔ 6.

Problema 13. Laura monta su bicicleta durante la tarde con velocidad constante. Ella ve su reloj al comienzo y al final de su recorrido y esto es lo que observa:



¿Qué figura muestra la posición del minutero del reloj cuando Laura culmina un tercio de su recorrido?

Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 14. Mateo fue de pesca. Si él hubiera pescado tres veces la cantidad de peces que realmente pescó, hubiera tenido 12 peces más. ¿Cuántos peces pescó Mateo?

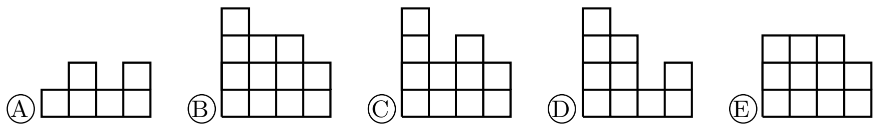
Ⓐ 3; Ⓑ 4; Ⓒ 5; Ⓓ 6; Ⓔ 7.

Problema 15. José hizo un edificio de cubos. En la figura se puede ver el edificio desde las alturas. En cada celda aparece el número de cubos que forman cada torre. Si se viera de frente, ¿cómo se vería el edificio de José?

ATRÁS

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

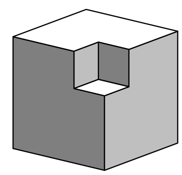
FRENTE



Problema 16. En una elección, cada uno de los cinco candidatos obtuvo un número diferente de votos. Los candidatos obtuvieron 36 votos en total. El ganador obtuvo 12 votos. El candidato en el último puesto obtuvo 4 votos. ¿Cuántos votos obtuvo el candidato en segundo lugar?

Ⓐ 8 ó 9; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 10; Ⓔ 9 ó 10.

Problema 17. De un cubo de madera de lado 3 cm se corta en una esquina un cubo pequeño de lado 1 cm, como muestra la figura. ¿Cúal es el número de caras del sólido restante después de cortar tales cubos pequeños en *cada* esquina del cubo grande?



Ⓐ 30; Ⓑ 16; Ⓒ 36; Ⓓ 20; Ⓔ 24.

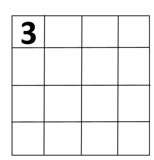
Problema 18. Halle el número de pares de números naturales de dos dígitos cuya diferencia sea igual a 50.

Ⓐ 60; Ⓑ 10; Ⓒ 50; Ⓓ 30; Ⓔ 40.

Problema 19. La final del campeonato de fútbol nacional fue un partido con muchos goles. Hubo 6 goles en la primera mitad con ventaja para el equipo visitante. Después de que el equipo sede anotara 3 goles en la segunda mitad, éste ganó el partido. ¿Cuántos goles realizó el equipo sede en total?

Ⓐ 7; Ⓑ 3; Ⓒ 6; Ⓓ 5; Ⓔ 4.

Problema 20. En los cuadrados de un tablero 4×4, se escriben números tales que los números en cuadrados adyacentes difieran por una unidad. Los números 3 y 9 aparecen en el tablero. El 3 se encuentra en la esquina superior izquierda como muestra la figura. ¿Cuántos números diferentes aparecen en el tablero?



Ⓐ 4; Ⓑ 6; Ⓒ 5; Ⓓ 8; Ⓔ 7.

Problema 21. Armando, Berta y Carlos siempre mienten. Cada uno de ellos es dueño de una piedra, que puede ser o roja o verde. Armando dice: "Mi piedra es del mismo color que la piedra de Berta". Berta dice: "Mi piedra es del mismo color que la de Carlos". Carlos dice: "Exactamente dos de nosotros tenemos piedras rojas". ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

Ⓐ La piedra de Armando es verde; Ⓑ La piedra de Berta es verde;
Ⓒ Las piedras de Armando y Carlos son de colores diferentes;
Ⓓ La piedra de Carlos es roja; Ⓔ Ninguna de las afirmaciones es cierta.

Problema 22. 66 gatas se inscribieron en el concurso de MISS GATA 2013. Después de la primera ronda, 21 de ellas fueron eliminadas por no poder cazar ratones. De aquellas gatas que siguen en la competencia, 27 tienen rayas y 32 una oreja negra. Todas las gatas con rayas y una oreja negra llegaron a la final. ¿Cuál es el mínimo número de finalistas?

Ⓐ 5; Ⓑ 7; Ⓒ 13; Ⓓ 14; Ⓔ 27.

Problema 23. Hay cuatro botones en una fila, como se muestra a continuación. Dos de ellos muestran una carita feliz y los otros dos una carita triste. Si se presiona sobre una carita, la expresión de la misma se convierte a la otra (por ejemplo: una carita feliz se convierte en una triste después de presionar el botón). Además de esto, los botones adyacentes también cambian de expresión. ¿Cuál es el mínimo número de veces que se deben presionar los botones para tener una fila de sólo caritas felices?

Ⓐ 2; Ⓑ 6; Ⓒ 3; Ⓓ 5; Ⓔ 4.

Problema 24. 40 niños y 28 niñas se encuentran agarrados de las manos formando un círculo, todos viendo hacia dentro del mismo. Exactamente 18 niños le dan su mano derecha a una niña. ¿Cuántos niños le dan su mano izquierda a una niña?

Ⓐ 18; Ⓑ 9; Ⓒ 28; Ⓓ 14; Ⓔ 20.

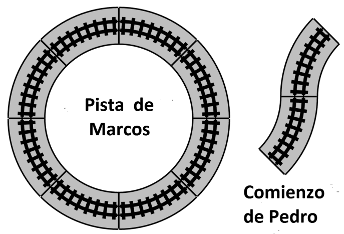
Problema 25. Se quiere construir un cubo de tamaño $2 \times 2 \times 2$ usando 4 cubos de lado unidad blancos y 4 negros. ¿Cuántos cubos diferentes se pueden contruir de esta manera? (Dos cubos no son diferentes si uno se puede obtener rotando el otro.)

Ⓐ 6; Ⓑ 7; Ⓒ 8; Ⓓ 9; Ⓔ 16.

Problema 26. ¿Cuántos números de tres dígitos poseen la siguiente propiedad: después de restarle 297 al número, se obtiene un número de tres dígitos que tiene los mismos dígitos que el original pero en orden reverso?

Ⓐ 60; Ⓑ 6; Ⓒ 70; Ⓓ 7; Ⓔ 10.

Problema 27. Marcos y Pedro encontraron entre sus juguetes viejos las piezas de la pista de un tren de juguete. Marcos rápidamente formó un círculo perfecto con 8 piezas iguales de la pista. Pedro comenzó otra pista con dos de esas piezas como se muestra en la figura. Él quiere usar el menor número posible de piezas para hacer una pista cerrada. ¿Cuántas piezas tiene esa pista?



(A) 11; (B) 12; (C) 14; (D) 15; (E) 16.

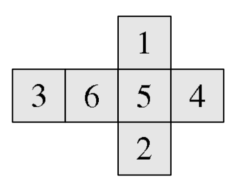
Problema 28. Hay 2013 pobladores de una isla. Algunos de ellos son caballeros y otros mentirosos. Los caballeros siempre dicen la verdad mientras que los mentirosos siempre mienten. Cada día, uno de los pobladores dice: "Después de mi partida, el número de caballeros en la isla será igual al número de mentirosos" y luego se va de la isla. Después de 2013 días, no quedó nadie en la isla. ¿Cuántos mentirosos había inicialmente?

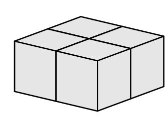
(A) Es imposible determinarlo; (B) 0; (C) 2013; (D) 1007; (E) 1006.

Problema 29. Comenzando con una lista de tres números, el procedimiento *cambiasuma* crea una lista nueva reemplazando cada número por la suma de los otros dos. Por ejemplo, de $\{3, 4, 6\}$ cambiasuma genera $\{10, 9, 7\}$ y un nuevo cambiasuma da como resultado $\{16, 17, 19\}$. Si se comienza con la lista $\{20, 1, 3\}$, ¿cuál es la máxima diferencia entre dos números de la lista después de 2013 cambiasumas consecutivas?

(A) 1; (B) 2; (C) 17; (D) 19; (E) 2013.

Problema 30. Sofía forma 4 cubos idénticos numerados usando el patrón que se muestra a la derecha. Luego los pega para formar un bloque $2 \times 2 \times 1$ como se muestra más abajo. Sólo se pegan caras con el mismo número. Sofía luego calcula la suma de todos los números en la superficie del bloque. ¿Cuál es la mayor suma que puede obtener?





(A) 66; (B) 68; (C) 72; (D) 74; (E) 76.

1.1.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (D) pues $(2 + 0) + (1 + 3) = 6$.

2. La respuesta correcta es la (C), 7 cubitos.

3. La respuesta correcta es la (C), 800 m.

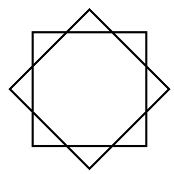
4. La respuesta correcta es la (C), 4 giros.

5. La respuesta correcta es la (E): $31 + 3 \times 3 = 40$.

6. La respuesta correcta es la (E): $44 \times 4 = 176$.

7. La respuesta correcta es la (B), 11:50.

8. La respuesta correcta es la (E), 9:



9. La respuesta correcta es la (A). Los números que cumplen son 21, 22, 24 y 25.

10. La respuesta correcta es la (C), 4. Es fácil colocar 4 piezas, pero 5 no se pueden poner. Para verlo coloreemos el tablero como en el ajedrez, dejando 10 casillas negras y 10 blancas. Pero como cada pieza T cubre una o tres casillas negras, 5 T's cubrirían un número impar de casillas negras.

11. La respuesta correcta es la (D), que se puede colocar cubriendo 5 puntos.

12. La respuesta correcta es la (C). Las figuras 1, 4, 5 y 6 tienen el mismo perímetro que la hoja de papel.

13. La respuesta correcta es la (D). Laura comenzó a la 1:30 y finalizó a las 3:30, luego su recorrido duró 2 horas y la tercera parte duró 40 minutos. Luego culminó un tercio de su recorrido 40 minutos después de la 1:30, es decir s las 2:10.

14. La respuesta correcta es la (D), 6.

15. La respuesta correcta es la (B).

16. La respuesta correcta es la (A), 8 ó 9. Sean s, t y c los votos obtenidos por los que quedaron en segundo, tercer y cuarto lugar, respectivamente. Entonces $12+s+t+c+4 = 36$, de donde $s+t+c = 20$. Como $c > 4$ resulta $s+t = 20-c \leq 15$. Como $c < t < s < 12$ resultan para (s, t, c) dos posibilidades: $(9, 6, 5)$ y $(8, 7, 5)$.

17. La respuesta correcta es la (A), 30. Al quitar un cubito se forman 3 caras, y como se quitan 8, resultan 24 caras, que con las 6 originales hacen 30.

18. La respuesta correcta es la (E). Los pares son (10,60), (11,61), (12,62),. . . , (49,99), que en total son 40.

19. La respuesta correcta es la (D). El primer tiempo finalizó 2 a 4 y el partido finalizó 5 a 4.

20. La respuesta correcta es la (E). los números que intervienen son 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, con el 9 en la esquina inferior derecha.

21. La respuesta correcta es la (A). Como todos mienten, la piedra de Berta es de color diferente a la de Armando y a la de Carlos. Luego Armando y Carlos tienen piedras del mismo color, y Berta del otro color. Pero las piedras de Armando y Carlos no pueden ser rojas, luego son verdes y la de Berta es roja.

22. La respuesta correcta es la (D). Quedaron $66 - 21 = 45$ gatas, y como $27 + 32 = 59$, al menos $59 - 45 = 14$ gatas tienen rayas y una oreja negra.

23. La respuesta correcta es la (C). Por ejemplo oprimiendo el tercer botón, luego el cuarto y finalmente el segundo se logran cuatro caritas felices.

24. La respuesta correcta es la (A). Recorriendo la ronda en sentido antihorario se encuentran $40 + 28 = 68$ parejas, de las cuales 18 son del tipo OA (niño–niña). Entomces hay $40 - 18 = 22$ parejas OO y $28 - 18 = 10$ parejas AA. Las parejas AO son las restantes, es decir $68 - 18 - 22 - 10 = 18$.

25. La respuesta correcta es la (B), 7 (dibuje cubos de $2 \times 2 \times 2$ y pinte 4 de negro, de todas las maneras posibles).

26. La respuesta correcta es la (A). Si el número es abc, entonces debe cumplirse que $100a + 10b + c - 297 = 100c + 10b + a$, de donde $99a = 297 + 99c$ y dividiendo entre 99 queda $a = 3 + c$. Entonces (a, c) puede ser $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$, $(7, 4)$, $(8, 5)$ o $(9, 6)$, y b puede ser cualquier dígito, lo que arroja 60 posibilidades.

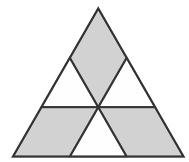
27. La respuesta correcta es la (B), 12. Se arman dos arcos circulares de 5 tramos cada uno y se une cada extremo de un arco con un extremo del otro mediante un tramo de vía.

28. La respuesta correcta es la (E). Numeremos los pobladores de 1 a 2013 según el día en que se van. Obviamente 2013 dijo la verdad y 2012 mintió. Luego 2011 dijo la verdad, 2010 mintió, y así sucesivamente. Es cecir que había 1006 mentirosos, a saber 2, 4,. . . , 2012.

29. La respuesta correcta es la (D). Los números en la lista alternan entre los tipos $\{a + 19, a, a + 2\}$ y $\{b, b + 19, b + 17\}$, siempre con diferencia máxima 19.

30. La respuesta correcta es la (B). Hay que minimizar los números en las caras pegadas, para que la suma en las restantes caras sea máxima. Eso se logra pegando dos cubos por las caras 1, de modo que las caras con 3 queden en un mismo plano. Se hace lo mismo con los otros dos cubos, y finalmente se pegan los dos bloques de $2 \times 1 \times 1$ por las caras 3. Así la suma externa es $4(2 + 4 + 5 + 6) = 68$.

1.2. Prueba de Tercer Año



Problema 1. En la figura, el triángulo grande es equilátero y tiene área 9. Las líneas son paralelas a los lados y dividen a los lados en tres partes iguales. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?

(A) 1; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 7.

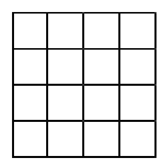
Problema 2. Se tiene que $\frac{1111}{101} = 11$. ¿Cuál es el valor de $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303}$?

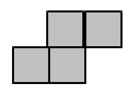
(A) 99; (B) 5; (C) 55; (D) 9; (E) 11.

Problema 3. Las masas de sal y de agua pura en el agua de mar están en la razón de 7 : 193. ¿Cuántos kilogramos de sal hay en 1000 kg de agua de mar?

(A) 186; (B) 193; (C) 35; (D) 350; (E) 200.

Problema 4. Ana tiene una hoja de papel cuadriculada como se ve en la figura de la izquierda. Cortando por las líneas de la cuadrícula ella recorta copias de la figura de la derecha. ¿Cuál es el menor número posible de cuadraditos sobrantes?





(A) 0; (B) 2; (C) 4; (D) 6; (E) 8.

Problema 5. Kan desea decirle a Guro un número natural cuyo producto de dígitos sea 24. ¿Cuál es la suma de los dígitos del menor número que Kan puede decir?

(A) 6; (B) 8; (C) 9; (D) 10; (E) 11.

Problema 6. Una bolsa contiene bolas de cinco colores diferentes. Dos son rojas, tres son azules, diez son blancas, cuatro son verdes y tres son negras. Las bolas se van extrayendo de la bolsa sin mirar, y sin reposición. ¿Cuál es el menor número de bolas que se deben extraer para estar seguros de haber extraído dos bolas del mismo color?

(A) 2; (B) 12; (C) 10; (D) 5; (E) 6.

Problema 7. Alejandro enciende una vela cada diez minutos. Cada vela dura encendida 40 minutos y luego se apaga. ¿Cuántas velas estarán encendidas 55 minutos después de que Alejandro encendió la primera vela?

(A) 2; (B) 4; (C) 3; (D) 6; (E) 5.

Problema 8. El número de niños promedio en cinco familias no puede ser:

Ⓐ 0.2; Ⓑ 1.2; Ⓒ 2.2; Ⓓ 2.4; Ⓔ 2.5.

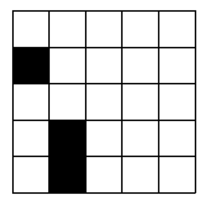
Problema 9. Marcos y Luisa están parados en puntos diametralmente opuestos de una fuente circular, y comienzan a correr alrededor de la fuente en el sentido de las agujas del reloj. La velocidad de Marcos es $9/8$ de la velocidad de Luisa. ¿Cuántas vueltas completas ha dado Luisa cuando Marcos la alcanza por primera vez?

Ⓐ 4; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 2; Ⓔ 72.

Problema 10. Los enteros positivos x, y, z satisfacen $xy = 14$, $yz = 10$ y $zx = 35$. ¿Cuál es el valor de $x + y + z$?

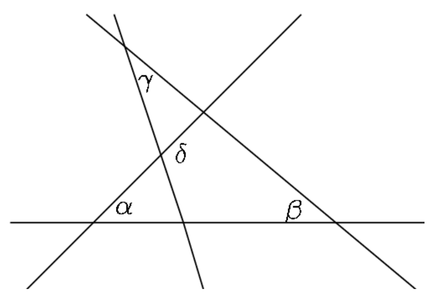
Ⓐ 10; Ⓑ 12; Ⓒ 14; Ⓓ 16; Ⓔ 18.

Problema 11. Karina y un amigo juegan a la batalla naval en un tablero de 5×5. Karina ha colocado dos barcos como muestra la figura, y le falta colocar otro barco de 3×1 (cubriendo exactamente 3 casillas). Si ningún par de barcos puede tener un punto en común, ¿en cuántas posiciones diferentes puede Karina colocar su barco?



Ⓐ 4; Ⓑ 7; Ⓒ 6; Ⓓ 8; Ⓔ 5.

Problema 12. En el diagrama, $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$ y $\gamma = 35°$. ¿Cuál es el valor de δ?

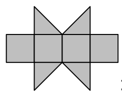
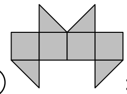
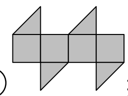
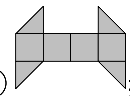
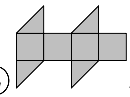


Ⓐ 125°; Ⓑ 100°; Ⓒ 130°; Ⓓ 105°; Ⓔ 120°.

Problema 13. El perímetro de un trapecio es 5 y las longitudes de sus lados son enteros. ¿Cuánto miden los dos ángulos más pequeños del trapecio?

Ⓐ 30° y 30°; Ⓑ 60° y 60°; Ⓒ 45° y 45°; Ⓓ 30° y 60°; Ⓔ 45° y 90°.

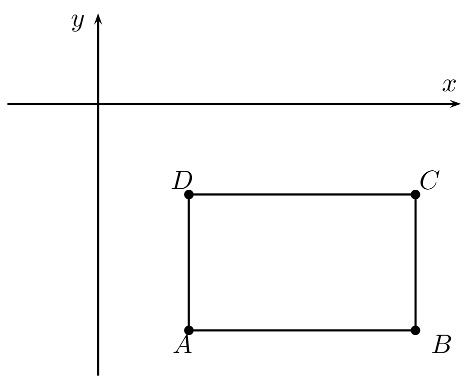
Problema 14. Una de las siguientes figuras no puede plegarse para formar un cubo. ¿Cuál es?

Ⓐ  ; Ⓑ  ; Ⓒ  ; Ⓓ  ; Ⓔ  .

Problema 15. Iván escribió varios enteros consecutivos. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser el porcentaje de impares entre los enteros escritos?

Ⓐ 40; Ⓑ 45; Ⓒ 48; Ⓓ 50; Ⓔ 60.

Problema 16. Los lados del rectángulo $ABCD$ son paralelos a los ejes de coordenadas. $ABCD$ está debajo del eje de las x y a la derecha del eje de las y, como muestra la figura. Las coordenadas de los cuatro puntos A, B, C y D son todas enteras. Para cada uno de esos puntos se calcula al valor de $y \div x$. ¿Para cuál de los cuatro puntos se obtiene un valor mínimo?

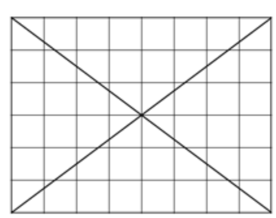


Ⓐ A; Ⓑ B; Ⓒ C; Ⓓ D; Ⓔ Depende del rectángulo..

Problema 17. Todos los enteros positivos de cuatro dígitos con los mismos dígitos que el número 2013 se escriben en la pizarra, en orden creciente. ¿Cuál es la mayor diferencia posible entre dos números vecinos en la pizarra?

Ⓐ 702; Ⓑ 703; Ⓒ 693; Ⓓ 793; Ⓔ 198.

Problema 18. En el tablero de 6×8 que muestra la figura, hay 24 celdas que no son intersectadas por ninguna de las dos diagonales. En un tablero de 6×10, ¿cuántas celdas no son intersectadas por ninguna de las dos diagonales?



Ⓐ 28; Ⓑ 29; Ⓒ 30; Ⓓ 31; Ⓔ 32.

Problema 19. Ana, Berta, Carla, Dora y Elsa nacieron los días 20/02/2001, 12/03/2000, 20/03/2001, 12/04/2000 y 23/04/2001, en algún orden. Ana y Elsa nacieron en el mismo mes. También Berta y Carla nacieron en el mismo mes. Ana y Carla nacieron en el mismo día de meses diferentes. También Dora y Elsa nacieron en el mismo día de meses diferentes. ¿Cuál de las cinco chicas es la más joven?

