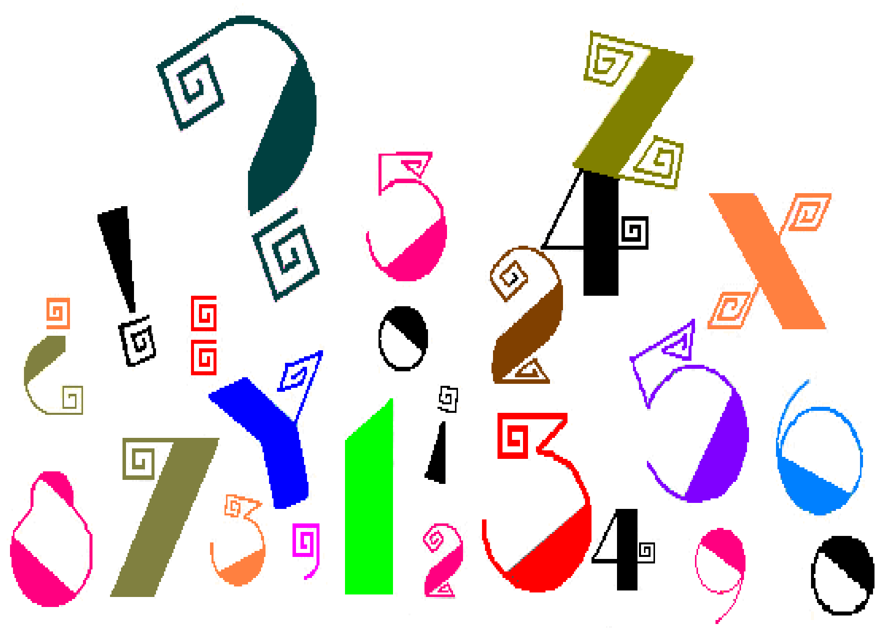
# OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

## *2015*

### *Problemas y Soluciones*

JOSÉ HEBER NIETO SAID RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA
LAURA VIELMA HERRER0



COLECCIÓN ESTUDIOS
DIVULGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS,
MATEMÁTICAS Y Y NATURALES

***José Heber Nieto Said***. Venezolano de origen uruguayo, es egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Buenos Aires, M.Sc. en Matemática y Dr. H.C. por la Universidad del Zulia (LUZ). Es profesor titular emérito de LUZ, donde fue Director del Departamento de Matemática y Computación, profesor de casi todas las materias dictadas por ese Departamento, proyectista de la Licenciatura en Computación y editor de revistas científicas. Ha escrito varios libros y artículos sobre diversos aspectos de la matemática. Es miembro de varias asociaciones académicas y profesionales (AMV, AVCM, MAA, AMS y CMS). En las olimpiadas matemáticas venezolanas ha participado desde hace más de quince años como entrenador, jefe o tutor de delegaciones, jurado y apoyo académico.

***Rafael Sánchez Lamoneda.*** Venezolano. Profesor Titular Jubilado de la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV. Egresado del Instituto Pedagógico de Caracas, M.Sc. en Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar y PhD en Matemáticas de Brandeis University, Massachusetts, USA. Ha escrito varios artículos sobre Algebra en revistas internacionales. Fue Jefe del Departamento de Matemáticas del Ivic y miembro de la Comisión de postgrado de ese Instituto y de la Escuela de Matemáticas de la UCV. Premio Erdös 2010, otorgado por la World Federation for National Mathematical Competitions. Premio al mejor trabajo en el área de Matemáticas otorgado por el Conicit en el año 1993. Ha trabajado en las Olimpiadas Matemáticas en Venezuela desde 1978, ha sido jefe o tutor de delegaciones del país en Olimpiadas de Matemáticas Internacionales desde 1981. Asesor de la Organización de Estados Ibero-americanos para la Educación la Ciencia y la Cultura, OEI, en el área de Matemáticas y Olimpiadas Matemáticas. Asesor en el área de Matemáticas de la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Pertenece a la directiva de la Asociación Matemática Venezolana desde hace más de diez años. En la actualidad es el Presidente de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas (ACM), Profesor del Programa de Maestría y Doctorado en la Universidad Antonio Nariño, Bogotá Colombia.