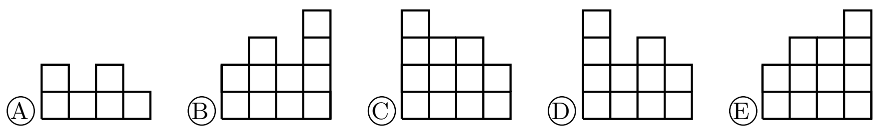
(A) Ana; (B) Carla; (C) Elsa; (D) Berta; (E) Dora.

Problema 20. Juan construyó un edificio de cubos sobre un tablero de 4×4. El diagrama muestra el número de cubos que hay sobre cada casilla. Cuando Juan mira desde atrás, ¿qué ve?

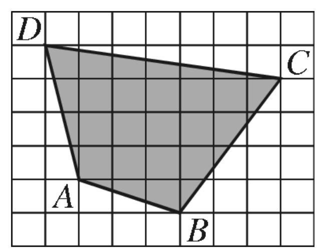
ATRÁS

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

FRENTE



Problema 21. El diagrama muestra un cuadrilátero sombreado $ABCD$, dibujado en una cuadrícula. Cada casilla de la cuadrícula tiene lado 2 cm. ¿Cuál es el área de $ABCD$?



(A) 84 cm^2; (B) 96 cm^2; (C) 76 cm^2; (D) 104 cm^2; (E) 88 cm^2.

Problema 22. Sea S el número de cuadrados entre los enteros desde el 1 hasta el 2013^6 (ambos inclusive). Sea Q el número de cubos entre los mismos números. Entonces

(A) $S = Q$; (B) $2S = 3Q$; (C) $3S = 2Q$; (D) $S = 2013Q$; (E) $S^3 = Q^2$.

Problema 23. Juan escoge un entero positivo de 5 dígitos y borra uno de los dígitos, obteniendo un número de 4 dígitos. La suma de este número de 4 dígitos con el original de 5 dígitos es 52713. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número original de 5 dígitos?

(A) 26; (B) 20; (C) 23; (D) 19; (E) 17.

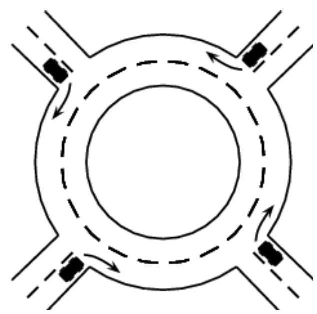
Problema 24. Un jardinero desea plantar 20 árboles, entre apamates y bucares, a lo largo de una avenida de un parque. Si el número de árboles entre dos apamates cualesquiera no debe ser 3, ¿cuál es el máximo número de apamates que el jardinero puede plantar?

Ⓐ 12; Ⓑ 8; Ⓒ 14; Ⓓ 10; Ⓔ 16.

Problema 25. Andrés y Daniel participaron en un maratón. Luego de la carrera observaron que Andrés finalizó antes que el doble de los corredores que finalizaron antes que Daniel, y que Daniel finalizó antes que 1,5 veces los corredores que finalizaron antes que Andrés. Si Andrés llegó en el lugar 21, ¿cuántos corredores participaron en el maratón?

Ⓐ 31; Ⓑ 41; Ⓒ 51; Ⓓ 61; Ⓔ 81.

Problema 26. Cuatro carros entran a una redoma simultáneamente, cada uno de una dirección diferente, como muestra el diagrama. Cada carro recorre menos de una vuelta completa alrededor de la redoma y cada uno sale por una dirección diferente. ¿De cuántas maneras diferentes pueden los carros salir de la redoma?



Ⓐ 9; Ⓑ 12; Ⓒ 15; Ⓓ 24; Ⓔ 81.

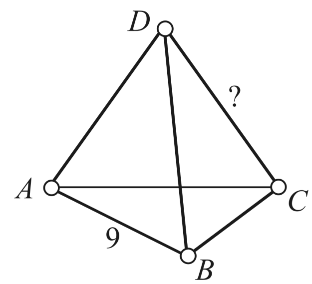
Problema 27. Una sucesión comienza 1, -1, -1, 1, -1. Luego del quinto, cada término es igual al producto de los dos que lo preceden. Por ejemplo el sexto término es el producto del cuarto y el quinto término. ¿Cuál es la suma de los primeros 2013 términos?

Ⓐ -1006; Ⓑ -671; Ⓒ 0; Ⓓ 671; Ⓔ 1007.

Problema 28. Rita horneó seis pasteles uno detrás del otro y los numeró del 1 al 6, en el orden en que fueron saliendo del horno. Sus hijos entraron varias veces a la cocina y en cada ocasión se comieron el pastel más caliente que encontraron. ¿Cuál de los siguientes no puede ser el orden en que fueron comidos los pasteles?

Ⓐ 123456; Ⓑ 654321; Ⓒ 125436; Ⓓ 325461; Ⓔ 456231.

Problema 29. Cada uno de los cuatro vértices y seis aristas de un tetraedro se marca con uno de los diez números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 11 (el número 10 no se usa). Cada número se usa exactamente una vez. Para cada par de vértices del tetraedro se cumple que la suma de los números de esos vértices es igual al número de la arista que los une. La arista AB está marcada con el número 9. ¿Con qué número está marcada la arista CD?



Ⓐ 11; Ⓑ 8; Ⓒ 6; Ⓓ 5; Ⓔ 4.

Problema 30. Un entero positivo N es menor que la suma de sus tres mayores divisores (excluyendo naturalmente al propio N). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

Ⓐ Todos esos N son divisibles entre 7;
Ⓑ Todos esos N son divisibles entre 6;
Ⓒ Todos esos N son divisibles entre 5;
Ⓓ Todos esos N son divisibles entre 4;
Ⓔ Ningún N tiene esa propiedad.

1.2.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (D), 6. El triángulo se puede descomponer en 9 triangulitos equiláteros iguales, cada uno de ellos de área 1, y cada rombo sombreado se compone de dos de esos triangulitos.

2. La respuesta correcta es la (C), 55.

3. La respuesta correcta es la (C). Como $7 + 193 = 200$, en 200 Kgr de agua de mar hay 7 kgr de sal. Por consiguiente en 1000 kgr de agua de mar hay $7 \times 5 = 35$ kgr de sal.

4. La respuesta correcta es la (C), 4.

5. La respuesta correcta es la (E). El menor número natural cuyo producto de dígitos es 24 es el 38.

6. La respuesta correcta es la (E), 6. Si se extraen 5 bolas podrían ser todas de colores diferentes, pero al extraer 6 necesariamente habrá dos de un mismo color.

7. La respuesta correcta es la (B), 4.

8. La respuesta correcta es la (E). Si se multiplica el promedio por 5 debe dar el número total de niños, que es un número entero.

9. La respuesta correcta es la (A), 4 vueltas.

10. La respuesta correcta es la (C), 14. En efecto, $x^2 = (xy)(zx)/(yz) = 14 \cdot 35/10 = 7^2$, de donde $x = 7$, $y = 2$, $z = 5$.

11. La respuesta correcta es la (D), 8.

12. La respuesta correcta es la (C). Se verifica fácilmente que $\delta = \alpha+\beta+\gamma = 130°$.

13. La respuesta correcta es la (B). Los lados sólo pueden medir 2, 1, 1 y 1; el trapecio es isósceles con dos ángulos de 60° y dos de 120°.

14. La respuesta correcta es la (D) (al plegarla, los dos triángulos inferiores chocan).

15. La respuesta correcta es la (B), 45. Si el número de enteros escritos es par, el porcentaje de impares es 50 %. Si en cambio es $2n+1$, el porcentaje es $100n/(2n+1)$ o $100(n+1)/(2n+1)$. Para que estos números sean enteros $2n+1$ debe dividir a 100, lo que ocurre sólo para $n = 0, 2, 12$. Esto da lugar a los porcentajes 0, 100, 40, 60, 48 y 52.

16. La respuesta correcta es la (A).

17. La respuesta correcta es la (A). Los números escritos en la pizarra son 1023, 1032, 1203, 1230, 1302, 1320, 2013, 2031, 2103, 2130, 2301, 2310, 3012, 3021, 3102, 3120, 3201, 3210. La mayor diferencia es $3012 - 2310 = 702$.

18. La respuesta correcta es la (E), 32.

19. La respuesta correcta es la (D), Berta. Sólo una nació en febrero, y debe ser Dora, que entonces nació el 20/02/2001. Elsa nació otro 20: el 20/03/2001. Ana y Carla nacieron el día 12 y entonces Berta nació el 23/04/2001 y es la más joven.

20. La respuesta correcta es la (E).

21. La respuesta correcta es la (A). Una forma de hallarla consiste en encerrar el cuadrilátero en un rectángulo de 5×7 casillas y restar a su área (140 cm^2) las de los triángulos rectángulos y un cuadradito que quedan fuera de $ABCD$, que suman $8+14+24+6+4 = 56$ cm^2, para obtener la respuesta $140 - 56 = 84$ cm^2.

22. La respuesta correcta es la (D), ya que $S = 2013^3$ y $Q = 2013^2$.

23. La respuesta correcta es la (C), 23. Sea $abcde$ el número original. El dígito borrado debió ser el de las unidades e, pues de lo contrario la suma sería par. Entonces $52713 = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e + 1000a + 100b + 10c + d = 11000a + 1100b + 110c + 11d + e$, de donde e es el resto de la división de 52713 entre 11, es decir que $e = 1$, y se sigue que $d = 2$, $c = 9$, $b = 7$ y $a = 4$.

24. La respuesta correcta es la (A), 12. Si los árboles se numeran consecutivamente de 1 a 20, en cada uno de los pares (1,5), (2,6), (3,7), (4,8), (9,13), (10,14), (11,15) y (12,16) a lo sumo uno de ambos puede ser un apamate. Esto nos da hasta 8 apamates entre los primeros 16 árboles, y si 17, 18, 19 y 20 son apamates se podría llegar a un máximo de 12. Una forma de acomodar 12 apamates (A) y 8 bucares (B) es AAAABBBBAAAABBBBAAAA.

25. La respuesta correcta es la (B). Si participaron n corredores y Daniel finalizó en la posición d, entonces $n-21 = 2(d-1)$ y $n-d = 1{,}5\cdot 20 = 30$. Luego $n = d+30$, $d+9 = 2(d-1)$, $d = 11$ y $n = 41$.

26. La respuesta correcta es la (A). Si los accesos se numeran de 1 a 4 y el carro que entró por i sale por a_i, entonces (a_1, a_2, a_3, a_4) es una permutación de (1,2,3,4) con $a_i \neq i$ para todo i, es decir un *desarreglo* de (1,2,3,4). Hay 9 de estas permutaciones, a saber (2,1,4,3), (2,3,4,1), (2,4,1,3), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1), (4,1,2,3), (4,3,1,2) y (4,3,2,1).

27. La respuesta correcta es la (B). Los primeros términos de la sucesión son 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1,... y es obvio que es periódica con período 3. Como $2013 = 3 \times 671$ y cada grupo de tres consecutivos suma -1, la respuesta es -671.

28. La respuesta correcta es la (E). Si comieron 4, 5 y 6, el más caliente de los que quedaban era el 3 y no el 2.

29. La respuesta correcta es la (D). Observemos que $1+2+3+4+5+6+7+8+9+11 = 56$. Si los números en los vértices son a, b, c y d, entonces la suma de los números de las aristas es $56-a-b-c-d$ y es igual al triple de $a+b+c+d$, es decir que $56 = 4(a+b+c+d)$ y $a+b+c+d = 14$. Como $a+b = 9$ la respuesta es $c+d = 14-9 = 5$.

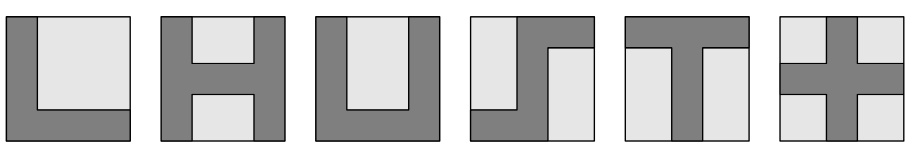
30. La respuesta correcta es la (B). Si los menores divisores de N son $1 < a < b < c$ entonces $N < N/a + N/b + N/c$, de donde $1/a + 1/b + 1/c > 1$. Para que esto ocurra deben ser $a = 2$ y $b = 3$, de donde N es divisible entre 6. El 12 es un ejemplo de tales números $(12 < 6+4+3)$ que no es divisible entre 5 ni entre 7. El 30 es otro ejemplo $(30 < 15+10+6)$ que no es divisible entre 4.

1.3. Prueba de Cuarto Año y Quinto Año

Problema 1. El número $200013 - 2013$ no es divisible entre

(A) 2; (B) 3; (C) 5; (D) 7; (E) 11.

Problema 2. María dibujó varias figuras en hojas de papel cuadradas e idénticas:



¿Cuántas de estas formas tienen el mismo perímetro que la hoja de papel en que están dibujadas?

A 2; B 3; C 4; D 5; E 6.

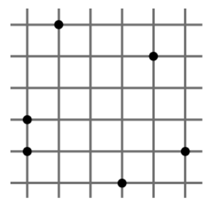
Problema 3. Una tienda vende mangos a 0,20 Bs cada uno, pero por cada 5 mangos que se compren ofrece uno gratis. La señora María le compró 4 mangos a cada uno de sus 4 hijos. ¿Cuánto pagó?

A 0,80; B 1,20; C 2,80; D 3,20; E 80.

Problema 4. Tres de los números 2, 4, 16, 25, 50 y 125 tienen como producto 1000. ¿Cuál es su suma?

A 70; B 77; C 131; D 143; E 145.

Problema 5. Seis puntos se han marcado en una cuadrícula con celdas de lado 1. ¿Cuál es la mínima área posible de un triángulo con tres de los puntos marcados como vértices?

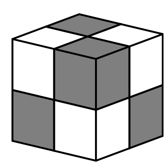


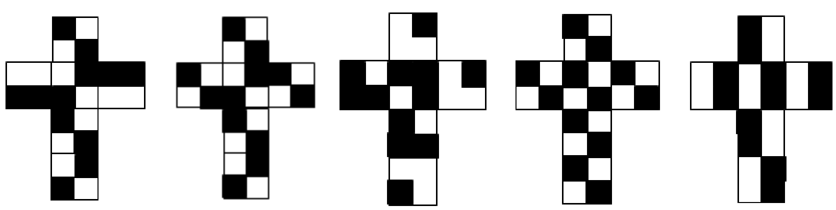
A 2; B 1; C 1/4; D 1/3; E 1/2.

Problema 6. ¿Cuál de los siguientes números es igual a $4^{15} + 8^{10}$?

A 2^{10}; B 2^{15}; C 2^{20}; D 2^{30}; E 2^{31}.

Problema 7. Un cubo está pintado exteriormente con cuadrados blancos y negros, de manera tal que parece haber sido construido con cubos blancos y negros más pequeños, como muestra la figura. ¿Cuál de los siguientes es un esquema correcto para construir ese cubo?



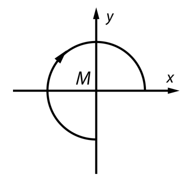


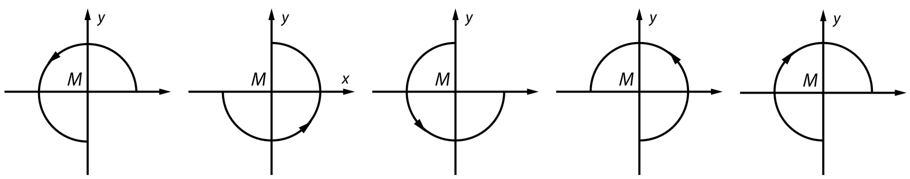
A B C D E.

Problema 8. El número n es el mayor entero positivo para el cual $4n$ es un número de 3 dígitos, y m es el menor entero positivo para el cual $4m$ es un número de 3 dígitos. ¿Cuál es el valor de $4n - 4m$?

A 899; B 225; C 900; D 224; E 896.

Problema 9. Considere tres cuartos de círculo con centro M orientados con una flecha como muestra la figura a la derecha. ¿Cuál es la posición de los tres cuartos de círculo si primero se rotan 90° alrededor de M, en sentido contrario al de las agujas del reloj, y luego se reflejan en el eje de las x?



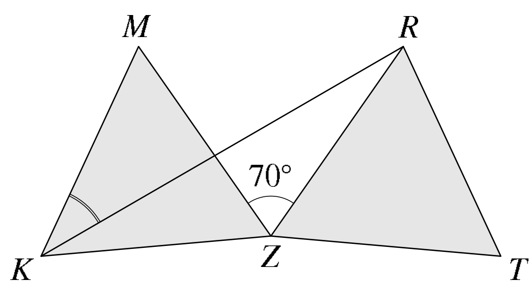


(A) (B) (C) (D) (E)

Problema 10. ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

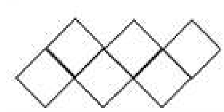
(A) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{13}$; (B) $\sqrt{20} \cdot 13$; (C) $20 \cdot \sqrt{13}$; (D) $\sqrt{201} \cdot 3$; (E) $\sqrt{2013}$.

Problema 11. Los triángulos KZM y RZT son equiláteros y congruentes, y $\angle RZM = 70°$. Determine la medida del ángulo $\angle RKM$.



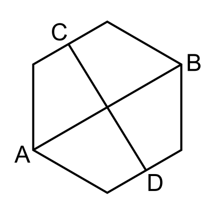
(A) 20°; (B) 25°; (C) 30°; (D) 35°; (E) 40°.

Problema 12. La figura muestra un zigzag construido con seis cuadrados de 1 cm×1 cm. Su perímetro es 14 cm. ¿Cuál es el perímetro de un zigzag construido de manera análoga con 2013 cuadrados?



(A) 2022; (B) 8050; (C) 4028; (D) 4032; (E) 6038.

Problema 13. El segmento AB conecta dos vértices opuestos de un hexágono regular. El segmento CD conecta los puntos medios de dos lados opuestos . Halle el producto de las longitudes de AB y CD sabiendo que el área del hexágono es 60.

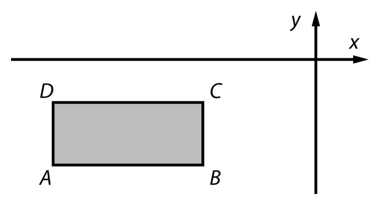


(A) 100; (B) 80; (C) 60; (D) 50; (E) 40.

Problema 14. Los estudiantes de una clase presentaron un examen. Si cada varón hubiese obtenido 3 puntos más de los que obtuvo, el promedio de notas de toda la clase hubiese sido 1,2 puntos más de lo que fué. ¿Qué porcentaje de la clase son niñas?

Ⓐ 20 %; Ⓑ 30 %; Ⓒ 40 %; Ⓓ 60 %; Ⓔ Es imposible saberlo.

Problema 15. Los lados del rectángulo $ABCD$ son paralelos a los ejes de coordenadas. Para cada vértice calculamos el cociente de la ordenada y entre la abscisa x. ¿Para cuál de los cuatro puntos se obtiene un menor valor?

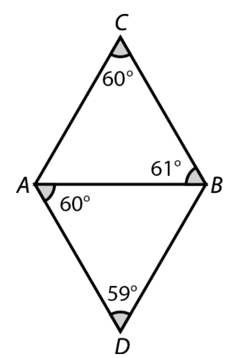


Ⓐ B; Ⓑ D; Ⓒ A; Ⓓ C; Ⓔ Depende del rectángulo.

Problema 16. Hoy Juan y su hijo están celebrando sus cumpleaños. El producto de las edades de ambos es 2013. ¿En qué año nació Juan?

Ⓐ 1952; Ⓑ 1953; Ⓒ 1981; Ⓓ 1982; Ⓔ Se necesita más información.

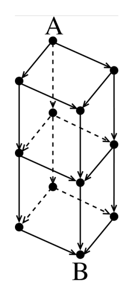
Problema 17. En el triángulo ABC se tiene $\angle ABC = 61°$ y $\angle ACB = 60°$. En el triángulo ABD se tiene $\angle ADB = 59°$ y $\angle BAD = 60°$. ¿Cuál de los cinco segmentos de la figura es el más largo?



Ⓐ AD; Ⓑ AC; Ⓒ AB; Ⓓ BC; Ⓔ BD.

Problema 18. ¿Cuántos conjuntos de cinco enteros positivos consecutivos tienen la propiedad de que hay tres de ellos que tienen la misma suma que los otros dos?
Ⓐ 3; Ⓑ más de 3; Ⓒ ninguno; Ⓓ 1; Ⓔ 2.

Problema 19. ¿Cuál es el número de caminos diferentes que van desde el punto A hasta el punto B, siguiendo la dirección de las flechas?



Ⓐ 6; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 12; Ⓔ 15.

Problema 20. Un entero positivo tiene seis dígitos. La suma de los dígitos es un número par. El producto de los dígitos es un número impar. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

Ⓐ El número tiene o dos o cuatro dígitos pares.
Ⓑ Ese número no puede existir.
Ⓒ La cantidad de dígitos impares del número es impar.
Ⓓ Los seis dígitos del número pueden ser diferentes.
Ⓔ Ninguna de las anteriores.

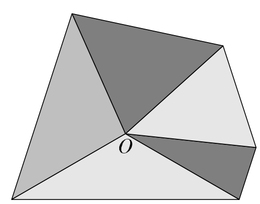
Problema 21. ¿Cuántas cifras decimales tiene el número $\frac{1}{1024000}$?
Nota: Se cuentan las cifras a la derecha de la coma hasta la última no nula.