***Laura Vielma Herrero.*** Profesor de Matemáticas y de Inglés con menciones Magna Cum Laude de la UPEL-IPC, Caracas, Venezuela. Magíster en Ingeniería Industrial en el área de Investigación de Operaciones y Estadística de la Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia. Trabajó como asistente graduado y profesor en la Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. Profesor de la UPEL-IPC. Coordinador de proyectos y gerente de sector y territorio de una consultora internacional cuyas soluciones se enmarcan en el uso de modelos matemáticos para soportar la toma de decisiones en procesos industriales. Actualmente realiza estudios del Doctorado de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar Profesor y Jefe de Departamento de Matemáticas en la Academia Washington. Colabora activamente desde el año 2001 con el Programa de Olimpiadas Matemáticas de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM. Ha desempeñado el rol de entrenador, tutor y jefe de delegaciones venezolanas en competencias internacionales y se encarga de la realización del Calendario Matemático que publica la ACM.

# OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

## (OJM, OMCC, OIM, IMO)

# *2015*

## *Problemas y Soluciones*

**JOSÉ HEBER NIETO SAID**
**RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA**
**Y**
**LAURA VIELMA HERRERO**

**OLIMPIADA DE MATEMÁTICA 2015**

**COLECCIÓN ESTUDIOS**



Hecho el Depósito de Ley
**Deposito Legal:** DC2017001089
**ISBN:** 978-980-6195-50-9

**Diseño General:** Antonio Machado-Allison

**Diseño Carátula:** Claudia Nieto y Antonio Machado-Allison

# Índice general

# Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas son competencias dirigidas principalmente a jóvenes de escuela elemental y secundaria. Actualmente esta actividad se ha extendido por todo el mundo debido a su gran efectividad en la popularización de las matemáticas y en la detección de jóvenes con talento para el estudio de esta ciencia.

El presente libro reúne todos los problemas propuestos en la Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2015, así como aquellos de los eventos internacionales en los cuales participamos desde hace varios años. Estos fueron: la $56^a$ Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) celebrada en Chiang Mai, Tailandia, del 4 al 16 de julio; la XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe (OMCC) celebrada en Cuernavaca, México del 9 al 26 de junio y la XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM), celebrada en Mayagüez, Puerto Rico, del 7 al 14 de noviembre. Las tres competencias son de carácter presencial. Cada una de ellas consta de dos exámenes, presentados en días consecutivos. Cada prueba tiene 3 problemas y los participantes disponen de cuatro horas y media para resolverlos. El valor de cada pregunta es de 7 puntos, para un máximo posible de 42 puntos en la competencia. Los ganadores reciben medallas de oro, plata o bronce y mención honorífica, según haya sido su desempeño. También incluimos en este libro los problemas de la Olimpiada Matemática de Mayo, competencia por correspondencia que se plantea a dos niveles, para alumnos no mayores de 13 y 15 años, y que es de carácter iberoamericano. Agradecemos a la Fundación Olimpiada Matemática Argentina, organizadores de esta competencia, por permitirnos publicar aquí los problemas y sus soluciones. Todos los estudiantes que participaron en los eventos internacionales mencionados ganaron algún premio, bien sea medallas o menciones honoríficas. Al final del libro aparece la lista de alumnos ganadores en estas competencias y los premios que obtuvieron.

La OJM consta de tres etapas o pruebas. La primera de ellas es el *Canguro Matemático*, un examen de treinta problemas de selección simple, que fue presentado por 43127 estudiantes provenientes de 21 regiones del país, Los estudiantes presentan la prueba en sus colegios. La segunda etapa de la competencia es la *Prueba Final Regional*. La misma consta de un examen de cuatro problemas de desarrollo y compiten los alumnos que quedaron ubicados en el nueve por ciento superior en el Canguro Matemático. La Prueba Regional la presentan juntos todos los estudiantes de cada estado, en una sede previamente seleccionada por el coordinador local y los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce. La tercera y última fase es la *Prueba Final Nacional*, la misma consta de un examen de cuatro problemas de desarrollo y en ella participan los alumnos ganadores de medalla de oro en la Prueba Final Regional. Para la Final Nacional se elige cada año una sede y allí se organiza el evento, permitiendo a los participantes, sus profesores y representantes estrechar lazos de amistad y compartir una experiencia educativa enriquecedora. La Prueba Final Nacional 2015 se realizó en la *Universidad de Carabobo*, y participaron 98 alumnos representando a 17 estados.

Esta obra consta de siete capítulos, en los tres primeros se estudian los problemas de la OJM, dedicando un capítulo a cada fase de la competencia. Los últimos cuatro capítulos versan sobre las competencias internacionales. En ellos se presentan los problemas y sus soluciones. Al final del libro incluimos un glosario de conceptos matemáticos que son utilizados a los largo del texto. Esperamos que este libro sea de gran utilidad tanto para profesores como para estudiantes, y que les permita conocer las matemáticas desde un punto de vista interesante y entretenido.

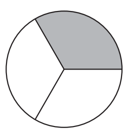
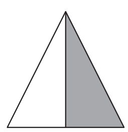
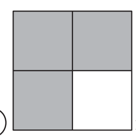
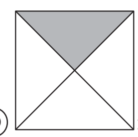
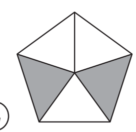
No queremos terminar esta introducción sin agradecer a nuestros patrocinadores, en especial a la *Fundación Empresas Polar*, a la *Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales*, a la *Facultad de Ciencias de la UCV* junto a la *Fundación Amigos de Ciencias*, a la *Universidad Simón Bolívar*, la *Universidad Rafael Urdaneta*, a *Acumuladores Duncan*, a la *Fundación I Love Venezuela*, a la *Fundación Miguel Cabrera*, a la *Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman*, a todos los exolímpicos que desde los lugares más apartados del mundo contribuyeron para poder llevar a nuestros equipos a las competencias internacionales, así como a todos los colegas que con su trabajo y esfuerzo, permiten que la Olimpiada Juvenil de Matemáticas sea una realidad.

# Capítulo 1

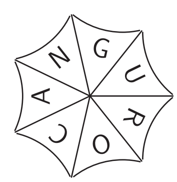
# Prueba Canguro

## 1.1. Prueba de Primer Año y Segundo Año

**Problema 1.** ¿Qué figura tiene sombreada exactamente la mitad de su área?

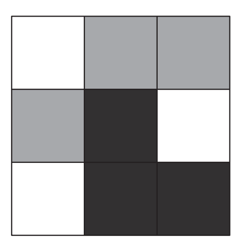
Ⓐ  ; Ⓑ  ; Ⓒ  ; Ⓓ  ; Ⓔ  .

**Problema 2.** Mi sombrilla tiene la palabra CANGURO pintada encima, como se ve en la figura. ¿Cuál de las figuras siguientes NO corresponde a mi sombrilla?



Ⓐ  ; Ⓑ  ; Ⓒ  ; Ⓓ  ; Ⓔ  .

**Problema 3.** Alberto pintó los 9 cuadrados con los colores blanco, gris y negro, como muestra la figura. ¿Cuál es la menor cantidad de cuadrados que tiene que repintar para que no haya dos cuadrados del mismo color con un lado común?

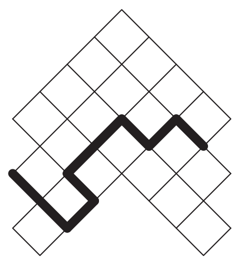


Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ 4; Ⓓ 5; Ⓔ 6.