Ⓐ 13; Ⓑ 14; Ⓒ 1024000; Ⓓ 10; Ⓔ 12.

Problema 22. ¿Cuántos enteros positivos son múltiplos de 2013 y tienen exactamente 2013 divisores (incluyendo 1 y el mismo número)?

Ⓐ 0; Ⓑ 1; Ⓒ 3; Ⓓ 6; Ⓔ otro valor.

Problema 23. Varios triángulos isósceles tienen el vértice O en común y no se superponen. Cada triángulo tiene un lado común con sus vecinos inmediatos. El menor ángulo de un triángulo en el vértice O es m grados, donde m es un entero positivo. Los restantes triángulos tienen ángulos en O de medidas $2m°$, $3m°$, $4m°$, etc. La figura muestra un arreglo de cinco tales triángulos. ¿Cuál es el menor valor de m para el cual tal conjunto de triángulos existe?



Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 3; Ⓓ 6; Ⓔ 8.

Problema 24. Dada una lista de tres números, construimos otra reemplazando cada número por la suma de los otros dos. A este procedimiento le llamamos "cambiasuma". Por ejemplo, a partir de $\{3, 4, 6\}$ cambiasuma nos da $\{10, 9, 7\}$ y una nueva aplicación de cambiasuma nos da $\{16, 17, 19\}$. Si comenzamos con la lista $\{1, 2, 3\}$, ¿cuántas cambiasumas consecutivas tendremos que aplicar para que en la lista aparezca el número 2013 por primera vez?

Ⓐ 2013 nunca aparece; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 10; Ⓔ más de 10.

Problema 25. Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 se escriben alrededor de un círculo en un orden cualquiera. Cada número se suma con sus dos vecinos, obteniéndose 10 sumas. ¿Cuál es el máximo valor posible de la menor de esas sumas?

Ⓐ 14; Ⓑ 15; Ⓒ 16; Ⓓ 17; Ⓔ 18.

Problema 26. En 22 tarjetas se han escrito los enteros positivos del 1 al 22. Con esas tarjetas se forman 11 fracciones. ¿Cuál es el mayor número de esas fracciones que pueden tener valores enteros?

Ⓐ 10; Ⓑ 7; Ⓒ 11; Ⓓ 8; Ⓔ 9.

Problema 27. ¿Cuántos triángulos hay cuyos vértices sean vértices de un polígono regular de 13 lados, y tales que el centro del polígono esté en el interior del triángulo?

Ⓐ 100; Ⓑ 91; Ⓒ 85; Ⓓ 72; Ⓔ otro valor.

Problema 28. Un carro parte del punto A y recorre un camino recto a una velocidad de 50 km/h. Luego, cada una hora, un carro parte del punto A a una velocidad 1 km/h más rápido que el anterior. El último carro parte 50 horas después que el primero, a una velocidad de 100 km/h. ¿Cuál es la velocidad del carro que va adelante de todos los demás 100 horas después de la partida del primero?

Ⓐ 66 km/h; Ⓑ 50 km/h; Ⓒ 100 km/h; Ⓓ 84 km/h; Ⓔ 75 km/h.

Problema 29. A lo largo de una avenida crecen 100 árboles, entre apamates y bucares. Si el número de árboles entre dos apamates cualesquiera no es nunca 5, ¿cuál es el máximo número de apamates que puede haber entre los 100 árboles?

Ⓐ 48; Ⓑ 60; Ⓒ 50; Ⓓ 52; Ⓔ la situación es imposible.

Problema 30. Juan caminaba por la calle cuando vió un tractor que arrastraba un largo tubo. Para medir la longitud del tubo, Juan caminó a lo largo del tubo en dirección contraria a la del tractor, y contó 20 pasos. Luego caminó a la misma velocidad a lo largo del tubo, en la misma dirección del tractor, y contó 140 pasos. Sabiendo que cada uno de sus pasos mide 1 m, Juan fue capaz de calcular la longitud del tubo. ¿Qué medida obtuvo?

Ⓐ 30 m; Ⓑ 35 m; Ⓒ 40 m; Ⓓ 48 m; Ⓔ 80 m.

1.3.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (D), 7, ya que los criterios de divisibilidad muestran que $200013 - 2013 = 198000$ es divisible entre 2, 3, 5 y 11.

2. La respuesta correcta es la (C), 4. Las figuras 1, 4, 5 y 6 (de izquierda a derecha) cumplen la condición.

3. La respuesta correcta es la (C). La señora compró 14 mangos por 2,80 y le regalaron 2.

4. La respuesta correcta es la (C). Como $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, los números deben ser 2, 4 y 125 y su suma es 131.

5. La respuesta correcta es la (E) y se logra tomando los 3 puntos marcados en las dos líneas verticales de la izquierda.

6. La respuesta correcta es la (E) puesto que $4^{15} + 8^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2^{31}$.

7. La respuesta correcta es la (B).

8. La respuesta correcta es la (E), pues $n = 249$ y $m = 25$, luego $4n - 4m = 4(249 - 25) = 896$.

9. La respuesta correcta es la (A).

10. La respuesta correcta es la (C). Expresando cada una de las 5 opciones A, B, C, D y E como una raíz cuadrada se obtienen $\sqrt{260}$, $\sqrt{3380}$, $\sqrt{5200}$, $\sqrt{1809}$ y $\sqrt{2013}$, respectivamente.

11. La respuesta correcta es la (D): $\angle KZR = 60° + 70° = 130°$, y como KZD es isósceles se tiene $\angle ZKR = (180° - 130°)/2 = 25°$ y finalmente $\angle RKM = \angle ZKM - \angle ZKR = 60° - 25° = 35°$.

12. La respuesta correcta es la (C). Con un solo cuadrado el perímetro es 4, y cada cuadrado que se agrega aumenta el perímetro en 2 (pues se agregan 3 lados nuevos y se elimina uno), luego la respuesta es $4 + 2012 \cdot 2 = 4028$.

13. La respuesta correcta es la (B). Sea a el lado del hexágono. El hexágono se descompone en seis triángulos equiláteros de lado a, altura $a\sqrt{3}/2$ y área $a^2\sqrt{3}/4$. Entonces $60 = 6a^2\sqrt{3}/4$, de donde $a^2\sqrt{3} = 40$. Pero $AB = 2a$ y $CD = 2a\sqrt{3}/2 = a\sqrt{3}$, de donde $AB \cdot CD = 2a^2\sqrt{3} = 80$.

14. La respuesta correcta es la (D). Si la fracción de varones del total de la clase es x, entonces $3x = 1{,}2$, de donde $x = 0{,}4$. Es decir que el 40 % son varones y el 60 % son niñas.

15. La respuesta correcta es: para el punto D (opción B).

16. La respuesta correcta es la (A). Como $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, la única edad razonable para Juan es 61 años, luego nació en $2013 - 61 = 1952$.

17. La respuesta correcta es la (A). Como $\angle BAC = 180° - 60° - 61° = 59°$, el lado mayor del $\triangle ABC$ es el AC. Y como $\angle DBA = 180° - 60° - 59° = 61°$, el lado mayor del $\triangle DBA$ es el AD. Pero $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle DBA$, luego $AD/AC = BA/BC > 1$, luego AD es el segmento mayor.

18. La respuesta correcta es la (E). Si un conjunto cumple la condición, la suma de sus elementos debe ser par. Entonces debe contener tres pares y dos ompares. $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ cumple, pues $2 + 3 + 5 = 4 + 6$. $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ también cumple, pues $4 + 5 + 6 = 7 + 8$. Si $a \geq 6$ entonces $a + (a + 1) + (a + 2) > (a + 3) + (a + 4)$

(pues esto es equivalente a $a > 4$), luego la suma de tres elementos cualesquiera es mayor que la de los otros dos. En consecuencia sólo hay dos soluciones.

19. La respuesta correcta es la (D).

20. La respuesta correcta es la (E). Los 6 dígitos deben ser impares para que el producto de ellos sea impar. Y cualquier entero de 6 dígitos impares cumple las condiciones. Luego A, B y C son falsas. D también es falsa pues sólo hay 5 dígitos impares (1, 3, 5, 7 y 9).

21. La respuesta correcta es la (A): $1/1024000 = 0{,}0000009765625$.

22. La respuesta correcta es la (D), 6. Como $2013 = 3\cdot 11\cdot 61$ los números buscados deben ser de la forma $p^2q^{10}r^{60}$, donde p, q y r deben ser 3, 11 y 61 en algún orden.

23. La respuesta correcta es la (C). Si hay k triángulos entonces $m(1+2+\cdots+k) = mk(k+1)/2 = 360$, o sea $k(k+1) = 720/m$. Ni $m = 1$ ni $m = 2$ sirven, pues ni 720 ni 360 son de la forma $k(k+1)$. Pero $720/3 = 240 = 15\cdot 16$, luego $m = 3$ es el mínimo buscado.

24. La respuesta correcta es la (A). Los números en la lista después de n operaciones consecutivas serán $2^{n-1} - 1$, 2^{n-1} y $2^{n-1} + 1$, y nunca aparecerá 2013, que difiere en 35 de la potencia de 2 más cercana.

25. La respuesta correcta es la (B). Si se suman todas las ternas de números consecutivos se obtiene $3(1 + 2 + \cdots + 10) = 165$, luego el mínimo es menor que 17. Pero no puede ser 16, pues al menos 5 ternas serían 16, y se alternarían con ternas de 17, lo cual es imposible. La distribución 1, 8, 7, 3, 5, 10, 4, 2, 9, 6 tiene 15 como menor suma.

26. La respuesta correcta es la (A). Se forman 11 fracciones, pero los números 13, 17 y 19 sólo pueden aparearse con 1 para obtener una fracción entera, luego al menos una de las fracciones no es entera y 10 es una cota superior, que se alcanza con 10/2, 12/6, 13/1, 14/7, 15/5, 16/8, 18/9, 20/4, 21/3 y 22/11.

27. La respuesta correcta es la (B). Si se numeran los vértices del polígono en sentido horario de 1 a 13, los triángulos buscados son los de vértices (1,6,6), (2,5,6), (2,6,5), (3,4,6), (3,5,5), (3,6,4), (4,4,5) y sus 13 rotaciones, en total $7 \times 13 = 91$.

28. La respuesta correcta es la (E). El carro i ($0 \le i \le 50$) parte a la hora i con velocidad $50 + i$. A la hora 100 ha recorrido $(100 - i)(50 + i) = 5000 + 50i - i^2 = 5625 - (i - 25)^2$, que es máximo para $i = 25$. Luego en la hora 100 el carro que va adelante va a 75 km/h.

29. La respuesta correcta es la (D). Considere los 52 conjuntos $\{1, 7\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 9\}$, $\{4, 10\}$, $\{5, 11\}$, $\{6, 12\}$; $\{13, 19\}$, $\{14, 20\}$,..., $\{18, 24\}$; $\{25, 31\}$,..., $\{30, 36\}$; $\{37, 43\}$,..., $\{42, 48\}$; $\{49, 55\}$,..., $\{54, 60\}$; $\{61, 67\}$,..., $\{66, 72\}$; $\{73, 79\}$,..., $\{78, 84\}$; $\{85, 91\}$,..., $\{90, 96\}$; $\{97\}$, $\{98\}$, $\{99\}$, $\{100\}$ y aplique el principio de las casillas.

30. La respuesta correcta es la (B). Tomemos como unidad de tiempo lo que tarda Juan en dar un paso. Entonces la velocidad de Juan es 1 y si la del tractor es v se tiene $L = 20(1 + v) = 140(1 - v)$ de donde $v = 3/4$ y $L = 35$m.

Capítulo 2

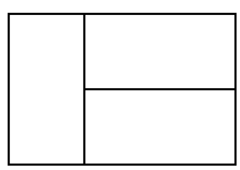
Prueba Regional

La prueba regional de la OJM consta de cinco problemas, que se valoran en una escala de 1 a 7. Los participantes disponen de tres horas y media para resolverlos.

2.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. ¿Cuántos enteros positivos de 3 dígitos **no son** divisores de 2013?

Problema 2. Con tres piezas rectangulares idénticas se arma un nuevo rectángulo, como muestra la figura. Si el perímetro de cada pieza es 54 cm, ¿cuál es el perímetro del nuevo rectángulo?



Problema 3. (a) ¿Es posible repartir los números 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 y 7^2 en dos grupos, de manera que la suma de los números de cada grupo sea la misma? (b) ¿Y para los números 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2 y 9^2?

Problema 4. Hoy cumple años mi sobrino Bruno. Es curioso que el número de años que está cumpliendo es igual a la suma de los dígitos de su año de nacimiento. Sabiendo que Bruno nació en el presente siglo, ¿cuántos años está cumpliendo?

Problema 5. Un número es *capicúa* si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo 7, 33 y 252 son capicúas. ¿Cuántos capicúas hay desde 1 hasta 2013?

2.1.1. Soluciones

1. Como $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, sus divisores son 1, 3, 11, 61, $3 \times 11 = 33$, $3 \times 61 = 183$, $11 \times 61 = 671$ y 2013. De éstos, sólo 183 y 671 son de tres dígitos. Como hay en total 900 enteros positivos de 3 dígitos, los que no son divisores de 2013 son $900 - 2 = 898$.

2. Sean a el largo y b el ancho de cada pieza, en centímetros. Entonces $2a+2b = 54$, de donde $a+b = 27$. Además $a = 2b$, de donde $3b = 27$, $b = 9$ y $a = 18$. La respuesta es $P = 4a + 2b = 90$ cm.

Solución alternativa: Si el ancho de cada pieza es x, entonces el largo es $2x$ y el perímetro es $2(x + 2x) = 6x = 54$ cm, de donde $x = 9$ cm. Por lo tanto el perímetro del nuevo rectángulo es $2(3x + 2x) = 10x = 90$ cm.

3. (a) Sí se puede. La suma de los 7 números es 140, luego la suma de cada grupo debe ser 70. En el grupo donde está $7^2 = 49$ se debe agregar números que sumen 21 para llegar a 70, lo cual se logra con 1, 4 y 16. Por lo tanto los grupos son $\{1^2, 2^2, 4^2, 7^2\}$ y $\{3^2, 5^2, 6^2\}$.

(b) No se puede porque la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2$ tiene 5 sumandos impares y por lo tanto es impar.

4. Si Bruno nació en el año $2000 + x$ con $1 \le x \le 9$, entonces está cumpliendo $13-x$ años, y tendríamos que $13-x = 2+0+0+x$, o sea $11 = 2x$, que es imposible. Nos quedan por probar 2010, 2011 y 2012. Como $2013 - 2012 = 1 \neq 2 + 0 + 1 + 2$, $2013 - 2011 = 2 \neq 2 + 0 + 1 + 1$ y $2013 - 2010 = 3 = 2 + 0 + 1 + 0$ se ve que 3 es la única solución para la edad de Bruno, que nació en el 2010.

También se puede hacer una tabla:

Año	Suma	Edad
2001	3	12
2002	4	11
2003	5	10
2004	6	9
2005	7	8
2006	8	7
2007	9	6
2008	10	5
2009	11	4
2010	3	3
2011	4	2
2012	5	1

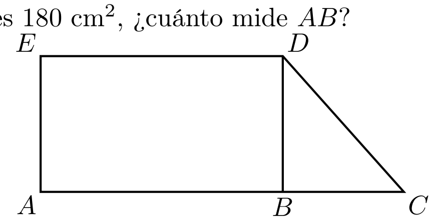
y observar que solamente para el año 2010 coinciden edad y suma de dígitos.

5. Los 9 números de una cifra son capicúas. De dos cifras también hay 9, a saber 11, 22, 33,..., 99. De tres cifras hay 90, pues la primera cifra se puede escoger de 9 maneras (del 1 al 9), la del medio de 10 maneras y la tercera debe ser igual a la primera. Los de 4 cifras que comienzan con 1 son 10, a saber los de la forma $1aa1$ con $a = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Y finalmente se tiene el 2002, para un total de $9 + 9 + 90 + 10 + 1 = 119$.

2.2. Prueba de Segundo Año

Los problemas 1, 3 y 5 de Segundo Año fueron los mismos que los 1, 3 y 5 de Primer Año (ver pág. 27). Las pruebas sólo se diferenciaron en los problemas 2 y 4, que se enuncian a continuación.

Problema 2. $ABDE$ es un rectángulo, $AB = 2 \cdot BC$ y $BD = 9cm$. Si el área del cuadrilátero $ACDE$ es 180 cm^2, ¿cuánto mide AB?



Problema 4. Tres amigos van a almorzar todos los días al mismo lugar. Cada uno elige el menú A o el B, y siempre dejan (entre los tres) 10 Bs de propina al mesero. El lunes, dos piden el menú A y uno el menú B, y gastan 121 Bs en total. El martes, uno pide el menú A y dos piden el menú B, y gastan en total 118 Bs. ¿Cuánto cuesta cada menú?

2.2.1. Soluciones

2.

$$180 = [ACDE] = [ABDE] + [BCD] = AB \cdot BD + \frac{BD \cdot BC}{2} = 18BC + \frac{9BC}{2},$$

de donde $\frac{45}{2}BC = 180$. Por lo tanto $BC = 8$ y $AB = 2BC = 16$ cm.

Solución alternativa: El área del triángulo BCD es la cuarta parte del área del rectángulo $ABDE$, luego $[ACDE] = \frac{5}{4}[ABDE]$ y $[ABDE] = \frac{4}{5}[ACDE] = \frac{4}{5}180 = 144$ cm^2, luego $AB = \frac{144}{9} = 16$ cm.

4. $2A + B + 10 = 121$, $A + 2B + 10 = 118$, restando queda $A - B = 3$, de donde $A = B + 3$ y sustituyendo en la segunda ecuación queda $3B + 3 + 10 = 118$, $3B = 105$, $B = 35$, $A = 38$.

2.3. Prueba de Tercer Año

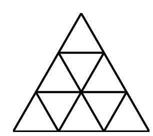
Problema 1. Idéntico al Problema 1 de Primer Año (ver pág. 27).

Problema 2. Idéntico al Problema 2 de Segundo Año (ver pág. 29).

Problema 3. En un examen, la nota promedio de los que aprobaron fue 14, la nota promedio de los que reprobaron fue 6, y el promedio de todas las notas fue 11. ¿Qué porcentaje del total de estudiantes aprobó el examen?

Problema 4. Hoy cumple años mi amiga Ana. Es curioso que el número de años que está cumpliendo es igual a la suma de los dígitos de su año de nacimiento. Sabiendo que Ana nació en el siglo XX, ¿cuántos años está cumpliendo?

Problema 5. Un triángulo equilátero de lado 3 se divide mediante líneas paralelas a los lados en 9 triangulitos equiláteros de lado 1. Dos triangulitos se dicen *adyacentes* si tienen un lado común.



(a) Escriba los números del 1 al 9, uno en cada triangulito, de modo que cada número sea divisible entre el número de triangulitos adyacentes al que ocupa.

(b) ¿Cuántas soluciones admite la parte (a)?

2.3.1. Soluciones

1. Ver solución al problema 1 de Primer Año pág. 28.

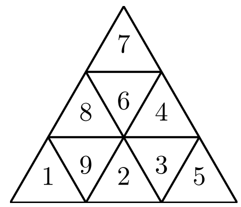
2. Ver solución al problema 2 de Segundo Año pág. 29.

3. Si son n estudiantes y a de ellos aprobaron, entonces la suma de todas las notas es $14a + 6(n - a) = 11n$, de donde $8a = 5n$ y $\frac{a}{n} = \frac{5}{8}$. El porcentaje de estudiantes aprobados es $100\frac{5}{8} = 62{,}5\,\%$.

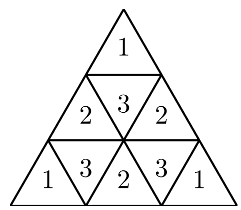
4. Si Ana nació en el año $\overline{19xy} = 1900 + 10x + y$, entonces está cumpliendo $2013 - 1900 - 10x - y = 113 - 10x - y$ años, y debe cumplirse $113 - 10x - y = 1 + 9 + x + y$, es decir $103 = 11x + 2y$. Como $y \leq 9$, $11x \geq 103 - 2\cdot 9 = 85$ y $x \geq 8$. Pero x debe ser impar, luego $x = 9$ (tamnién se pueden descartar uno por uno los valores de x de 0 a 8, sustituyéndolos en la ecuación $11x + 2y = 103$).

Luego $y = (103 - 11\cdot 9)/2 = 2$, por lo tanto Ana nació en 1992 y está cumpliendo 21 años.

5. (a) Una forma de hacerlo es la siguiente (hay muchas otras):



(b) El número de triangulitos adyacentes a cada triangulito puede ser 1, 2 ó 3, como muestra la siguiente figura:



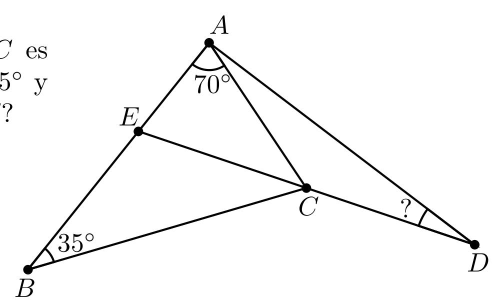
Los números 1, 5 y 7 no son divisibles entre 2 ni entre 3, luego sólo pueden ubicarse en los triangulitos de las esquinas (los marcados con 1 en la figura anterior). Los números 2, 4 y 8 son divisibles entre 2 pero no entre 3, luego sólo pueden ubicarse en los triangulitos marcados con 2 en la figura anterior. Los números 3, 6 y 9 son divisibles entre 3 y se pueden ubicar en los triangulitos marcados con 3. Como hay 6 maneras de ubicar tres números en tres triangulitos, el número total de soluciones a la parte (a) es $6^3 = 216$.