**Problema 4.** Juan tiene 10 gallinas. Cinco de ellas ponen un huevo cada día. Las otras cinco ponen un huevo cada dos días. ¿Cuántos huevos ponen las 10 gallinas en un período de 10 días?

(A) 10; (B) 25; (C) 50; (D) 60; (E) 75.

**Problema 5.** La figura muestra un tablero en el que cada casilla es cuadrada y tiene un área de 4 $\text{cm}^2$. ¿Cuál es la longitud de la línea negra gruesa?

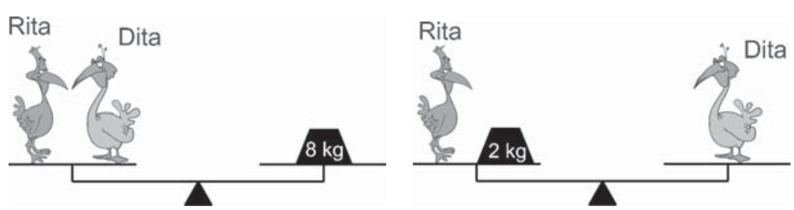


(A) 16 cm; (B) 18 cm; (C) 20 cm; (D) 21 cm; (E) 23 cm.

**Problema 6.** ¿Cuál de las siguientes fracciones es menor que 2?

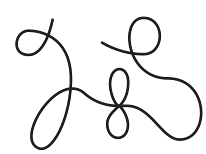
(A) $\frac{19}{8}$; (B) $\frac{20}{9}$; (C) $\frac{21}{10}$; (D) $\frac{22}{11}$; (E) $\frac{23}{12}$.

**Problema 7.** ¿Cuánto pesa Dita?




(A) 3 kg; (B) 2 kg; (C) 4 kg; (D) 6 kg; (E) 5 kg.

**Problema 8.** Pedro mira con una lupa diferentes partes de un dibujo en una pared. ¿Cuál es la figura que él NO puede ver?

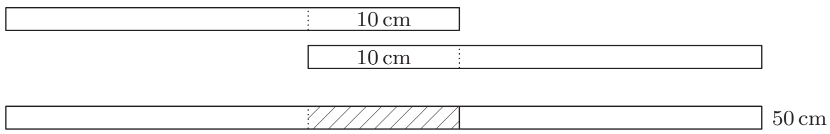


(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

**Problema 9.** En el jardín de Carmen cada planta tiene, o bien 2 hojas y una flor, o bien 5 hojas y ninguna flor. Si en total hay 32 hojas y 6 flores, ¿cuántas plantas hay en el jardín?

Ⓐ 13; Ⓑ 12; Ⓒ 15; Ⓓ 10; Ⓔ 16.

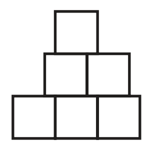
**Problema 10.** Alba tiene 4 cintas de papel de la misma longitud. Ella pega 2 cintas con 10 cm de superposición, y obtiene una cinta de 50 cm de longitud.




Pegando las otras dos cintas, Alba quiere formar una cinta de 56 cm de longitud. ¿En cuántos centímetros las debe superponer?

Ⓐ 4 cm; Ⓑ 6 cm; Ⓒ 8 cm; Ⓓ 10 cm; Ⓔ 12 cm.

**Problema 11.** Tomás formó la figura que se muestra usando 6 cuadrados de lado 1. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

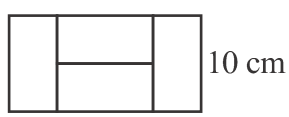


Ⓐ 13; Ⓑ 12; Ⓒ 11; Ⓓ 10; Ⓔ 9.

**Problema 12.** Cada día María escribe el número del día y el número del mes y suma los dígitos escritos. Por ejemplo el 19 de marzo ella escribe 19 03 y calcula la suma $1 + 9 + 0 + 3 = 13$. ¿Cuál es el mayor resultado que puede obtener, a lo largo del año?