2.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Idéntico al Problema 3 de Tercer Año (ver pág. 30).

Problema 2. ¿Cuántos enteros positivos n existen tales que tanto $\frac{n}{3}$ como $3n$ son enteros de tres dígitos?

Problema 3
En la figura se tiene $BE = EC$, C es el punto medio de ED, $\angle CBA = 35°$ y $\angle CAB = 70°$. ¿Cuánto mide $\angle ADC$?



Problema 4. Idéntico al Problema 5 de Tercer Año (ver pág. 30).

Problema 5. Halle todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$xy + x + y = 17,$$
$$x^2 + y^2 = 29.$$

2.4.1. Soluciones

1. Ver solución al problema 3 de Tercer Año pág. 30.

2. n debe ser múltiplo de 3 y se deben cumplir las acotaciones $100 \leq \frac{n}{3} \leq 999$, $100 \leq 3n \leq 999$, es decir que $300 \leq n \leq 333$, por lo tanto los números con esa propiedad son: 300, 303, 306, 309, 312, 315, 318, 321, 324, 327, 330 y 333. En total hay 12.

3. Como $BE = EC$, el $\triangle BEC$ es isósceles y $\angle EBC = \angle ECB = 35°$. Por lo tanto $\angle CEA = \angle EBC + \angle ECB = 70° = \angle CAB$ y entonces $\triangle AEC$ es isósceles y $\angle ACE = 180° - 70° - 70° = 40°$. Luego $AC = EC = CD$ y $\triangle ACD$ es isósceles. Por lo tanto $\angle ADC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle ACE = 20°$.

4. Ver solución al problema 5 de Tercer Año pág. 30.

5. Multiplicando la primera ecuación por 2 y sumándole la segunda resulta $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 63$, es decir $(x+y)^2 + 2(x+y) = 63$. Poniendo $u = x+y$ queda $u^2 + 2u - 63 = 0$ que tiene raíces 7 y -9. Si $x+y = 7$ entonces $xy = 17 - x - y = 10$, por lo tanto $x = 2$ e $y = 5$ o $x = 5$ e $y = 2$, y se verifica que estos valores satisfacen ambas ecuaciones. Si $x + y = -9$ entonces $xy = 17 + 9 = 26$, y x e y son soluciones de la ecuación $t^2 - 9t + 26 = 0$, que no tiene soluciones reales pues $9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = -23 < 0$.

2.5. Prueba de Quinto Año

Los problemas 1, 2 y 5 de quinto año son los mismos que los 2, 3 y 5 de Cuarto Año, respectivamente (ver pág. 31). Los problema 3 y 5 se enuncian a continuación.

Problema 3. p, q, r, s y t son números primos diferentes tales que $p+q+r = 27$, $q + r + s = 22$ y $r + t + 3 = q$. ¿Cuál es el valor de cada uno de ellos?

Problema 4. En la sucesión 1, 1, 0, 1, -1, 0,... los dos primeros términos a_1 y a_2 son 1. El tercer término es la diferencia de los dos primeros, es decir $a_3 = a_1 - a_2 = 1 - 1 = 0$. El cuarto término es la suma de los dos que le preceden, es decir $a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 0 = 1$. Luego $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, y así sucesivamente. ¿Cuál es la suma de los primeros 2012 términos de la sucesión?

2.5.1. Soluciones

1. Ver la solución del problema 2 de Cuarto Año, pág. 32.

2. Ver la solución del problema 3 de Cuarto Año, pág. 32.

3. Como $q+r+s$ es par, uno de los tres sumandos es 2 (si los tres fuesen impares la suma sería impar). Si r o q fuese 2, entonces $p+q+r$ sería la suma de un par y dos impares, es decir que sería par, lo cual es imposible pues esa suma es 27. Por lo tanto debe ser $s=2$. Se sigue que $q+r=22-2=20$ y $p=27-20=7$. Como $q=r+t+3>r$, q y r para sumar 20 deben ser 17 y 3 o 13 y 7. La segunda posibilidad se descarta pues ya se tiene $p=7$. Entonces $q=17$, $r=3$ y de la tercera condición resulta $3+t+3=17$, es decir $t=11$. En resumen, la solución completa es $p=7$, $q=17$, $r=3$, $s=2$ y $t=11$.

4. Los primeros términos de la sucesión son

$$1,1,0,1,-1,0,-1,-1,0,-1,1,0,1,1,0,1,-1,0,\ldots$$

Se observa que $a_{13}=a_{14}=1$. Esto significa que a partir de a_{13} la sucesión comienza a repetirse, con un período de 12 términos. Como la suma de los primeros 12 términos es 0, y $2012=12\cdot 167+8$, la suma de los primeros $12\cdot 167=2004$ términos de la sucesión es 0, y la de los términos siguientes es $a_{2005}+a_{2006}+\cdots+a_{2012}=a_1+a_2+\cdots+a_8=0$. Por lo tanto la suma de los primeros 2012 términos de la sucesión es 0.

5. Ver la solución del problema 5 de Cuarto Año, pág. 32.

Capítulo 3

Prueba Final

La prueba final de la OJM 2012 se realizó en la Universidad Central de Venezuela, Caracas, el sábado 15 de junio. La prueba constó de cuatro problemas, cada uno de ellos con un valor de 7 puntos. Los participantes dispusieron de tres horas y media para resolverlos.

3.1. Prueba de Primer Año

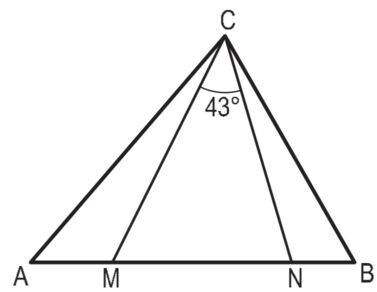
Problema 1. En una carrera de 50 metros, si Daniel le da 4 metros de ventaja a Gerardo, ambos llegan juntos a la meta. En una carrera de 200 metros, si Gerardo le da 15 metros de ventaja a Marcelo, ambos llegan juntos a la meta. ¿Cuántos metros de ventaja deberá darle Daniel a Marcelo para llegar juntos a la meta en una carrera de 1000 metros?

Nota: Los tres atletas corren a velocidades constantes.

Problema 2. Determine la cantidad de números enteros positivos menores que 1000, que cumplen las dos condiciones siguientes:

- El número es múltiplo de 3.
- La suma de sus dígitos es divisible entre 7.

Problema 3. En el triángulo ABC los puntos M y N en el lado AB son tales que $AN = AC$ y $BM = BC$. Sabiendo que $\angle MCN = 43°$, halle $\angle ACB$.



Problema 4. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A, a poner fichas en un tablero de 4×4. Cada jugador, en su turno, elige una casilla vacía, coloca allí una ficha y se anota un número de puntos igual al de fichas ubicadas en casillas vecinas a la que seleccionó. Cuando se llena el tablero cada jugador suma sus puntos, y A se suma tres puntos adicionales. El que obtenga más puntos gana, o empatan si quedan igualados. Muestre que uno de los dos jugadores tiene una estrategia que le permite ganar, juegue como juegue su adversario, y descríbala.

Nota: Dos casillas son vecinas si son diferentes pero tienen al menos un vértice en común.

3.1.1. Soluciones

1. Basta con usar regla de tres. Gerardo recorre 46 metros mientras Daniel recorre 50, luego mientras Daniel recorre 1000 Gerardo recorrerá $46 \times 1000/50 = 920$. Y como Marcelo recorre 185 metros mientras Gerardo recorre 200, mientras Gerardo recorre 920 Marcelo recorrerá $185 \times 920/200 = 851$. Así la respuesta es $1000 - 851 = 149$ metros.

2. La suma de los dígitos de un múltiplo de 3 es múltiplo de 3, por lo tanto la suma de los dígitos de los números buscados es múltiplo de 21. Por otra parte la suma de los dígitos de cualquier número menor que 1000 es a lo sumo $9 + 9 + 9 = 27$. Entonces en nuestro caso esta suma es 21. Para uno de los números buscados el menor dígito posible es cuando los otros dos dígitos son iguales a 9, y entonces el dígito buscado es 3. Con esta información los únicos dígitos posibles, escritos en ternas, son: $(3, 9, 9)$, $(4, 8, 9)$, $(5, 7, 9)$, $(5, 8, 8)$, $(6, 6, 9)$, $(6, 7, 8)$ y $(7, 7, 7)$. Para cada terna con tres dígitos diferentes hay 6 números que satisfacen lo pedido. Si la terna tiene dos números iguales, entonces habrá tres números diferentes y si los tres números de la terna son iguales, solo hay un número con las condiciones pedidas. En total hay $3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 1 = 28$ con las propiedades pedidas.

3. Como el $\triangle ACN$ es isósceles, $\angle ACN = \frac{1}{2}(180° - \hat{A}) = 90° - \frac{1}{2}\hat{A}$, y análogamente

$\angle MCB = 90° - \frac{1}{2}\hat{B}$, luego

$$\angle ACB = \angle ACN + \angle MCB - 43° = (90° - \frac{1}{2}\angle BAC) + (90° - \frac{1}{2}\angle ABC) - 43°$$
$$= (90° - \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}\angle ABC) + 47° = \frac{1}{2}\angle ACB + 47°,$$

de donde $\angle ACB = 94°$.

4. Sea r la mediana horizontal del tablero, es decir la línea horizontal que pasa por los puntos medios de los dos lados verticales y divide el tablero a la mitad. Entonces B tiene una estrategia ganadora que consiste en hacer siempre la jugada simétrica respecto a r de la que hizo A. Si A pone una ficha en la casilla X y B lo hace en la simétrica X', es claro que B anotará tantos puntos como A y posiblemente uno más, cuando X sea vecina de X'. Esto ocurrirá cuatro veces, cuando A coloque una ficha en una casilla que tenga un lado sobre r. Por lo tanto al final B sumará al menos cuatro puntos más que A, los cuales le permitirán ganar a pesar de los tres puntos de ventaja con los que cuenta A.

3.2. Prueba de Segundo Año

Los problemas 1, 2 y 4 de Segundo Año son los mismos que los problemas 1, 3 y 4 de Primer Año (ver pág. 34).

Problema 3. Digamos que un conjunto de enteros positivos menores que 2013 es *interesante* si todos sus elementos son compuestos y coprimos dos a dos. Por ejemplo el conjunto $\{8, 45, 77\}$ es interesante. Escriba un conjunto interesante con la mayor cantidad posible de elementos.

Nota: dos enteros positivos son *coprimos* si su máximo común divisor es 1.

3.2.1. Soluciones

Para las soluciones de los problemas 1, 2 y 4 vea las de los problemas 1, 3 y 4 de Primer Año, pág. 35.

3. Para cada elemento n de un conjunto interesante sea $p(n)$ su menor factor primo. Entonces $p(n)^2 \leq n \leq 2013$ y por tanto $p(n) \leq 43$ (pues $47^2 = 2209 > 2013$). Como elementos diferentes deben tener sus $p(n)$ diferentes (por ser coprimos), es claro que un conjunto interesante tiene a lo sumo tantos elementos como primos hay del 2 al 43, es decir 14. El conjunto

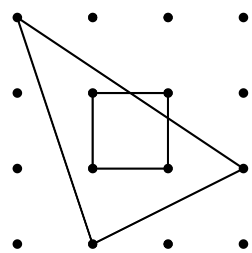
$$\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2\}$$

es interesante y tiene 14 elementos, la mayor cantidad posible.

3.3. Prueba de Tercer Año

Los problemas 1 y 4 de Tercer Año son los mismos que los problemas 3 y 4 de Segundo Año (ver pág. 36).

Problema 2. Los puntos de la figura son los vértices de una cuadrícula, de modo que la distancia horizontal o vertical entre dos puntos consecutivos es 1 cm. ¿Cuál es el área del pentágono que resulta al intersectar el cuadrado con el triángulo?

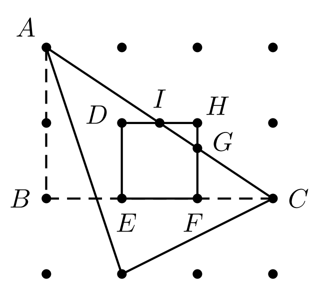


Problema 3. Un farmaceuta desea preparar 24 cucharadas de una medicina que contenga las sustancias A, B y C por partes iguales. Dispone de un recipiente donde hay A y C mezclados por partes iguales; otro en el que hay A y B mezclados en la proporción 2 : 3 y un tercero en el que hay B y C mezclados en la proporción 1 : 2. ¿Cuántas cucharadas de cada recipiente debe usar para obtener la mezcla deseada?

Nota: las cantidades X e Y están en la proporción $a : b$ si $\dfrac{X}{Y} = \dfrac{a}{b}$.

3.3.1. Soluciones

2. (ver la figura siguiente) $\triangle ABC \sim \triangle GFC \sim \triangle GHI$ Como $\triangle GFC \sim \triangle ABC$ se tiene $GF/FC = AB/BC = 2/3$, de donde $GF = 2/3$. Por tanto $GH = 1-2/3 = 1/3$. Como $\triangle GHI \sim \triangle GFC$ se tiene $HI/FC = GH/GF = (1/3)/(2/3) = 1/2$, de donde $HI = 1/2$. Es decir que el triángulo rectángulo GHI tiene catetos que miden $1/3$ cm y $1/2$ cm, por lo tanto su área es $1/12$ cm^2. Al restarla del área del cuadrado $DEFH$ (que es 1 cm^2) resulta que el área del pentágono $DEFGI$ es $11/12$ cm^2.



3. Si x, y, z son las cucharadas necesarias de cada mezcla, como se necesitan 8 cucharadas de cada sustancia se tiene:

$\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}y = 8$, (1)
$\frac{3}{5}y + \frac{1}{3}z = 8$, (2)
$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}z = 8$. (3)

Restando (1) de (3) resulta $\frac{2}{5}y = \frac{2}{3}z$, o $y = \frac{5}{3}z$. Sustituyendo en (2) queda $z + \frac{1}{3}z = 8$, de donde $z = 6$. Sustituyendo en (3) queda $\frac{1}{2}x + 4 = 8$, de donde $x = 8$. Sustituyendo en (1) queda $4 + \frac{2}{5}y = 8$, de donde $y = 10$.

Solución alternativa: En 5 cucharadas de AB hay 2 de A y 3 de B. En 3 cucharadas de BC hay 1 de B y 2 de C. Luego si se mezclan 5 cucharadas de AB y 3 de BC se tendrán 2 de A, 4 de B y 2 de C. Agregando 4 cucharadas de AC resultarán 4 de A, 4 de B y 4 de C. Doblando las cantidades, es decir tomando 10 cucharadas de AB, 6 cucharadas de BC y 8 de AC se consigue una mezcla de 24 cucharadas con igual cantidad de cada sustancia.

3.4. Prueba de Cuarto Año

El problema 2 de Cuarto Año es el mismos que el problema 2 de Tercer Año (ver pág. 37).

Problema 1. El producto de todos los divisores de un número natural n (incluidos 1 y el mismo n) es igual a n^4.

(a) ¿Cuántos divisores tiene n?

(b) ¿Cuál es el menor valor posible de n?

Problema 3. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para todo x e y reales se cumple que

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy.$$

Problema 4. Una pulga se halla en el suelo, al pie de una escalera de 30 escalones. La pulga sólo puede dar saltos de 3 escalones hacia arriba o de 4 escalones hacia abajo. ¿De cuántas maneras puede subir hasta el escalón 22 en el menor número posible de saltos?

3.4.1. Soluciones

1. (a) Si los divisores de n son $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, entonces n/d_k, n/d_{k-1},..., n/d_1 son también divisores y están escritos en orden creciente, de donde se sigue que $d_i = n/d_{k+1-i}$ y por tanto $d_i d_{k+1-i} = n$. Entonces

$$(d_1 d_2 \cdots d_k)^2 = (d_1 d_k)(d_2 d_{k-1}) \cdots (d_k d_1) = n^k.$$

Entonces, si $d_1 d_2 \cdots d_k = n^4$ resulta $n^8 = n^k$ y $k = 8$.

Alternativamente,

$$n^4 = \frac{n}{d_k} \cdots \frac{n}{d_1} = \frac{n^k}{d_1 d_2 \cdots d_k} = \frac{n^k}{n^4} = n^{k-4},$$

de donde $4 = k - 4$ y $k = 8$.

(b) Los números con 8 divisores son los de la forma p^7, pq^3 y pqr, con p, q, r primos. Como estamos buscando el menor, los candidatos son $2^7 = 128$, $3 \cdot 2^3 = 24$ y $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, de los cuales el segundo (24) es la solución. Alternativamente, se pueden examinar sucesivamente los números 1, 2, 3,... t comprobar que 24 es el primero que tiene 8 divisores.

2. Vea la solución del problema 2 de Tercer Año, pág. 37.

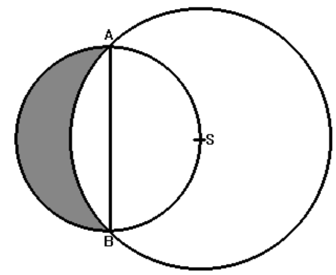
3. Poniendo $y = 0$ se tiene $f(x)f(0) = f(x)$, o sea $f(x)(f(0) - 1) = 0$. Pero f no puede ser idénticamente nula, ya que $f(1)f(1) - f(1 + 1) = 1 \neq 0$, luego $f(0) = 1$. Entonces $f(1)f(-1) = f(0) - 1 = 0$, de donde $f(1) = 0$ o $f(-1) = 0$. Si $f(1) = 0$ entonces de $f(x)f(1) = f(x+1)+x$ resulta $f(x+1) = -x$ y por tanto $f(x) = 1-x$. Si $f(1) = 0$ entonces de $f(x)f(-1) = f(x-1)-x$ resulta $f(x-1) = x$ y por tanto $f(x) = 1 + x$. Tanto $f(x) = 1 - x$ como $f(x) = 1 + x$ verifican la condición del enunciado y por lo tanto son las dos únicas soluciones.

4. Ascendiendo sólo llega a los escalones múltiplos de 3. Si desciende una vez sólo llega a los escalones de la forma $3n - 4 = 3(n - 2) + 2$. Así nunca llegará al 22 pues 22 deja resto 1 al dividirlo entre 3. Usando dos descensos sí puede llegar, si asciende 10 veces: $10 \times 3 - 2 \times 4 = 22$. Es claro que si usa más descensos debe aumentar también el número de ascensos y por lo tanto el número total de pasos. Ahora se trata de contar las posibles ubicaciones de los dos saltos descendentes entre los 12 saltos. Como ni el primer salto ni el segundo pueden ser descendentes, los dos descendentes se ubican entre los 10 últimos. Hay $\binom{10}{2} = 45$ maneras de escogerlos, pero como el tercer y cuarto salto no pueden ser ambos descendentes quedan $45 - 1 = 44$ posibilidades. Todas ellas son realizables, ya que hacia arriba se llega a lo sumo al escalón $10 \cdot 3 = 30$, el primer salto descendente está precedido de al menos dos ascendentes (y $3 + 3 > 4$) y el segundo salto descendente está precedido de al menos tres ascendentes (y $3 + 3 + 3 - 4 - 4 \geq 1$). Es decir que la respuesta es $\binom{10}{2} - 1 = 44$.

3.5. Prueba de Quinto Año

Los problemas 1, 3 y 4 de Quinto Año son los mismos que los problemas 1, 3 y 4 de Cuarto Año, respectivamente (ver pág. 38).

Problema 2. Dos circunferencias se construyen como se muestra en la figura. El segmento AB es el diámetro de la circunferencia más pequeña. El centro S de la circunferencia mayor se encuentra en la circunferencia más pequeña. El radio de la circunferencia mayor es R. Calcule el área de la región sombreada en función de R.



3.5.1. Soluciones

2. Como $\angle ASB$ es recto, por Pitágoras $AB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ y por tanto el radio r de la circunferencia pequeña cumple $R^2 = 2r^2$. Entonces el área del círculo grande es el doble de la del pequeño, y el área del sector SAB es igual a la de medio. Entonces el área de la región sombreada es igual a la del triángulo SAB, es decir $R^2/2$.

Capítulo 4

Olimpiada de Mayo

La Olimpiada de Mayo es una competencia matemática internacional coordinada por la Olimpiada Matemática Argentina (OMA). Consiste en una prueba escrita de 3 horas de duración y consta de dos niveles: el primer nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 13 años hasta el 31 de diciembre del año anterior a la prueba, y el segundo nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 15 años hasta el 31 de Diciembre del año anterior a la prueba. Cada país participante envía las diez mejores pruebas de cada nivel a la Argentina para ser puntuadas junto con las de los demás países y premiadas por OMA.

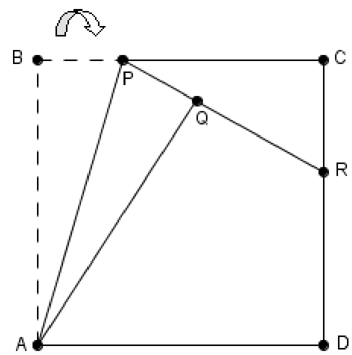
4.1. Problemas del Primer Nivel

Problema 1. Hallar la cantidad de formas de escribir el número 2013 como suma de dos enteros mayores o iguales que cero de modo que al sumar no haya **ningún** acarreo.