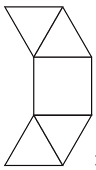
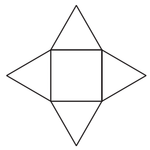
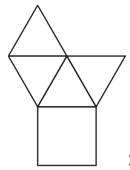
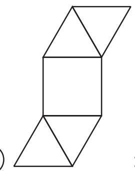
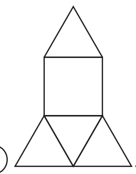
Ⓐ 14; Ⓑ 7; Ⓒ 20; Ⓓ 13; Ⓔ 16.

**Problema 13.** Con cuatro rectángulos pequeños idénticos se forma un rectángulo grande, como muestra la figura. Si el lado menor del rectángulo grande mide 10 cm, ¿cuánto mide su lado mayor?




Ⓐ 40 cm; Ⓑ 30 cm; Ⓒ 20 cm; Ⓓ 10 cm; Ⓔ 5 cm.

**Problema 14.** ¿Cuál de las siguientes figuras no permite armar una pirámide?

(A)  ; (B)  ; (C)  ; (D)  ; (E) .

**Problema 15.** En la calle del Salto hay 9 casas en fila. En cada casa vive por lo menos una persona. En cualquier par de casas vecinas, viven en total 6 personas como máximo. ¿Cuál es el mayor número posible de personas que viven en la calle del Salto?

(A) 23; (B) 27; (C) 25; (D) 31; (E) 29.

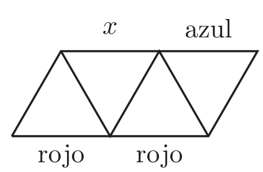
**Problema 16.** Lucía y su mamá nacieron ambas en el mes de enero. Si hoy, 19 de marzo de 2015, sumamos el año en que nació Lucía, el año en que nació su mamá, la edad de Lucía y la edad de su mamá, ¿qué resultado se obtiene?

(A) 4028; (B) 4029; (C) 4030; (D) 4031; (E) 4032.

**Problema 17.** El área de un rectángulo es 12 $\text{cm}^2$. Cada uno de sus lados mide un número entero de centímetros. ¿Cuál de los siguientes puede ser el perímetro del rectángulo?

(A) 48 cm; (B) 32 cm; (C) 28 cm; (D) 26 cm; (E) 20 cm.

**Problema 18.** Cada uno de los 9 segmentos de la figura se debe pintar de azul, de rojo o de verde, pero de tal manera que los tres lados de cada triángulo sean de colores diferentes. Tres segmentos ya han sido pintados, con los colores que se indican en la figura. ¿De qué color se puede pintar el segmenro marcado $x$?

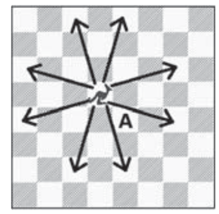



(A) sólo de azul; (B) sólo de rojo; (C) sólo de verde;
(D) de azul, de verde o de rojo; (E) es imposible lograrlo.

**Problema 19.** En una bolsa hay 3 manzanas verdes, 5 manzanas amarillas, 7 peras verdes y 2 peras amarillas. Simón saca frutas de la bolsa, una a una y al azar. ¿Cuál es el mínimo número de frutas que debe sacar para estar seguro de haber sacado al menos una pera y una manzana del mismo color?

(A) 13; (B) 12; (C) 11; (D) 10; (E) 9.

**Problema 20.** Introduzcamos una nueva pieza de ajedrez llamada *canguro*. En cada movimiento el canguro salta 3 casillas en dirección vertical y una casilla en dirección horizontal, o 3 casillas en dirección horizontal y una casilla en dirección vertical, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el mínimo número de movimientos que el canguro necesita para ir desde la posición que ocupa en el tablero hasta la casilla marcada A?