Aclaración: En la suma $2008 + 5 = 2013$ hay acarreo de las unidades a las decenas.

Problema 2. Elisa suma los dígitos de su año de nacimiento y observa que el resultado coincide con los dos últimos dígitos del año en que nació su abuelo. Más aún, los dos últimos dígitos del año en que ella nació, son precisamente la edad actual de su abuelo. Hallar el año en el que nació Elisa y el año en el que nació su abuelo.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrado de papel de lado 10 y P un punto en el lado BC. Al doblar el papel a lo largo de la recta AP, el punto B determina el punto Q, como se ve en la figura. La recta PQ corta al lado CD en R. Calcular el perímetro del triángulo PCR.



Problema 4. Pablo escribió 5 números en una hoja y luego escribió los números $6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11$ y 12 en otra hoja que le dio a Sofía, indicándole que esos números son las sumas posibles de dos de los números que él tiene escondidos. Decidir si con esta información Sofía puede determinar los cinco números que escribió Pablo.

Problema 5. En la pizarra está dibujado un cuadrado de 8×8 dividido en 64 cuadraditos de 1×1 mediante líneas paralelas a los lados.

Gustavo borra algunos segmentos de longitud 1 de modo que a cada cuadradito de 1×1 le borra 0, 1 ó 2 lados.

Gustavo afirma que borró 6 segmentos de longitud 1 del borde del cuadrado de 8×8 y que la cantidad de cuadraditos de 1×1 que tienen exactamente 1 lado borrado es igual a 5. Decidir si lo que dijo Gustavo puede ser cierto.

4.2. Soluciones del Primer Nivel

1. En cada columna indicamos los posibles dígitos para suma sin acarreos.

2	0	1	3
0 2	0 0	0 1	0 3
1 1		1 0	1 2
2 0			2 1
			3 0

Son $\dfrac{3 \cdot 2 \cdot 4}{2} = 12$ maneras.

2. La edad del abuelo de Elisa no puede superar 99 años porque está expresada con un número de dos dígitos. Entonces podemos suponer que el año de nacimiento del abuelo empieza por 19 y el de Elisa por 19 o por 20. Pero si Elisa hubiera nacido en el año $20ab$, con $ab < 13$, el abuelo tendría a lo sumo 13 años, lo que no es posible.

Luego ambos años comienzan por 19. Sea $19ab$ el año en que nació Elisa. Entonces su abuelo debe haber nacido en el año $1900+1+9+a+b$ y la edad del abuelo es $2013-1900-1-9-a-b = 103-a-b$.

Entonces se tiene que $ab = 103-a-b$, esto es, $10a+b = 103-a-b$ ó $2b+11a = 103$, con a, b enteros entre el 0 y el 9. Como $2b \leq 18$ se tiene que $11a \geq 85$. Por tanto a vale 8 ó 9.

Para $a = 8$ se obtiene $2b = 15$, que no es posible.

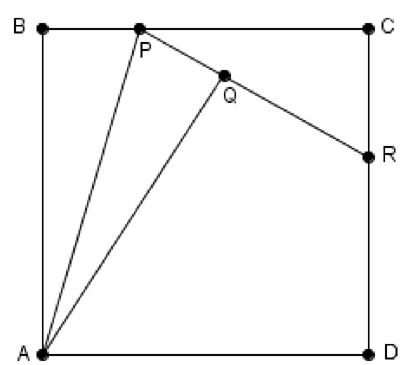
Y para $a = 9$ se obtiene $b = 2$.

Se concluye que Elisa nace en 1992, tiene actualmente 21 años y su abuelo nace en 1921 y tiene actualmente 92 años.

3. Los triángulos AQP y ABP son congruentes, de donde $AQ = AB = AD$ y $\angle AQR = \angle AQP = 90°$. Se tiene entonces que los triángulos rectángulos AQR y ADR también son congruentes, pues comparten la hipotenusa AR y $AQ = AD$, de donde $QR = RD$.

En conclusión,

$$\begin{aligned}\text{Perímetro } PCR &= CP+CR+RP = PC+CR+RQ+QP \\ &= CP+CR+RD+PB = CP+PB+CR+RD \\ &= 10+10 = 20.\end{aligned}$$



4. Sean a, b, c, d y e los números que escribió Pablo en la primera hoja. Supongamos que $a < b < c < d < e$. Estos cinco números determinan diez sumas: $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+c$, $b+d$, $b+e$, $c+d$, $c+e$, $d+e$. La suma total de esas sumas es: $4(a+b+c+d+e) = 6+7+8+8+9+9+10+10+11+12 = 90$ de donde $a+b+c+d+e = 90/4 = 22,5$. Además $a+b$ y $a+c$ son las sumas más pequeñas mientras que $c+e$ y $d+e$ son las mayores. Así que tenemos que $a+b=6$, $a+c=7$, $c+e=11$, $d+e=12$.

Se deduce que $c=22,5-6-12=4,5$; $a=7-4,5=2,5$; $b=6-2,5=3,5$; $e=11-4,5=6,5$ y finalmente $d=12-6,5=5,5$.

5. Sean s_2, s_3, s_4 las cantidades de cuadraditos de 1×1 a los que Gustavo les borró 2, 1 ó 0 lados, respectivamente. Se tiene entonces que $s_3=5$. Notemos que los cuadraditos de s_i tienen i lados no borrados, luego si hay x segmentos no borrados en el borde e y en el interior,

$2s_2+3s_3+4s_4=x+2y$

$2s_2+3\cdot 5+4s_4=(32-6)+2y$,

lo que es absurdo, ya que el lado izquierdo es impar y el derecho, par.

Solución alternativa

Trazamos caminos en el tablero de acuerdo con las siguientes reglas. El camino pasa de una casilla a otra sólo si el lado que las separa ha sido borrado. Se puede atravesar una sola vez cada lado borrado.

Un camino comienza fuera del tablero, entrando por un segmento borrado del borde, o comienza en un cuadradito con exactamente un lado borrado, pasa por cuadraditos de dos lados borrados y termina fuera del tablero luego de pasar por un segmento borrado del borde, o termina en un cuadradito con exactamente un lado borrado.

Estas normas, determinan la forma de los caminos (una vez que se llega a un cuadradito, hay una sola forma de salir de él). Al finalizar un camino, se comienza con otro y así, sucesivamente, hasta agotar todos los segmentos borrados del borde y todos los cuadraditos con exactamente un lado borrado.

Tendremos entonces, tres tipos de caminos:

- Primer tipo: desde un segmento borrado del borde hasta un cuadradito con exactamente un lado borrado.
- Segundo tipo: desde un segmento borrado del borde hasta otro segmento borrado del borde.
- Tercer tipo: desde un cuadradito con exactamente un lado borrado hasta otro cuadradito con exactamente un lado borrado.

Llamamos x, y y z a la cantidad de caminos de cada tipo. A cada camino del primer tipo le corresponde un segmento borrado del borde y a cada uno del segundo, dos segmentos borrados del borde, luego la cantidad de segmentos borrados del borde es $(x+2y)$.

A cada camino del primer tipo le corresponde un cuadradito con exactamente un lado borrado y a cada uno del tercero, dos cuadraditos con exactamente un lado borrado, de modo que el número total de cuadraditos con exactamente un lado borrado es $(x+2z)$.

Los números: $(x + 2y)$ y $(x + 2z)$ tienen la misma paridad, y por lo tanto es imposible lograr que $x + 2y = 6yx + 2z = 5$.

Este razonamiento nos permite afirmar que Gustavo mintió.

4.3. Problemas del Segundo Nivel

Problema 1. Sofía sumó los números de las páginas de un libro empezando por el 1 en la primera página y obtuvo 2013. Pablo vio como hizo la suma y se dio cuenta que Sofía se saltó una página. ¿Cuántas páginas tiene el libro y qué número de página se saltó?

Problema 2. Se dispone de una regla sin números y de un *trisector* que marca en cualquier segmento los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales. Construir el punto medio de un segmento dado utilizando exclusivamente estas dos herramientas.

Problema 3. Se marcan varios puntos distintos en el plano, y se trazan todos los segmentos determinados por esos puntos. Una recta r no pasa por ninguno de los puntos marcados y corta a exactamente 60 de los segmentos que hemos trazado. ¿Cuántos segmentos no están cortados por r? Dar todas las posibilidades.

Problema 4. ¿Es posible escribir 100 números impares en una fila de tal forma que la suma de cada 5 números adyacentes sea un cuadrado perfecto y que la suma de cada 9 números adyacentes también sea un cuadrado perfecto?

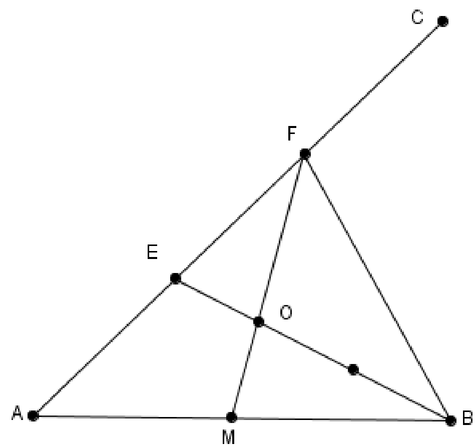
Problema 5. Se tienen 600 tarjetas, 200 de ellas tienen escrito el número 5, 200 tienen escrito el número 2 y las otras 200 tienen escrito el número 1. Usando estas tarjetas se quieren formar grupos de tal forma que en cada grupo la suma de los números sea 9. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se pueden formar?

4.4. Soluciones del Segundo Nivel

1. Sumamos los números enteros positivos hasta que la suma sea, por primera vez, mayor que 2013.

Usamos para simplificar cuentas que $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Así obtenemos que $\dfrac{62 \cdot 63}{2} = 1953 \leq 2013 < \dfrac{63 \cdot 64}{2} = 2016$. Luego, la suma que debió obtener Sofía es 2016, y la página que se saltó es la $2016 - 2013 = 3$.

2. Sea AB un segmento dado. Elegimos C fuera de AB y trisecamos AC. Sean E y F los puntos de la trisección, con E el más más próximo a A. En el triángulo ABF, BE es mediana. Trisecamos EB y sea O el punto más próximo a E, es decir que $OE = \dfrac{1}{3}EB$. Entonces la recta FO es mediana del triángulo ABF, pues las medianas se cortan en relación $2:1$. Luego FO corta a AB en su punto medio M.



3. Sean A y B dos de los puntos marcados. La recta r corta al segmento AB si y sólo si A y B están a lados distintos de r. Sea a la cantidad de puntos marcados a uno de los lados de r y b la cantidad del otro lado (no hay puntos marcados en r). Entonces hay exactamente ab pares de puntos A, B con A y B en lados distintos de r, lo que implica que r corta exactamente ab de los segmentos trazados. Además, r no corta a ningún segmento determinado por dos puntos a un mismo lado de r. Entonces el número de segmentos que r no corta es $\frac{1}{2}a(a-1) + \frac{1}{2}b(b-1)$.

Dado que r corta exactamente a 60 segmentos, lo anterior nos lleva a que $ab = 60$. Luego (a, b) es un par de divisores complementarios de 60. Hay 6 de tales pares: $\{1, 60\}, \{2, 30\}, \{3, 20\}, \{4, 15\}, \{5, 12\}, \{6, 10\}$. Los respectivos valores de $\frac{1}{2}a(a-1) + \frac{1}{2}b(b-1)$ son 1770, 436, 193, 111, 76, 60. Es claro que las 6 alternativas son posibles.

4. Primero probaremos el siguiente resultado:

Lema: Si n es un número impar entonces $n^2 - 1$ es múltiplo de 8.

Prueba: Como n es impar, entonces tiene la forma $n = 2k - 1$. Con esto tenemos que $n^2 - 1 = 4k(k-1)$. Ahora, como k y $k-1$ son consecutivos, alguno de ellos es par, luego $k(k-1)$ es par. De esto notamos que $n^2 - 1$ es múltiplo de 8.

Vamos a demostrar que no es posible lo pedido. Supongamos que sea posible. Escojamos 45 números que estén en posiciones consecutivas en la fila (esto significa, que estén juntos). Designemos con S la suma de estos 45 números. Sean S_1 la suma de los cinco primeros, S_2 la suma de los cinco siguientes, y así sucesivamente hasta S_9la suma de los cinco últimos. Notemos que cada S_i es un cuadrado perfecto, y como es la suma de cinco impares, entonces también es impar. Luego, por el lema, tenemos que $S_i - 1$ es múltiplo de 8. Por otro lado, como $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_9$, entonces

$S - 9 = (S_1 - 1) + (S_2 - 1) + \ldots + (S_9 - 1)$ es un múltiplo de 8. (1)

Sea R_1 la suma de los 9 primeros números (seguimos considerando los 45 números escogidos), R_2 la suma de los 9 siguientes, y así sucesivamente, R_5 la suma de los 9 últimos. Análogamente, como hicimos antes, tenemos que cada R_j es un cuadrado perfecto impar, luego

$S - 5 = (R_1 - 1) + (R_2 - 1) + \ldots + (R_5 - 1)$ es un múltiplo de 8. (2)

De (1) y (2) tenemos que $(S - 5) - (S - 9) = 4$ es un múltiplo de 8, lo cual no es cierto. Por lo tanto no es posible encontrar tales números.

5. Comencemos notando que no puede haber dos 5 en un mismo grupo, y si un 5 es usado en un grupo entonces tenemos las siguientes posibilidades para formar el grupo: (5; 2; 2), (5; 2; 1; 1) o (5; 1; 1; 1; 1) donde no hemos considerado el orden de los elementos en cada grupo porque eso no importa. Supongamos que las tarjetas que tienen el número 5 fueron usados para formar lo siguiente:

a grupos de la forma (5; 2; 2).

b grupos de la forma (5; 2; 1; 1).

c grupos de la forma (5; 1; 1; 1; 1).

Entonces la cantidad de tarjetas con el número 5 que se usaron es $a + b + c$. Como hay 200 tarjetas con el número 2, entonces $2a + b \leq 200$. Análogamente, viendo la cantidad de 1, concluimos que $2b - 4c \leq 200$. La primera desigualdad es $2a + b \leq 200$ y la segunda equivale a $b - 2c \leq 100$. Sumando estas dos desigualdades obtenemos:

$$2(a + b + c) \leq 300 \Leftrightarrow a + b + c \leq 150.$$

Luego, se usó como máximo 150 tarjetas con el número 5, con lo cual la suma de todos los números de los grupos formados es como máximo:

$$150 \times 5 + 200 \times 2 + 200 \times 1 = 1350;$$

y como cada grupo tiene suma 9, hay como máximo $1350 \div 9 = 150$ grupos.

Un ejemplo con 150 grupos es el siguiente:

100 grupos (5; 2; 2)

50 grupos (5; 1; 1; 1; 1).

Capítulo 5

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe tuvo lugar en Managua, Nicaragua, desde el 22 hasta el 30 de junio de 2013. Participaron trece países: Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela.

Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Rafael Aznar (Los Arcos, Distrito Capital), Juan Cramer (San José Maristas, Edo. Aragua) y José Guevara (Bella Vista, Edo. Aragua). El Jefe de la delegación fue José Heber Nieto y el tutor Darío Durán Cepeda. Rafael Aznar obtuvo medalla de bronce y Juan Cramer mención honorífica.

5.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Juan escribe la lista de parejas $(n, 3^n)$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$ en un pizarrón. A medida que va escribiendo la lista, subraya las parejas $(n, 3^n)$ cuando n y 3^n tienen la misma cifra de las unidades. De las parejas subrayadas, ¿cuál ocupa la posición 2013?

Problema 2. Alrededor de una mesa redonda están sentadas en sentido horario las personas P_1, P_2,..., P_{2013}. Cada una tiene cierta cantidad de monedas (posiblemente ninguna); entre todas tienen 10000 monedas. Comenzando por P_1 y prosiguiendo en sentido horario, cada persona en su turno hace lo siguiente:

- Si tiene un número par de monedas, se las entrega todas a su vecino de la izquierda.

- Si en cambio tiene un número impar de monedas, le entrega a su vecino de la izquierda un número impar de monedas (al menos una y como máximo todas las que tiene), y conserva el resto.

Pruebe que, repitiendo este procedimiento, necesariamente llegará un momento en que todas las monedas estén en poder de una misma persona.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y M el punto medio del lado AB. La circunferencia que pasa por D y es tangente a AB en A corta al segmento DM en E. La circunferencia que pasa por C y es tangente a AB en B corta al segmento CM en F. Suponga que las rectas AF y BE se cortan en un punto que pertenece a la mediatriz del lado AB. Demuestre que A, E y C son colineales si y sólo si B, F y D son colineales.

Segundo Día

Problema 4. Ana y Beatriz alternan turnos en un juego que se inicia con un cuadrado de lado 1 dibujado en un tablero infinito. Cada jugada consiste en dibujar un cuadrado que no se superponga con la figura ya dibujada, de manera que uno de sus lados sea un lado (completo) del rectángulo que está dibujado. Gana el juego aquella persona que logre completar una figura cuya área sea múltiplo de 5. Si Ana realiza la primera jugada, ¿existe estrategia ganadora para alguna jugadora?

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea Γ su circuncírculo. La bisectriz del ángulo A interseca a BC en D, a Γ en K (distinto de A), y a la tangente a Γ por B en X. Demuestre que K es el punto medio de AX si y sólo si $\frac{AD}{DC} = \sqrt{2}$.

Problema 6. Determine todas las parejas de polinomios no constantes $p(x)$ y $q(x)$, cada uno con coeficiente principal 1, grado n y n raíces enteras no negativas, tales que $p(x) - q(x) = 1$.

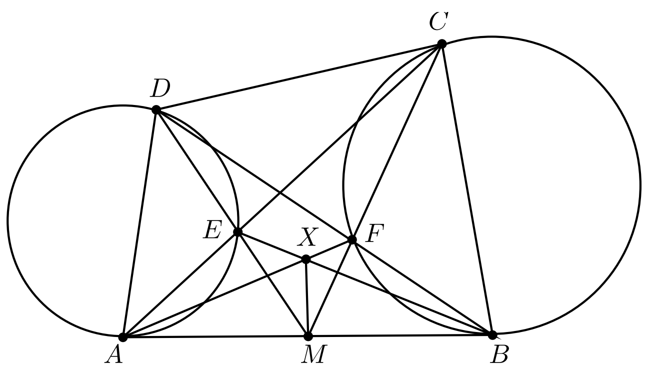
5.2. Soluciones

1. Las cifras de las unidades de n forman una sucesión periódica de período 10, mientras que las cifras de las unidades de 3^n forman una sucesión periódica de período 4 (se repiten 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1,...). Luego la lista tiene período $\mathrm{mcm}(10, 4) = 20$. Examinando las parejas $(n, 3^n)$ para $n = 1, 2, \ldots, 20$ se observa que las subrayadas son $(7, 3^7)$ y $(13, 3^{13})$. Luego en la decena k (desde $10(k-1)$ hasta $10(k-1)+9$) hay una pareja subrayada, que termina en 7 o en 3 según que k sea impar o par. La que ocupa el lugar 2013 es entonces 20127.

2. Si cada persona tiene un número par de monedas la conclusión es inmediata, ya que P_1 le pasará todas las monedas que tiene a P_2, ésta a P_3 y así sucesivamente, hasta que P_{2012} le pase todas las que tenga a P_{2013}, quien tendrá en ese momento las 10000 monedas.

En el caso general, luego de que P_1, P_2,..., P_{2012} han jugado una vez, cada una de ellas queda con un número par de monedas. Pero como el número total de monedas (10000) es par, P_{2013} también debe tener un número par de monedas. Luego estamos en el caso del párrafo anterior y a lo sumo en una ronda más todas las monedas estarán en poder de una misma persona.

3. Sea S_1 la circunferencia que pasa por D y es tangente a AB en A. Sea S_2 la circunferencia que pasa por C y es tangente a AB en B. Sea X la intersección de AF con BE. Como X pertenece a la mediatriz de AB, se tiene que $XA = XB$ y $\angle FAB = \angle EBA$. Por potencia se tiene que $ME \cdot MD = MA^2 = MB^2 = MF \cdot MC$ y por lo tanto $EDCF$ es cíclico. Además, como $MA^2 = MF \cdot MC$, MA es tangente en A al circuncírculo del triángulo AFC. De esto se sigue que $\angle MAF = \angle MCA$. Análogamente se prueba que $\angle MBE = \angle MDB$, y por lo tanto $\angle MCA = \angle MAF = \angle MBE = \angle MDB$.



Supongamos ahora que A, E y C son colineales. Entonces $\angle MCE = \angle MCA$ Como $EDCF$ es cíclico, $\angle MDF = \angle MCE = \angle MCA$ y por lo visto anteriormente $\angle MDF = \angle MCA = \angle MDB$, por lo cual B, F y D son colineales.

El recíproco es completamente análogo.

4. No hay estrategia ganadora para ninguna jugadora. Supongamos que en determinado momento la figura realizada es un rectángulo de $a \times b$, donde ni a ni b ni $a + b$ son múltiplos de 5. La jugadora X que tenga el turno puede convertirlo en un rectángulo de $(a + b) \times b$ o en uno de $a \times (a + b)$. Ninguna de estas jugadas gana de inmediato, pero al menos una de ellas evita perder en el siguiente turno. En efecto, si $5 \mid 2a + b$ y $5 \mid a + 2b$, entonces $5 \mid 3(a + b)$, y por lo tanto $5 \mid a + b$, contra lo supuesto. Así, si $5 \nmid a + 2b$, X evita perder formando un rectángulo de $(a + b) \times b$; en caso contrario se tendrá que $5 \nmid 2a + b$ y X evita perder formando un rectángulo de $a \times (a + b)$. Como cada jugadora puede realizar una jugada que evita perder en el siguiente turno, ninguna de las dos tiene estrategia ganadora.

Solución alternativa: Si en determinado momento la figura realizada es un rectángulo de $a \times b$, donde ni a ni b son múltiplos de 5, la jugadora que tenga el turno puede convertirlo en un rectángulo de $(a+b) \times b$ o en uno de $a \times (a+b)$. Si $5 \mid a+b$ gana, de lo contrario debe elegir una jugada que le evite perder en el siguiente turno. Las primeras jugadas, si ninguna quiere perder, son únicas:

$$(1,1) \to (1,2) \to (1,3) \to (4,3) \to (4,7) \to (11,7) \to (11,18) \to (29,18) \to \cdots$$

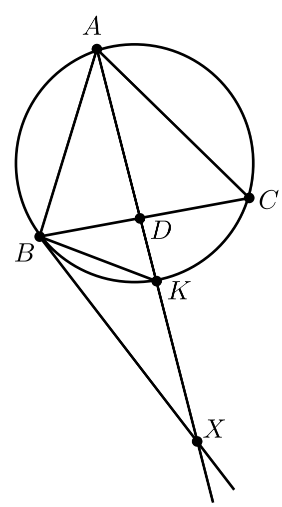
Como sólo nos interesa si a o b son múltiplos de 5, podemos trabajar módulo 5 y obtener

$$(1,1) \to (1,2) \to (1,3) \to (4,3) \to (4,2) \to (1,2) \to (1,3) \to (4,3) \to \cdots$$

Vemos que a partir de la segunda jugada se repite el ciclo $(1,2) \to (1,3) \to (4,3) \to (4,2)$, por lo tanto esta secuencia se repite indefinidamente y no puede haber estrategia ganadora.

5. Por potencia se tiene $AD \cdot DK = BD \cdot DC$, de donde $\frac{BD}{DK} = \frac{AD}{DC}$. Además $\angle XBK = \angle BAK$ (por ser $\angle XBK$ semiinscripto), $\angle BAK = \angle KAC$ (por ser AK bisectriz) y $\angle KAC = \angle KBC$ (por ángullos inscriptos), luego $\angle XBK = \angle BAK = \angle KAC = \angle KBC$ y BK es bisectriz del $\triangle BXD$. Entonces por el teorema de la bisectriz $\frac{BD}{DK} = \frac{XB}{XK}$. Comparando con la proporción obtenida anteriormente resulta

$$\frac{XB}{XK} = \frac{AD}{DC}.$$



Ahora, si K es punto medio de AX entonces por potencia $XB^2 = XK \cdot XA = 2XK^2$ y $\frac{AD}{DC} = \frac{XB}{XK} = \sqrt{2}$.

Recíprocamente si $\frac{AD}{DC} = \sqrt{2}$ entonces $\frac{XB}{XK} = \sqrt{2}$, de donde $XK \cdot XA = XB^2 = 2XK^2$ y $XA = 2XK$, es decir que K es el punto medio de AX.

6. Sean $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, $q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$, con $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Entonces $p(b_1) = p(b_1) - q(b_1) = 1$, es decir $(b_1 - a_1)(b_1 - a_2) \cdots (b_1 - a_n) = 1$, de donde $|b_1 - a_i| = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $a_i \in \{b_1 - 1, b_1 + 1\}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y de manera análoga $b_i \in \{a_1 - 1, a_1 + 1\}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces p y q tienen a lo sumo dos raíces distintas cada uno. Pero no pueden tener ambos dos raíces distintas, ya que si por ejemplo p tiene las raíces $b_1 - 1$ y $b_1 + 1$, entonces las raíces de q deben estar a distancia 1 de ambas, y q sólo podrá tener como raíz a b_1. Hay entonces dos casos a considerar:

Caso 1: $p(x) = (x - (b-1))^t (x - (b+1))^r$, $q(x) = (x - b)^n$, con $t, r \geq 0$ y $t + r = n$. Entonces

$$(x - (b - 1))^t (x - (b + 1))^r = (x - b)^n + 1.$$

Si $r > 0$ entonces poniendo $x = b + 1$ queda $0 = 2$, absurdo. Luego $r = 0$, $t = n$ y $(x - (b - 1))^n = (x - b)^n + 1$. Si $n = 1$ esto se cumple y tenemos las soluciones $p(x) = x - b + 1$, $q(x) = x - b$, para cualquier $b \geq 1$.

Si $n > 1$, calculando el coeficiente de x^{n-1} en ambos miembros resulta que $(b - 1)n = nb$, de donde $n = 0$, absurdo.

Caso 2: $p(x) = (x - b)^n$, $q(x) = (x - (b-1))^t (x - (b+1))^r$, con $t, r \geq 0$ y $t + r = n$. Entonces

$$(x - b)^n = (x - (b - 1))^t (x - (b + 1))^r + 1.$$

Si $n = 1$ se obtienen las mismas soluciones del caso anterior.

Si $n > 1$, calculando el coeficiente de x^{n-1} en ambos miembros resulta que $nb = t(b - 1) + r(b + 1)$, de donde $t = r$. Ahora, poniendo $x = b + 2$ queda $2^n = 3^t + 1$, o $4^t = 3^t + 1$, que claramente se cumple sólo si $t = 1$. Y para $t = r = 1$ se cumple que $(x - b)^2 = (x - b + 1)(x - b - 1) + 1$, así que tenemos las soluciones $p(x) = (x - b)^2$, $q(x) = (x - b + 1)(x - b - 1)$, para cualquier $b \geq 1$.

En resumen, las soluciones son $p(x) = x - b + 1$, $q(x) = x - b$, para cualquier $b \geq 1$ y $p(x) = (x - b)^2$, $q(x) = (x - b + 1)(x - b - 1)$, para cualquier $b \geq 1$.

Capítulo 6

Olimpiada Iberoamericana de Matemática

La XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemática tuvo lugar en Panamá, del 20 al 28 de octubre de 2013. En la misma participaron veinte países: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, Uruguay y Venezuela. Panamá ganó la Copa Puerto Rico. Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Rubmary Rojas (San Vicente de Paúl, Barquisimeto), Rafael Aznar (Los Arcos, Distrito Capital), Juan Cramer (San José Maristas, Edo. Aragua) y José Guevara (Bella Vista, Edo. Aragua). La jefa de la delegación fue Sofía Taylor y la tutora Estefanía Ordaz.

En esta Olimpiada Rubmary Rojas obtuvo una Medalla de Bronce y Rafael Aznar una Mención Honorífica por su solución al problema 4.

6.1. Problemas

(Primer Día)

Problema 1. Un conjunto S de enteros positivos distintos se llama *canalero* si para cualesquiera tres números a, b, $c \in S$, todos diferentes, se cumple que a divide a bc, b divide a ca y c divide a ab.

a) Demostrar que para cualquier conjunto finito de enteros positivos $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ existen infinitos enteros positivos k, tales que el conjunto $\{kc_1, kc_2, \dots, kc_n\}$ es canalero.

b) Demostrar que para cualquier entero $n \geq 3$ existe un conjunto canalero que tiene exactamente n elementos y ningún entero mayor que 1 divide a todos sus elementos.

Problema 2. Sean X, Y los extremos de un diámetro de una circunferencia Γ y N el punto medio de uno de los arcos XY de Γ. Sean A y B dos puntos en el segmento XY. Las rectas NA y NB cortan nuevamente a Γ en los puntos C y D, respectivamente. Las tangentes a Γ en C y D se cortan en P. Sea M el punto de intersección del segmento XY con el segmento NP. Demostrar que M es el punto medio del segmento AB.

Problema 3. Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ con $n > 5$. Demostrar que existe un conjunto finito B de enteros positivos distintos tal que $A \subseteq B$ y tiene la propiedad:

$$\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2,$$

es decir, el producto de los elementos de B es igual a la suma de los cuadrados de los elementos de B.

(Segundo Día)

Problema 4. Sean Γ una circunferencia de centro O, AE un diámetro de Γ y B el punto medio de uno de los arcos AE de Γ. El punto $D \neq E$ está sobre el segmento OE. El punto C es tal que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con AB paralelo a CD y BC paralelo a AD. Las rectas EB y CD se cortan en el punto F. La recta OF corta al arco menor EB de Γ en el punto I. Demostrar que la recta EI es la bisectriz del ángulo BEC.

Problema 5. Sean A y B dos conjuntos tales que:

i) $A \cup B$ es el conjunto de los enteros positivos.

ii) $A \cap B$ es vacío.

iii) Si dos enteros positivos tienen como diferencia a un primo mayor que 2013, entonces uno de ellos está en A y el otro en B.

Hallar todas las posibilidades para los conjuntos A y B.

Problema 6. Una *configuración* es un conjunto finito S de puntos del plano entre los cuales no hay tres colineales y a cada punto se le asigna algún color, de modo que si un triángulo cuyos vértices están en S tiene un ángulo mayor o igual a $120°$, entonces exactamente dos de sus vértices son de un mismo color. Hallar el número máximo de puntos que puede tener una configuración.

6.2. Soluciones

1.

a) Sea $T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ el mínimo común múltiplo de todos los elementos del conjunto. Cualquier número de la forma $k = mT$, con m entero cumple que el conjunto $\{kc_1, kc_2, \dots, kc_n\}$ es canalero, ya que para 3 elementos cualesquiera c_i, c_j, c_l pertenecientes al conjunto original se tiene $c_i | mT$ y $mT | mT$.

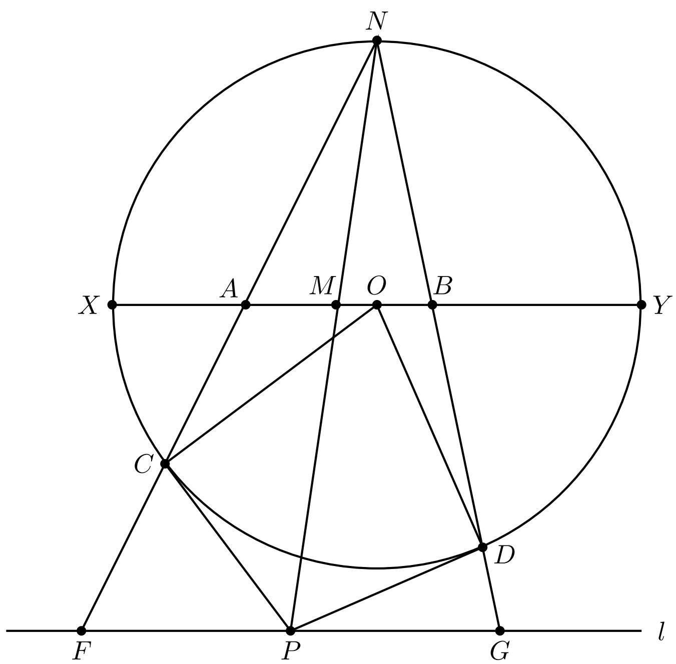
   Por lo tanto
$$mTc_i | (mT)^2 \implies kc_i | k^2 \implies kc_i | (kc_j)(kc_l)$$
   Como m puede ser cualquier entero positivo, hay infinitos enteros positivos k que cumplan la condición.

b) Sean $Q = p_1 p_2 \cdots p_n$ el producto de n primos diferentes y $A = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ el conjunto de los n elementos $C_i = Q/p_i$. Por construcción el máximo común divisor de todos los elementos es 1. En efecto, si existiera un primo p_s que dividiera a todos los elementos, tendría que dividir también a Q. Es decir, p_s sería uno de los n primos de Q. Luego $C_s = Q/p_s$ sería un elemento del conjunto A y p_s no dividiría a C_s, lo cual es una contradicción.

   Por otro lado, para cualesquiera 3 elementos $C_i, C_j, C_l \in A$ se tiene que
$$C_i \cdot C_j = \frac{Q^2}{p_i p_j} = Q \frac{Q}{p_i p_j}$$
   donde $\dfrac{Q}{p_i p_j}$ es un entero. Como $C_l | Q$ entonces $C_l | C_i \cdot C_j$.

2. (Solución de Rubmary Rojas) Sea l la recta paralela a la recta AB que pasa por P. Sean F y G los puntos de intersección de la recta l con las rectas NA y NB, respectivamente. Sea O el centro de Γ y r su radio. Sea $\alpha = \angle NAB$ y $\beta = \angle NBA$. Como $l \parallel AB$ entonces $\angle NFG = \angle NAB = \alpha$ y $\angle NGF = \angle NBA = \beta$. Por otra parte, como N es punto medio del arco XNY, entonces $NO \perp XY \implies NO \perp AB$, lo que implica que $\angle ANO = 90° - \alpha$ y $\angle BNO = 90° - \beta$. Y como $NO = CO = OD = r$, entonces $\angle ONC = \angle NCO = 90° - \alpha$ y $\angle OND = \angle ODN = 90° - \beta$.

También se tiene que $OC \perp CP$ y $OD \perp DP$ ya que CP y DP son tangentes a Γ, obteniéndose que $\angle FCP = 180° - \angle PCN = 180° - \angle PCO - \angle OCN = 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ y $\angle GDP = 180° - \angle PDN = 180° - \angle PDO - \angle ODN = 180° - 90° - (90° - \beta) = \beta$. Esto implica que $PC = PF$ y $PD = PG$, pero como $PC = PD \implies PF = PG \implies 1 = \frac{FP}{PG} = \frac{AM}{MB}$, pues $l \parallel AB$. Por lo tanto $AM = MB$, obteniéndose que M es el punto medio del segmento AB.



3. Dado un conjunto X de números naturales, denotemos

$$P(X) = \prod_{x \in X} x \text{ y } S(X) = \sum_{x \in X} x^2.$$

Con esta notación, observe que para $n > 5$ se cumple que $P(A) > S(A)$. Sea $k = P(A) - S(A)$. Se pueden agregar k copias de 1 al conjunto A manteniendo $P(A)$ constante y aumentando $S(A)$ de modo que si $A_0 = \{1_0, 1_1, \ldots, 1_k, 2, \ldots, n\}$, entonces $P(A_0) = S(A_0)$ y $P(A_0) = P(A_1)$.

Note que si definimos $A_1 = A_0 \cup \{P(A_0) - 1\} - 1_1$ estamos cambiando un 1 repetido por el término $P(A_0) - 1 > n$. Por otro lado se sigue cumpliendo $P(A_1) = S(A_1)$ ya que

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_0)(P(A_0) - 1) \\ &= (P(A_0) - 1)^2 + P(A_0) - 1 \\ &= S(A_0) + (P(A_0) - 1)^2 - 1 \\ &= S(A_1) \end{aligned}$$

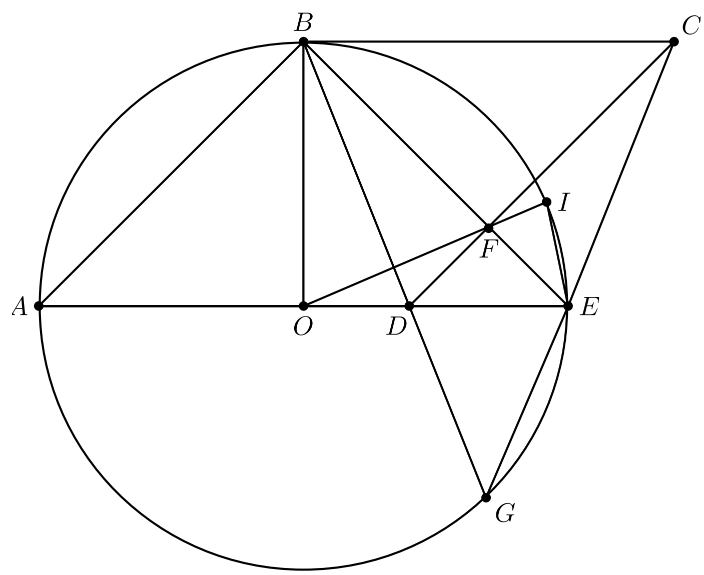
Se puede repetir este proceso k veces de modo que

$$A_i = A_{i-1} \cup \{P(A_{i-1}) - 1\} - \{1_i\} \text{ para } i = 1, \ldots, k.$$

Como $P(A_i) > P(A_{i-1})$ en cada paso se elimina un 1 repetido y se agrega un número distinto a todos los otros, de modo que todos los elementos de A_i, exceptuando los $1's$, serán distintos. Además se mantiene que $P(A_i) = S(A_i)$.

Finalmente el conjunto $B = A \cup \{P(A_0) - 1, P(A_1) - 1, \ldots, P(A_{k-1}) - 1\}$ cumple todas las condiciones del problema. Es decir, $P(B) = S(B)$ y todos sus elementos son distintos.

4. (Solución de Rafael Aznar) Observemos que $\angle DCB = \angle EBC = \angle FDE = \angle FED = 45°$ y que BE y DC son perpendiculares. Entonces $\triangle FBC$ y $\triangle FDE$ son isósceles, $DF = FE$, $FB = FC$, y $\triangle DFB$ y $\triangle EFC$ son congruentes.



Ahora $\angle BEC = \angle CDB = \angle ABD$. Si prolongamos BD hasta un punto G en la circunferencia Γ, tendremos $\angle ABD = \angle AEG = \frac{\widehat{AG}}{2}$, y como $\angle AGE = 90°$, resulta $\triangle AGE \sim \triangle CFE$, de donde EI biseca a $\angle FEC$ si y solo si $\angle AEG = 2\angle BEI = \angle BOI$. Tomando ños complementarios, esto ocurre si y sólo si $\angle EAG = \angle IOE$. Como $\angle EAG = \angle EBG$, esto equivale a $\angle FBD = \angle FOD$, es decir a que el cuadrilátero $FBOD$ sea cíclico. Pero esto es cierto, ya que $\angle BOD = 90° = \angle BFD$.

5. (Solución de Rubmary Rojas) Si existen tres primos p, q, r mayores que 2013 y tales que $p + 1 - q = r$, entonces no pueden haber dos números consecutivos en el mismo conjunto, ya que si k y $k+1$ están en el mismo conjunto, digamos A, entonces $k+q$ y $k+p+1$ están en el conjunto B y su diferencia $(k+p+1)-(k+q) = p+1-q = r$ es un primo mayor que 2013, llegando a una contradicción.

De esta forma, si el número 1 está en el conjunto A, el 2 debe estar en el B, el 3 en el A, el 4 en el B y así sucesivamente, obteniéndose que todos los números impares están en el conjunto A y todos los pares en el conjunto B. Y si el 1 está en el B, entonces todos los números impares están en el conjunto B y todos los pares en el conjunto A.

Estas posibilidades para los conjuntos A y B nos sirven, pues la unión de los pares e impares positivos es el conjunto de los enteros positivos, cada número pertenece a sólo uno de los conjuntos y la diferencia de dos números pares o dos números impares es siempre un número par. Y como todos los números primos mayores que 2013 son impares, se cumplen las tres condiciones.

Para concluir la demostración basta con encontrar una terna de primos (p, q, r) que cumplan $p + 1 - q = r$. Una posible solución es $(4079, 2017, 2063)$ (se puede verficar que son primos haciendo los cálculos pertinentes).

6. El máximo número de puntos que puede tener una configuración es 25. Primero demostremos que no se puede obtener una configuración de más de 25 puntos.

Observe que 6 puntos, entre los cuales no hay 3 colineales, siempre van a formar un ángulo mayor o igual a $120°$. Si la envolvente convexa es un hexágono entonces uno de sus ángulos va a ser mayor o igual a $120°$. Si la envolvente convexa no es un hexágono, necesariamente hay un punto A dentro de un triángulo formado por otros 3 puntos B, C y D. Alguno de los ángulos $\angle BAC$, $\angle CAD$ y $\angle DAB$ debe ser mayor o igual a $120°$.

La observación anterior lleva a que no pueden existir más de 5 colores ni más de 5 puntos del mismo color. Si existieran 6 puntos del mismo color, se formaría un triángulo con 3 vértices del mismo color y con un ángulo mayor o igual a $120°$. Si existieran 6 colores distintos se formaría un triángulo con vértices de 3 colores distintos y con un ángulo mayor o igual a $120°$. Ambos casos son imposibles, por lo tanto la configuración no puede tener más de 25 colores.

Falta demostrar que existe una configuración de 25 colores. Esta se puede construir colocando el centro de 5 pentágonos regulares en los vértices de un pentágono regular de lado mucho mayor. Los vértices de cada pentágono pequeño se colorean de un mismo color, cada pentágono pequeño de un color distinto. Se pueden girar los pentágonos pequeños alrededor de su centro para evitar que 3 puntos sean colineales.

Si un triángulo tiene sus 3 vértices del mismo color los puntos son vértices del mismo pentágono, por lo cual su mayor ángulo mide $108°$. Si un triángulo tiene sus 3 vértices de colores distintos, entonces pertenecen a pentágonos distintos. Como estos vértices están muy cerca del centro de cada pentágono pequeño, comparado con el lado del pentágono mayor, el mayor ángulo que puede tener es muy cercano a $108°$. Se puede hacer el lado del pentágono mayor suficientemente grande de modo que dicho ángulo sea tan cercano a $108°$ como queramos, particularmente que sea menor a $120°$. Por lo tanto, este conjunto de puntos forma una configuración.