(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5; (E) 6.

**Problema 21.** En la suma siguiente, letras iguales representan dígitos iguales y letras diferentes representan dígitos diferentes. ¿Qué dígito representa la letra $X$?

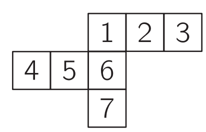
$$\begin{array}{cccc} & & & X \\ + & & & X \\ + & & Y & Y \\ \hline & Z & Z & Z \end{array}$$

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5; (E) 6.

**Problema 22.** Juana compró tres juguetes. Por el primero pagó la mitad de todo su dinero más 10 Bs. Por el segundo pagó la mitad del dinero que le quedaba más 20 Bs. Por el tercero pagó la mitad del dinero que le quedaba más 30 Bs, y se quedó sin dinero. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente?

(A) 360 Bs; (B) 450 Bs; (C) 340 Bs; (D) 650 Bs; (E) 1000 Bs.

**Problema 23.** Carla desea construir un cubo a partir de su desarrollo en una hoja de papel. Pero por error ella dibujó 7 cuadrados en vez de 6. ¿Qué cuadrado debe remover para que le quede una figura conectada con la cual pueda armar un cubo?




(A) sólo el 4; (B) sólo el 7; (C) sólo el 3 ó el 4;
(D) sólo el 3 ó el 7; (E) sólo el 3, el 4 ó el 7.

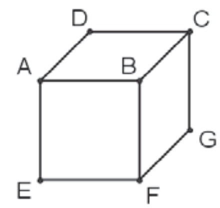
**Problema 24.** El número 100 se multiplica por 2 o por 3. Al resultado se le suma 1 o 2. El nuevo resultado se divide entre 3 o entre 4. El resultado final es un número entero. ¿Cuál es ese resultado?

(A) 67; (B) 68; (C) 50; (D) 51; (E) Hay más de un resultado posible.

**Problema 25.** En el número de 4 dígitos $ABCD$, los dígitos cumplen $A < B < C < D$. ¿Cuál es el mayor valor posible de la diferencia $BD - AC$ entre los números de 2 dígitos $BD$ y $AC$?

(A) 50; (B) 16; (C) 61; (D) 56; (E) 86.

**Problema 26.** Ana escribió un número en cada cara de un cubo. Luego, para cada vértice, ella sumó los números de las tres caras que comparten ese vértice (por ejemplp, para el vértice $B$, sumó los números en las caras $BCDA$, $BAEF$ y $BFGC$). Los números calculados por Ana para los vértices $C$, $D$ y $E$ fueron 14, 16 y 24, respectivamente. ¿Qué número obtuvo para el vértice $F$?

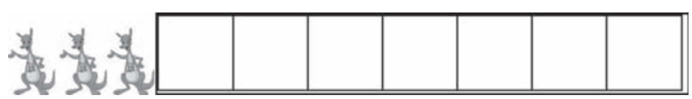



Ⓐ 22; Ⓑ 15; Ⓒ 24; Ⓓ 19; Ⓔ 26.

**Problema 27.** Un tren consta de una locomotora y 12 vagones, que se numeran consecutivamente del 1 al 12, siendo el 1 el vagón más cercano a la locomotora. Cada vagón está dividido en compartimientos, con el mismo número de compartimientos en cada vagón. Los compartimientos también se numeran consecutivamente desde el 1, comenzando por el más cercano a la locomotora. Miguel se encuentra en el tercer vagón, en el compartimiento 18. Marta se encuentra en el séptimo vagón, en el compartimiento 50. ¿Cuántos compartimientos hay en cada vagón?

Ⓐ 7; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 10; Ⓔ 12.

**Problema 28.** ¿De cuántas maneras se pueden ubicar los 3 canguros en 3 casillas diferentes de manera que no haya canguros en casillas vecinas?



Ⓐ 7; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 10; Ⓔ 11.