Capítulo 7

Olimpiada Internacional de Matemática

ESTA sección está dedicada a la Olimpiada Internacional de Matemáticas 2013, IMO, celebrada en Santa Marta, Colombia, del 18 al 28 de Julio. Nuetro equipo para la IMO estuvo integrado por la estudiante Rubmary Rojas, del colegio San Vicente de Paúl, de Barquisimeto, la tutora fue Sofía Taylor, estudiante de la licenciatura en Física de la UCV y el jefe de la delegación el profesor Rafael Sánchez Lamoneda, también de la UCV. Rubmary ganó una mención honorífica. En esta IMO participaron 97 países y un total de 527 estudiantes. Pueden ver más información en www.imo-official.org. En esta sección presentamos los problemas propuestos en esa competencia y sus soluciones. Ellas son las soluciones oficiales presentadas al Jurado Internacional por el Comité de Problemas de la IMO 2014.

7.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Demostrar que para cualquier par de enteros positivos k y n, existen k enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (no necesariamente distintos) tales que

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Problema 2. Una configuración de 4027 puntos del plano, de los cuales 2013 son rojos y 2014 azules, y no hay tres de ellos que sean colineales, se llama *colombiana.* Trazando algunas rectas, el plano queda dividido en varias regiones. Una colección de rectas es *buena* para una configuración colombiana si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- ninguna recta pasa por ninguno de los puntos de la configuración;
- ninguna región contiene puntos de ambos colores.

Hallar el menor valor de k tal que para cualquier configuración colombiana de 4027 puntos hay una colección buena de k rectas.

Problema 3. Supongamos que el excírculo del triángulo ABC opuesto al vértice A es tangente al lado BC en el punto A_1. Análogamente, se definen los puntos B_1 en CA y C_1 en AB, utilizando los excírculos opuestos a B y C respectivamente. Supongamos que el circuncentro del triángulo $A_1B_1C_1$ pertenece a la circunferencia que pasa por los vértices A, B y C. Demostrar que el triángulo ABC es rectángulo.

El excírculo *del triángulo ABC opuesto al vértice A es la circunferencia que es tangente al segmento BC, a la prolongación del lado AB más allá de B, y a la prolongación del lado AC más allá de C. Análogamente se definen los excírculos opuestos a los vértices B y C.*

Segundo Día

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H, y sea W un punto sobre el lado BC, estríctamente entre B y C. Los puntos M y N son los pies de las alturas trazadas desde B y C respectivamente. Se denota por ω_1 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo BWN, y por X el punto de ω_1 tal que WX es un diámetro de ω_1. Análogamente, se denota por ω_2 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo CWM, y por Y el punto de ω_2 tal que WY es un diámetro de ω_2. Demostrar que los puntos X, Y y H son colineales.

Problema 5. Sea $\mathbb{Q}_{>0}$ el conjunto de los números racionales mayores que cero. Sea $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las tres siguientes condiciones:

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(iii) existe un número racional $a > 1$ tal que $f(a) = a$.

Demostrar que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Problema 6. Sea $n \geq 3$ un número entero. Se considera una circunferencia en la que se han marcado $n+1$ puntos igualmente espaciados. Cada punto se etiqueta con uno de los números $0, 1, \ldots, n$ de manera que cada número se usa exactamente una vez. Dos distribuciones de etiquetas se consideran la misma si una se puede obtener de la otra por una rotación de la circunferencia. Una distribución de etiquetas se llama *bonita* si, para cualesquiera cuatro etiquetas $a < b < c < d$ con $a+d = b+c$ la cuerda que une los puntos etiquetados a y d no corta la cuerda que une los puntos etiquetados b y c.

Sea M el número de distribuciones bonitas y N el número de pares ordenados (x, y) de enteros positivos tales que $x + y \leq n$ y $\text{mcd}(x, y) = 1$. Demostrar que

$$M = N + 1.$$

7.2. Soluciones

1. Procederemos por inducción sobre k. Si $k = 1$, entonces $1 + \frac{2^k-1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ y no hay nada que demostrar. Supongamos ahora que la proposición es cierta para $k = j - 1$ y demostrémosla para $k = j$. Para ello dividamos nuetro razonamiento en dos partes.

Caso 1: $n = 2t - 1$ para algún entero positivo t. Obsérvese que

$$\left(1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t}\right)\left(1 + \frac{1}{2t-1}\right) = \frac{2(t + 2^{j-1} - 1)}{2t}\frac{2t}{2t-1} = 1 + \frac{2^j - 1}{2t-1}.$$

Por la hipótesis de inducción sabemos que existen enteros positivos m_1, m_2,..., m_{k-1} tales que

$$1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_{j-1}}\right),$$

entonces haciendo $m_j = 2t - 1$ tenemos la expresión buscada.

Caso 2: $n = 2t$ para algún entero positivo t.

En este caso tenemos que

$$\left(1 + \frac{1}{2t + 2^j - 2}\right)\left(1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t}\right) = \frac{2t + 2^j - 1}{2t + 2^j - 2} \cdot \frac{2t + 2^j - 2}{2t} = 1 + \frac{2^j - 1}{2t}.$$

Como $t + 2^{j-1} - 1 > 0$ entonces $2t + 2^j - 2 > 0$ y usando la hipótesis de inducción y haciendo $m_j = 2t + 2^j - 2$ obtenemos la expresión deseada.

2. El menor valor de k es 2013. En efecto. Primero demos un ejemplo en donde mostremos que $k \geq 2013$. Marquemos de manera alternada 2013 puntos rojos y 2014 puntos azules sobre una circunferencia y marquemos el punto azul que falta en algún otro lugar del plano. La circunferencia quedó dividida en 4026 arcos, cada uno con puntos extremos de colores diferentes. Si se logró el objetivo, entonces cada arco debería intersectar alguna de las rectas trazadas. Como cada recta contiene a lo más dos puntos de la circunferencia, entonces es necesario tener al menos $\frac{4026}{2} = 2013$ rectas.

Nos queda demostrar que podemos hacer la separación de los puntos usando exactamente 2013 rectas. Observemos para comenzar que dados dos puntos cualesquiera A y B con el mismo color, podemos dibujar dos rectas que los separen de todos los otros puntos de la configuración. Para hacerlo es suficiente con trazar dos rectas paralelas a AB, una de cada lado de AB y lo suficientemente cercanas a esta de tal manera que los dos únicos puntos de la configuración sean A y B, recuérdese que en la configuración no hay tres puntos alineados. Para terminar basta analizar los dos casos siguientes:

Caso 1: Imaginemos una recta que pase por dos puntos A y B de la configuración, de tal manera que todos los otros puntos estén a un mismo lado de esta recta. Supongamos que A es rojo. Tracemos una primera recta que separe a A de todos los otros puntos de la configuración. Formemos 1006 parejas con los 2012 puntos rojos restantes y separemos cada pareja de puntos rojos por dos rectas, como explicamos antes. De esta forma hemos usado 2013 rectas para lograr el objetivo.

Caso 2: Supongamos que no es posible trazar esa recta imaginaria que una dos puntos de la configuración y los separe de todos los restantes y donde uno de los dos puntos sobre esa recta imaginaria sea rojo. Dado un punto azul en la configuración, digamos A busquemos el punto que esté más cerca de él, llamémoslo B. B debe ser también azul, de lo contrario podríamos trazar la recta imaginaria con dos puntos, uno de cada color. Ahora podemos separarlos de todos los restantes por una recta paralela a AB, ya que no hay tres colineales. Ahora procedemos como en el caso anterior, apareamos los 2012 puntos azules restantes, y formamos 1006 parejas. Ahora separamos cada pareja con dos rectas paralelas y tenemos así las 2013 rectas.

3. Denotemos las circunferencias circunscritas de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ por Ω y Γ, respectivamente. Denotemos por A_0 el punto medio del arco CB de Ω que contiene a A y definamos B_0 y C_0 análogamente. Por hipótesis el centro Q de Γ está en Ω. Demostremos primero el siguiente Lema.

Lema. Con las hipótesis anteriores se cumple que $A_0B_1 = A_0C_1$. Los puntos A, A_0, B_1 y C_1 son concíclicos y además A y A_0 están del mismo lado de B_1C_1. Proposiciones similares valen para B y C.

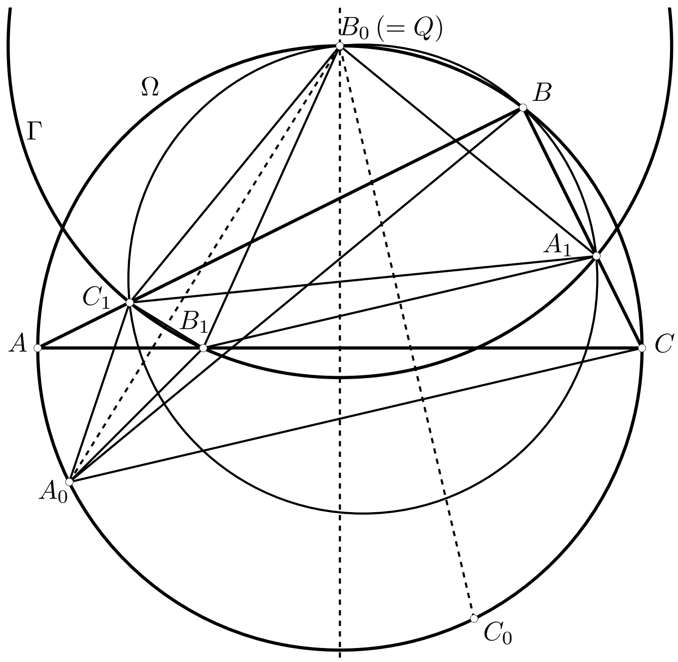
En efecto. Consideremos primero el caso en el cual $A_0 = A$. Si eso es cierto, entonces basta con demostrar que $A_0B_1 = A_0C_1$. Por definición de A_0, sabemos que $A_0B = A_0C$, es decir $AB = AC$ y el triángulo ABC es isósceles en A. Esto implica que $AB_1 = AC_1$.

Supongamos ahora que $A \neq A_0$. Por la definición de A_0 tenemos que $A_0B = A_0C$. También por propiedades de los excírculos $BC_1 = CB_1$. Además

$$\angle C_1BA_0 = \angle ABA_0 = \angle ACA_0 = \angle B_1CA_0$$

. Por lo tanto los triángulos A_0BC_1 y A_0CB_1 son congruentes, lo cual implica que $A_0C_1 = A_0B_1$. Usando de nuevo esa congruencia de triángulos, tenemos que $\angle A_0C_1A = A_0B_1A$, pues son ángulos exteriores en los vértices C_1 y B_1, respectivamente. Por lo tanto los puntos A, A_0, B_1 y C_1 son los vértices de un cuadrilátero cíclico, tal que dos de sus lados opuestos son AA_0 y B_1C_1 y queda demostrado el lema.

Volvamos ahora a la solución del problema.



Por la construcción, los puntos A_1, B_1 y C_1 están en el interior de un arco de semicircunferencia de Γ, por lo tanto el triángulo $A_1B_1C_1$ es obtusángulo. Supongamos sin pérdida de generalidad que su ángulo obtuso está en el vértice B_1, es decir es el ángulo $\angle A_1B_1C_1$. Entonces Q y B_1 están en lados distintos de A_1C_1. Igualmente ocurre con los puntos B y B_1. Por lo tanto Q y B están del mismo lado de A_1C_1 y entonces también lo están Q y B_0.

Observemos ahora que la mediatriz de A_1C_1 intersecta a Ω en dos puntos que se encuentran en lados opuestos de A_1C_1. Por el lema $B_0A_1 = B_0C_1$ y además por ser Q es el circuncentro del triángulo $A_1B_1C_1$ $QA_1 = QC_1$. Entonces B_0 y Q están en Ω y en la mediatriz de A_1C_1. Como también están del mismo lado de A_1C_1, entonces $B_0 = Q$ (Ver figura).

De nuevo por la primera parte del lema tenemos las igualdades, $A_0B_1 = A_0C_1$ y $C_0A_1 = C_0B_1$, por lo tanto las rectas QA_0 y QC_0 son las mediatrices de B_1C_1

y A_1B_1, respectivamente. Luego:

$$\begin{aligned}\angle C_1B_0A_1 &= \angle C_1B_0B_1 + \angle B_1B_0A_1 = 2\angle A_0B_0B_1 + 2\angle B_1B_0C_0\\ &= 2\angle A_0B_0C_0 = 180^\circ - \angle ABC,\end{aligned}$$

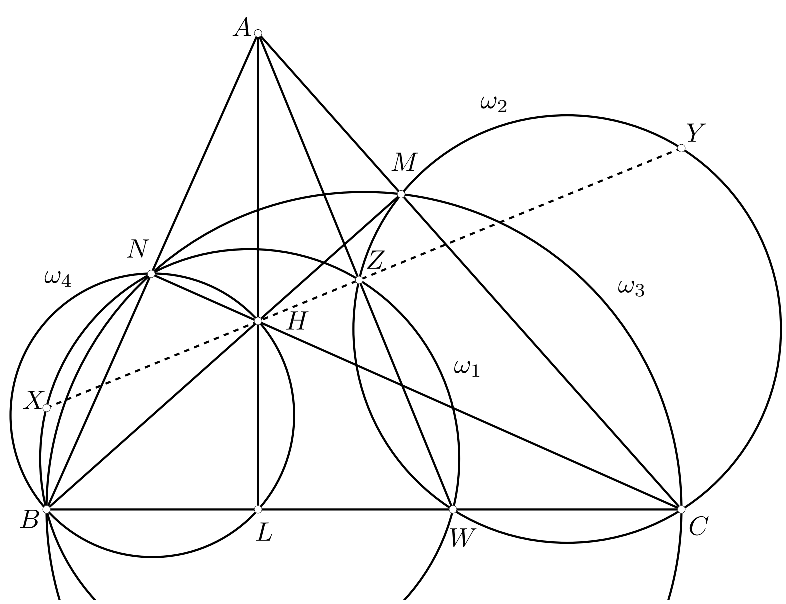
(recordemos que A_0 y C_0 son los puntos medios de los arcos CB y BA, respectivamente). Por otra parte, de acuerdo a la segunda parte del lema tenemos

$$\angle C_1B_0A_1 = \angle C_1BA_1 = \angle ABC$$

.

De las dos últimas igualdades tenemos que $\angle ABC = 90^\circ$ y se completa la demostración.

4. Sea L el pie de la altura desde A, y sea Z el otro punto de intersección entre las circunferencias ω_1 y ω_2 distinto de W. Demostraremos que los puntos X, Y, Z y H están alineados. Como $\angle BNC = \angle BMC = 90^\circ$, entonces los puntos B, C, N y M son concíclicos. Denotemos por ω_3 la circunferencia que pasa por estos 4 puntos. Observemos ahora que la recta WZ es el eje radical de ω_1 y ω_2, análogamente, la recta BN es el eje radical de ω_1 y ω_3 y la recta CM es el eje radical de ω_2 y ω_3. En consecuencia el punto A que es la intersección de BN y CM, es el centro radical de las tres circunferencias y por lo tanto la recta WZ pasa por A.



Como WX y WY son diámetros de las circunferencias ω_1 y ω_2, respectívamente, tenemos que $\angle WZX = \angle WZY = 90^\circ$, por lo tanto los puntos X e Y están sobre la recta que pasa por Z y es perpendicular a WZ.

Por otra parte el cuadrilátero $BLHN$ es cíclico, pues tiene dos ángulos opuestos rectos. Sea ω_4 la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $BLHN$. Por la potencia de A con respecto a las circunferencias ω_1 y ω_4 tenemos que $AL \cdot AH = AB \cdot AN = AW \cdot AZ$. Si H está sobre la recta AW esto implica que $H = Z$ y terminamos la demostración. En caso contrario de las igualdades anteriores se tiene que $\frac{AZ}{AH} = \frac{AL}{AW}$, por lo tanto los triángulos AHZ y AWL son semejantes. En consecuencia $\angle WZA = \angle WLA = 90°$, es decir, el punto H está sobre la recta que pasa por X, Y y Z.

5. Denotemos por $\mathbb{Z}_{>0}$ el conjunto de los números enteros positivos.

Considerando $x = 1$ e $y = a$ en (i), tenemos que $f(1) \geq 1$. Por otra parte, usando (ii) y una sencilla inducción en n resulta:

$$f(nx) \geq nf(x), \tag{iv}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

En particular obtenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, se cumple que:

$$f(n) \geq nf(1) \geq n. \tag{v}$$

Por lo tanto para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $f(n) > 0$.

En consecuencia, usando de nuevo (i), tenemos que:

$$f(\frac{m}{n})f(n) \geq f(m) > 0,$$

por lo tanto para todo $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, $f(q) > 0$.

Por otra parte, sean x e y números racionales positivos con $x > y$. Entonces, si $x = y + z$, por (ii) tenemos que $f(x) = f(z + y) \geq f(z) + f(y) > f(y)$ y podemos concluir que la función f es estríctamente creciente.

Entonces por (v) para todo $x \geq 1$ tenemos que:

$$f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor) \geq \lfloor x \rfloor > x - 1.$$

Ahora, usando (i) e inducción, tenemos que $f(x)^n \geq f(x^n)$, por lo tanto:

$$f(x)^n \geq f(x^n) > x^n - 1,$$

y entonces para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $x > 1$ tenemos que,

$$f(x) \geq \sqrt[n]{x^n - 1}.$$

Supongamos ahora que $x > y > 1$ son dos números racionales positivos. Entonces $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^n) > n(x - y)$. Por lo tanto para n suficientemente grande tenemos, $x^n - y^n > n(x - y) > 1$ o bien $x^n - 1 > y^n$. En consecuencia $f(x) > y$. Esto implica que para todo $x > 1$,

$$f(x) \geq x. \tag{vi}$$

En caso contrario tendríamos una contradicción con lo anterior.

Ahora, por (i) y (vi) tenemos que, $a^n = f(a)^n\ f(a^n) \geq a^n$, por lo tanto $f(a^n) = a^n$.

Ahora, para $x > 1$ elijamos $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $a^n - x > 1$. Entonces por (ii) y (vi) nos queda que:

$$a^n = f(a^n)\ f(x) + f(a^n - x) \geq x + (a^n - x) = a^n,$$

y por lo tanto para todo $x > 1$, $f(x) = x$.

Finalmente, para todo $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ y todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, tenemos por (i) y (iv) que:

$$nf(x) = f(n)f(x) \geq f(nx) \geq nf(x),$$

y entonces $f(nx) = nf(x)$. Por lo tanto,

$$m = f(m) = f(n\frac{m}{n}) = nf(\frac{m}{n}),$$

y $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$.

Comentario: La condición $f(a) = a$ para $a > 1$ es esencial. De no cumplirse, la proposición no es cierta como muestra el siguiente contraejemplo: Sea $b \geq 1$ y consideremos la función $f(x) = bx^2$. ella satisface (i) y (ii) para todo par de números racionales x e y pero tiene solo un punto fijo, $\frac{1}{b} \leq 1$.

6. Dada una distribución de etiquetas de $[0, n] = \{0, 1, \ldots, n\}$, daremos unas definiciones que nos serán útiles para la solución del problema. Definamos un k-cuerda como una cuerda (posiblemente degenerada) cuyos extremos (posiblemente iguales) suman k, es decir, si a y b son los extremos de la cuerda, entonces $a+b = k$. Diremos que 3 cuerdas están *alineadas* si una de ellas separa a las otras dos. Para $m \geq 3$ diremos que m cuerdas están *alineadas* si tres cualesquiera de ellas lo están. Por ejemplo, en la figura 1, A, B y C están alineadas, pero B, C y D no lo están.

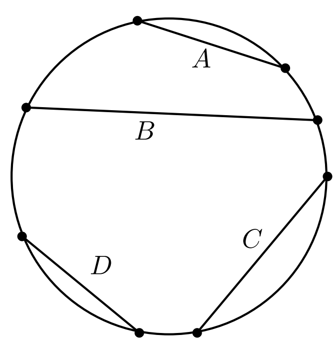


Figura 1.

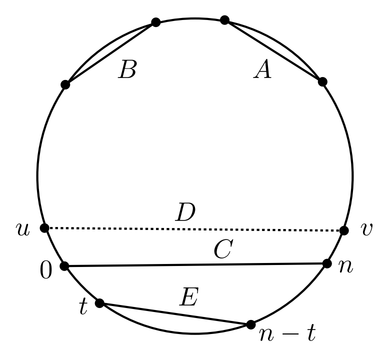


Figura 2.

Demostraremos ahora el siguiente lema.

Lema. En cualquier distribución de etiquetas *bonita*, las k-cuerdas están alineadas, para cualquier entero k.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. Si $\nleq 3$ no hay nada que demostrar. Supongamos ahora que en toda distribución bonita con menos de n puntos las k-cuerdas están alineadas. Sea ≥ 4 y procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una distribución bonita S donde las tres k-cuerdas A, B y C no están alineadas. Si n no es uno de los extremos de alguna de ellas tres, entonces podemos quitar n de S y obtenemos una distribución bonita $S \setminus \{n\}$ de $[0, n-1]$, donde A, B y C están alineados por nuestra hipótesis de inducción. Análogamente si el 0 no es uno de los puntos extremos de A, B o C, entonces quitando el 0 y disminuyendo todos los númeors en 1, tendremos una distribución bonita $S \setminus \{0\}$ donde A, B y C están alineados. Por lo tanto, 0 y n deben estar entre los puntos extremos de estas cuerdas.

Veamos ahora que 0 y n son extremos de una de las cuerdas. Sean x e y sus respectivas parejas, es decir 0 y x son extremos de una cuerda y n e y de otra. Entonces, como la distribución es bonita

$$n \geq 0 + x = k = y + n \geq n,$$

pero entonces $k = n = x$ e $y = 0$. Es decir, 0 y n son extremos de una de las cuerdas A, B o C. Podemos decir sin pérdida de generalidad que son los extremos de C. Además $k = n$.

Sea D la cuerda cuyos extremos corresponden a los números u y v que son adyacentes a 0 y n y están del mismo lado de C que A y B (ver Figura 2). Sea $t = u + v$. Si $t = n$, entonces las n-cuerdas A, B y D no estarían alineadas y la distribución $S \setminus \{0, n\}$ no sería bonita, contradiciendo la hipótesis de inducción. Si $t < n$, entonces la t-cuerda de 0 a t no puede intersectar a la t cuerda D, de hacerlo tendríamos cuatro números distintos u, 0, v, t, con $u + v = t = 0 + t$ y las cuerdas con puntos extremos correspondientes intersectándose, lo cual es una contradicción. Por lo tanto la cuerda C separa a las cuerdas D y la t-cuerda de 0 a t. Consideremos ahora la n-cuerda E de t a $n - t$. Por ser la distribución bonita, ella no intersecta a C, por lo tanto t y $n - t$ están del mismo lado de C. Pero entonces las cuerdas A, B y E no están alineadas, en $S \setminus \{0, n\}$ lo cual es una contradicción. Finalmente si $t > n$, entonces reacomodemos los números 0, 1, 2,$\ldots$, n de tal manera que x corresponda a $n - x$ para $0 \leq x \leq n$. De esta forma las t-cuerdas van a las $(2n - t)$-cuerdas y procedemos de manera análoga al caso $t < n$. Queda así demostrado el lema.

Vamos ahora a la solución del problema. Haremos la demostración por inducción. En el caso $n = 2$ no hay nada que demostrar. Supongamos ahora que $n \geq 3$. Sea S una distribución bonita de $[0, n]$ y borremos n para obtener así una distribución bonita T de $[0, n-1]$. Las n-cuerdas de T están alineadas y contienen a todos los puntos excepto al 0. Diremos que T es de Tipo 1 si el 0 está ubicado entre dos de estas n-cuerdas, y es de Tipo 2 en caso contrario, es decir = está antes o después de todas las n-cuerdas, o si lo vemos como una cuerda degenerada, 0 está alineado con todas las n-cuerdas. Demostraremos que toda distribución bonita de Tipo 1 de $[0, n-1]$ se obtiene de manera única de una distribución bonita de $[0, n]$ y cada una de Tipo 2 de $[0, n-1]$ se obtiene exactamente de dos distribuciones bonitas de $[0, n]$.

En efecto, si T es de tipo 1, el 0 está ubicado entre dos n-cuerdas A y B. por lo tanto como S es una distribución bonita de $[0, n]$ la n-cuerda de 0 a n, debe estar alineada con A y B en S y en consecuencia n está en el otro arco entre A y B. Por lo tanto S se puede obtener unívocamente a partir de T.

Recíprocamente, si S T es de Tipo 1 e insertamos n como antes, entonces podemos ver que la distribución que resulta de $[0, n]$ es bonita. Veamos por qué es esto cierto. Para $0 < k < n$, las k-cuerdas de S también son k-cuerdas de T y por lo tanto están alineadas. Finalmente para $n < kn2n$, obsérvese que las n cuerdas de S están alineadas por construcción y sin pérdida de generalidad podemos supones que son paralelas, pues esto no afecta a la distribución. Tomemos ahora la mediatriz l de todos estos segmentos y hagamos una simetría con ella como eje de simetría. entonces x es simétrico a $n - x$ con respecto a l para todo x. Si tuviésemos dos k-cuerdas que se intersectasen, entonces sus reflexiones por l serían dos $(2n - k)$-cuerdas que se intersectarían, pero $0 < 2n - k < n$ si $n < k < 2n$, y esto es una contradicción.

Si T es de tipo 2, entonces solo hay dos posibles posiciones para n en S, una a cada lado del 0. Como en el caso anterior, podemos ver que ambas posiciones producen una sola distribución bonita de $[0, n]$ que da lugar a T.

En consecuencia, si denotamos por M_n al número de distribuciones bonitas de $[0, n]$ y por L_{n-1} al número de distribuciones bonitas de $[0, n-1]$ que son de Tipo 2, tendremos que

$$M_n = (M_{n-1} - L_{n-1}) + 2L_{n-1} = M_{n-1} + L_{n-1}$$

.

Es decir, el número de distribuciones bonitas de $[0, n]$ es igual por inducción, al número de pares de enteros positivos (x, y) tal que $x + y \leq n - 1$ y $mcd(x, y) = 1$, más el número de distribuciones de Tipo 2 de $[0, n - 1]$.

Ahora para terminar la demostración debemos demostrar que L_{n-1} es igual al número de pares de enteros positivos (x, y) tal que $x + y = n$ y $mcd(x, y) = 1$. Obsérvese que este número es igual a $\phi(n)$, el número de enteros positivos menores que n y primos relativos con n.

Para demostrar esto consideremos una distribución bonita de $[0, n - 1]$ y de Tipo 2. En esta distribución se han dispuesto los números $0, 1, 2, \ldots, n - 1$ en un cierto orden. Marquemos las posiciones donde están dispuestos los números anteriores, con las clases residuales módulo n, lo hacemos de tal manera que al lugar donde está el 0, lo marcamos con la clase del 0 y seguimos a partir de allí en el sentido de las agujas del reloj. Sea $f(i)$ el número ubicado en la posición i. Por simplicidad escribimos i en vez de la clase de i. Cuando i represente una posición, es una clase módulo n y si no es posición, es uno de los números de 0 a $n-1$. Obsérvese que f es una función biyectiva de $\mathbb{Z}_n \to [0, n-1]$. Sea a la posición que corresponde a $n-1$, es decir $f(a) = n-1$. Como las n-cuerdas están alineadas con 0 y todo punto está en una n-cuerda, estas son paralelas y para todo i tenemos que

$$f(i) + f(-i) = f(i) + f(n-i) = n.$$

Análogamente, como las $(n-1)$-cuerdas están alineadas y todo punto está en una $(n-1)$-cuerda, ellas son paralelas y para todo i se cumple que,

$$f(i) + f(a-i) = n - 1.$$

En consecuencia $f(a-i) = f(-i) - 1$ para todo i y como $f(0) = 0$, tenemos que para todo k se cumple que $f(-ak) = k$. No olvidemos que esta es una igualdad, módulo k.

Ahora bien, f es biyectiva, por lo tanto $\text{mcd}(a, n) = 1$ y en consecuencia $L_{n-1} \leq \phi(n)$.

Para demostrar la igualdad basta con ver que el proceso que describe la igualdad $f(-ak) = k$, produce una distribución bonita. En efecto. Consideremos los números w, x, y, z sobre la circunferencia, con $w + y = x + z$. sus posiciones alrededor de la circunferencia satisfacen la igualdad $(-aw) + (-ay) = (-ax) + (-az)$, lo cual significa que la cuerda de w a y es paralela a la cuerda de x a z. por lo tanto la distribución es bonita y por construcción es de Tipo 2 y terminamos la demostración.

Glosario

Ángulo inscripto. Si A, B y C son puntos de una circunferencia de centro O, se dice que el ángulo $\angle ABC$ está *inscripto* en la circunferencia y que *subtiende* el arco $\widehat{AC}$ que no contiene a B. La medida de $\angle ABC$ es igual a la mitad del ángulo central $\angle AOC$.

Ángulo semiinscripto. Es el que tiene el vértice en una circunferencia, un lado tangente a la misma y el otro secante.

Centro radical. Dadas tres circunferencias con centros no alineados, es el único punto que tiene igual potencia respecto a todas ellas.

Ceviana. Es cualquier segmento que una un vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto.

Círculo de Apolonio. Es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su razón de distancias a dos puntos dados A y B es una constante dada $r > 0$, $r \neq 1$. Es una circunferencia cuyo centro está sobre el segmento AB. (Si $r = 1$ el lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB).

Circuncírculo. Es la (única) circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo.

Circunferencia circunscripta. Ver *Circuncírculo*.

Coeficiente binomial. Es el coeficiente de x^k en el desarrollo de $(1+x)^n$. También es igual al número de subconjuntos de k elementos que tiene un conjunto de n elementos. Se denota $\binom{n}{k}$ y puede calcularse así:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Colineales. Dícese de los puntos que están sobre una misma línea recta.

Coprimos (o **primos relativos**). Dícese de dos números enteros sin factores primos comunes (o, equivalentemente, cuyo máximo común divisor es 1).

Cuadrilátero cíclico (también llamado **concíclico** o **inscriptible**). Es un cuadrilatero que puede ser inscripto en una circunferencia, es decir, tal que alguna circunferencia pasa por sus cuatro vértices. Una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico es que tenga un par de ángulos opuestos suplementarios.

Cuaterna armónica. Los puntos alineados A, B, C y D forman una *cuaterna armónica* si y sólo si exactamente uno de los puntos A y B pertenece al segmento CD y además se cumple $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

Eje radical. Dadas dos circunferencias no concéntricas, es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto a ambas. Siempre es una recta perpendicular a la que une los centros de ambas circunferencias.

Excentro. Es el punto en que concurren la bisectriz de un ángulo y las bisectrices exteriores de los otros dos ángulos de un triángulo. Como equidista de los tres lados del triángulo, es el centro de una circunferencia tangente a ellos y exterior al triángulo.

Incentro. Es el punto en que concurren las tres bisectrices de un triángulo. Como equidista de los tres lados del triángulo, es el centro de una circunferencia tangente internamente a ellos.

Incírculo. Es la circunferencia tangente internamente a los tres lados de un triángulo.

Potencia. Sean P un punto, Γ una circunferencia y r una recta que pase por P y corta a la circunferencia en A y B (si r es tangente a Γ consideramos que $A = B$). Entonces el producto $PA \cdot PB$ no depende de r, y su valor es por definición la *potencia* de P respecto a Γ, $\mathrm{Pot}(P, \Gamma)$. Las distancias PA y PB se consideran orientadas, es decir que la potencia es positiva o negativa según que P sea exterior o interior a Γ. Obviamente $\mathrm{Pot}(P, \Gamma) = 0$ si y sólo si P pertenece a Γ.

Principio de las casillas. Si n objetos se distribuyen en k cajas, y $n > k$, entonces alguna caja recibe más de un objeto.

Razón áurea. Se dice que un punto C divide a un segmento AB en *media y extrema razón* si $AB/BC = AC/AB$. En este caso a la razón AC/AB se le conoce como *razón áurea*, *número áureo*, *divina proporción* y varios otros nombres. Se suele denotar con la letra griega φ y su valor es

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Teorema de Ceva. Sea ABC un triángulo y sean P, Q y R tres puntos ubicados respectivamente en las rectas BC, CA y AB y diferentes de A, B y C. Entonces AP, BQ y CR son concurrentes si y sólo si

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

Nota: las medidas en cada recta se toman orientadas.

Teorema de la bisectriz. Sean ABC un triángulo, V el punto en que la bisectriz desde A corta al lado BC y U el punto en que la bisectriz exterior por A corta a la prolongación del lado BC. Entonces

$$\frac{VB}{VC} = \frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AB + AC}.$$

Admite los siguientes recíprocos:

1. Si V es un punto del lado BC del $\triangle ABC$ y $\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC}$ entonces AV es la bisectriz del $\angle BAC$.

2. Si U es un punto de la prolongación del lado BC del $\triangle ABC$ y $\frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC}$ entonces AU es la bisectriz exterior del $\angle BAC$.

3. Si V y U son puntos del lado BC y de su prolongación, respectivamente, del $\triangle ABC$, y si $\frac{VB}{VC} = \frac{UB}{UC}$ y $\angle UAV = 90°$, entonces AV es la bisectriz interior y AU es la bisectriz exterior del $\angle BAC$.

Teorema de Menelao. Sea ABC un triángulo y sean P, Q y R tres puntos ubicados respectivamente en las rectas BC, CA y AB y diferentes de A, B y C. Entonces P, Q y R están alineados si y sólo si

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

Nota: las medidas en cada recta se toman orientadas.

Teorema de Stewart. Sean ABC un triángulo, D un punto del lado AB, $p = CD$, $m = AD$ y $n = DB$. Este teorema afirma que $c(mn + p^2) = a^2m + b^2n$.

Terna pitagórica. Es un conjunto de tres enteros positivos a, b y c que cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Si $\text{mcd}(a, b, c) = 1$ la terna se dice *primitiva*. En ese caso a y b deben ser de diferente paridad, digamos a impar y b par, y se puede probar que existen enteros u y v, coprimos y de diferente paridad, tales que $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ y $c = u^2 + v^2$.

Premiación de las Olimpiadas Matemáticas del 2013

Final Nacional de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas

Primer Año

Medallas de Oro

Nombre	Instituto	Estado
Iván Rodríguez	Santiago De Leon	Distrito Capital

Medallas de Plata

Javier Pulido	Los Hipocampitos	Miranda
José Sánchez	Claret	Zulia
Isabel Silva	Academia Merici	Distrito Capital
Amanda Vanegas	San Francisco de Asis	Zulia

Medallas de Bronce

Rey Barbera	Nueva Segovia	Lara
Alessandra D'Agrosa	Ángel De La Guarda	Portuguesa
Miguel Díaz	San Francisco Javier	Lara
Cristian Inojosa	Loyola–Gumilla	Bolívar
Carlos Morales	San José Maristas	Aragua

Menciones de Honor

Michelle Curiel	Instituto Juan XXIII	Falcón
Chi San Fung	Juan XXIII	Carabobo
Daniela Jelambi	Instituto Andes	Distrito Capital
Daniel Nápoli	San José Maristas	Aragua
Nicole Velazco	Monseñor Bosset	Mérida
María Villalobos	Altamira	Zulia

Segundo Año

Medallas de Oro

Andrea Aché	Islámico Venezolano	Nueva Esparta
Eduardo Jerez	El Peñón	Distrito Capital
Wemp Pacheco	Calicantina	Aragua

Medallas de Plata

Johann Bastardo	Iberoamericano	Bolívar
María Dávila	Paideia	Mérida
Gabriel Matute	Academia Washington	Distrito Capital
Miguel Römer	San Ignacio	Distrito Capital

Medallas de Bronce

Franklin Bello	Iberoamericano	Bolívar
Juan Cabrera	Santiago De Leon	Distrito Capital
Nicolás Gómez	Bella Vista	Zulia
Luis Kuffner	Colegio Francia	Distrito Capital
Gabriela Martínez	Nª Sra. de Lourdes II	Anzoategui
Daniel Nieto	San Ignacio	Distrito Capital

Tercer Año

Medallas de Oro

Honorio Álvarez	Academia Washington	Distrito Capital
Rafael Aznar	Los Arcos	Distrito Capital

Medallas de Plata

Juan Comella	Bellas Artes	Zulia
José Guevara	Bella Vista	Aragua
Karen Taub	Moral y Luces	Distrito Capital

Medallas de Bronce

Sara Camacho	El Peñón	Distrito Capital
Maialen Lanz	Los Próceres	Bolívar
Oscar Lopera	Independencia	Lara
Carlos Nicolás	San Agustin	Zulia
Hugo Rivera	Bellas Artes	Zulia
Luis Uzcategui	Los Próceres	Bolívar

Menciones de Honor

Verónica Castro	Nª Sra. de Lourdes	Carabobo
Filippo Elmi	Claret	Zulia
Miguel Peña	Los Hipocampitos	Miranda
Samuel Valeri	Monseñor Bosset	Mérida

Cuarto Año

Medallas de Oro

Ricardo Mathison	El Peñón	Distrito Capital

Medallas de Plata

Jesús Colmenares	San Ignacio	Distrito Capital
Arnaldo Escalona	Cristo Rey	Carabobo
Luis Ruiz	Las Colinas	Lara

Medallas de Bronce

Luigi Annese	Bella Vista	Zulia
Jesús Bastardo	Iberoamericano	Bolívar
María Costantini	San Lázaro	Sucre
Juan Cramer	San José Maristas	Aragua
Fabiola Faddoul	CELAM	Monagas

Menciones de Honor

Alejandro Da Silva	Santiago De León	Distrito Capital

Quinto Año

Medallas de Oro

Evelin Hernao	Altamira	Zulia
Rubmary Rojas	San Vicente De Paúl	Lara
Mathias San Miguel	San Lázaro	Sucre

Medallas de Plata

Luis Medina	Andrés Eloy Blanco	Zulia
Daniel Núñez	Valle Alto	Miranda

Medallas de Bronce

Álvarez Luis	Bella Vista	Aragua
Cuticchia Gianpaolo	San José Maristas	Aragua
Dunia Pablo	Santiago De León	Distrito Capital
Estévez Víctor	Andrés Bello	Nueva Esparta
Jorge Elias	Bella Vista	Aragua
Liang Wei	Iberoamericano	Bolívar
Ocando Juan	República de Venezuela	Trujillo

Menciones de Honor

Marco González	El Peñón	Distrito Capital
Gabriel Valdez	Juan Jacobo Rousseau	Anzoátegui

Premios Especiales

Rubmary Rojas (San Vicente de Paul, Edo. Lara)

Premio de la Fundación Empresas Polar a la mejor prueba.

Luigi Annese (Bella Vista, Edo. Zulia)

Premio UNEXPO a la respuesta más creativa.

Prof. Larry Mendoza (Estado Vargas)

Premio *Eduardo Contreras* al Coordinador más destacado.

Olimpiada de Mayo 2013

Nivel I

Medallas de Bronce

Nombre	**Instituto**	**Ciudad**
Néstor Duarte	Los Hipocampitos	Miranda
Román Rodríguez	Monte Carmelo	Puerto Ordaz
Roberto Benatuil	Santiago de León	DC
Humberto Bravo	San Ignacio	DC
Roberto Patiño	Emil Friedman	DC
Matteo Sancio	Emil Friedman	DC
Valeria Valle	Santiago de León	DC

Menciones de Honor

José Hernao	Los Robles	Maracaibo
Arturo Poleo	San Vicente de Paúl	Barquisimeto
María Contreras	Monte Carmelo	Puerto Ordaz

Nivel II

Medallas de Plata

Miguel Romer	San Ignacio	DC
Eduardo Jerez	El Peñón	DC
Diego Santana	El Peñón	DC

Medallas de Bronce

Daniel Nieto	San Ignacio	DC
Sohrab Vafa	P.C.E.D.I	Aragua
Amanda Vanegas	San Francisco de Asis	Maracaibo
Oren Ben-Levy	Moral y Luces	DC

Menciones de Honor

Edgardo Colombo	San Francisco Javier	Barquisimeto
José Guevara	Bella Vista	Maracay
Miguel Peña	Los Hipocampitos	Miranda

Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2013

Rafael Aznar	Medalla de Bronce
Juan Cramer	Mención de Honor

Olimpiada Iberoamericana 2013

Rubmary Rojas	Medalla de Bronce
Rafael Aznar	Mención de Honor

Olimpiada Internacional (IMO) 2013

Rubmary Rojas	Mención de Honor

Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2013

Comité Organizador Nacional

Rafael Sánchez Lamoneda (Presidente)
Saturnino Fermín Reyes (Coordinador Administrativo)
José Heber Nieto Said (Coordinador Académico)
Laura Vielma Herrero (Coordinadora de Entrenamientos)
Sophia Taylor, Estefanía Ordaz, Diego Peña (Colaboradores)

Coordinadores Regionales

Prof. Luis Alberto Rodríguez (Anzoátegui)
Prof. Rafael Antonio Valdez Tovar (Apure)
Prof. Jesús Acosta (Aragua)
Prof. Orlando Mendoza (Aragua-Cagua-Turmero)
Prof. Mary Acosta (Bolívar)
Prof. Mirba Romero (Carabobo)
Prof. Addy Goitía (Falcón)
Prof. Carlos Lira (Guárico)
Prof. Víctor Carruci (Lara)
Prof. José Toloza (Mérida)
Prof. Lisandro Alvarado (Miranda)
Prof. Yelenny Guanipa (Monagas)
Prof. Emilia Valdez de Peña (Nueva Esparta)
Prof. María Nyhobe Martínez (Portuguesa)
Prof. Luisa López (Sucre)
Prof. Alvaro Mendoza (Táchira)
Prof. Ramón Blanco (Trujillo)
Prof. Larry Mendoza (Vargas)
Prof. José Heber Nieto Said (Zulia)
Prof. Lisbardo Serrudo (Zulia-Santa Bárbara)

Estefanía Ordaz. Participó como estudiante en varias olimpiadas internacionales en los años 2007 y 2008. Obtuvo menciones honoríficas en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe de 2007 y la Olimpiada Iberoamericana de Matemática de 2008. Actualmente, es estudiante de matemáticas en la Universidad Simón Bolívar. Es parte del equipo que entrena a los estudiantes para las Olimpiadas de Matemática y ha sido tutora de la delegación venezolana en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe de 2012 y en la Olimpiada Iberoamericana de Matemática de los años 2011 y 2013.

Sophia Taylor. Participó como estudiante en varias olimpiadas internacionales de matemática en los años 2005-2008. En ese período ganó una medalla de Bronce en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, y Menciones Honoríficas en la Olimpiada Internacional de Matemática y en la Olimpiada Iberoamericana de Matemática. Actualmente, es estudiante de física en la Universidad Central de Venezuela. Es parte del equipo que entrena a los estudiantes para las Olimpiadas. En el año 2013 fue Jefe de Delegación en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Colombia) y Tutora en la Olimpiada Internacional de Matemática (Panamá). En el 2014, será nuevamente la Tutora para la Olimpiada Internacional de Matemática a celebrarse en Sur Africa.

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y NATURALES

Association Le Kangourou des Mathématiques Kangourou sans frontiéres

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ofic. 331
Los Chaguaramos, Caracas 1020. Venezuela. Telefax: 212.6051512
email:asomatemat8@gmail.com. Página Web:www.acfiman.org