**Problema 29.** En una línea se marcan cuatro puntos. Las distancias entre ellos, en orden creciente, son 2, 3, $k$, 11, 12, 14. ¿Cuál es el valor de $k$?

Ⓐ 5; Ⓑ 7; Ⓒ 6; Ⓓ 9; Ⓔ 8.

**Problema 30.** Basilio usó cubitos de lado 1 para construir un cubo de lado 4. Luego pintó tres caras de ese cubo de rojo, y las otras tres caras de azul. Cuando terminó, no quedó ningún cubito con tres caras rojas. ¿Cuántos cubitos tienen al menos una cara roja y otra azul?

Ⓐ 0; Ⓑ 8; Ⓒ 12; Ⓓ 24; Ⓔ 32.

### 1.1.1. Soluciones

**1.** La respuesta correcta es la (B), el triángulo.

**2.** La respuesta correcta es la (C). La $R$ está al revés.

**3.** La respuesta correcta es la (A). Es claro que debe pintar al menos dos cuadrados, uno gris y uno negro. întando el segundo gris de la primera fila de negro y el primer negro de la fila de abajo de gris, se logra lo deseado.

**4.** La respuesta correcta es la (E). Las cinco gallinas que ponen un huevo diario, aportan 50 huevos en diez días. Las que ponen uno interdiario aportan 25. En total, en 10 días ponen 75 huevos.

**5.** La respuesta correcta es la (B). Como los cuadrados tienen 4 cm$^2$ de área, cada lado mide 2 cm. La línea gruesa recorre 9 lados, por lo tanto su longitud es 18 cm.

**6.** La respuesta correcta es la (E): $\frac{23}{12} < \frac{24}{12} = 2$.

**7.** La respuesta correcta es la (E). Sea $D$ el peso de Dita y $R$ el peso de Rita. La primera balanza nos dice que $R + D = 8$. La segunda balanza nos dice que $R + 2 = D$. Restando miembro a miembro resulta $D - 2 = 8 - D$, es decir $2D = 10$ y $D = 5$.

**8.** La respuesta correcta es la (E).

**9.** La respuesta correcta es la (D). Hay 6 plantas con flores, que aportan también 12 hojas. Nos faltan 20 hojas para 32, que son aportadas por 4 plantas de cinco hojas cada una. En total son 10 plantas.

**10.** La respuesta correcta es la (A). De la figura se concluye que si $x$ es la longitud de la parte que no se superpone, entonces $2x + 10 = 50$. Por lo tanto $x = 20$ y la tira mide 30 cm. Para poder hacer una tira de 56 cm debemos superponer $30 + 39 - 56 = 4$ cm.

**11.** La respuesta correcta es la (B). La base mide 3 cm. Los otros 5 segmentos horizontales del perímetro también miden 3 cm, y los 6 segmentos verticales miden 6 cm, para un total de 12 cm.

**12.** La respuesta correcta es la (C). La mayor suma se obtendrá el 29 de septiembre: $2 + 9 + 0 + 9 = 20$.

**13.** La respuesta correcta es la (C). La figura muestra que el lado mayor de los rectángulos pequeños mide 10 cm, y el lado menor 5 cm. Luego el lado mayor del rectángulo grande nide $5 + 10 + 5 = 20$ cm.

**14.** La respuesta correcta es la (A). Al doblar por los bordes habrá dos triángulos que se solapan, y una cara queda hueca.

**15.** La respuesta correcta es la (E), 29. En las primeras 8 casas, tomándolas de a pares, viven a lo sumo $6 \times 4 = 24$ personas. Como en la octava vive al menos una persona, en la novena viven a lo sumo 5, y en total hay a lo sumo $24 + 5 = 29$, que se puede obtener con la disposición 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5.

**16.** La respuesta correcta es la (C). Si Lucía nació en el año $x$ entonces su edad es $2015 - x$. Análogamente si su mamá nació en el año $y$, su edad es $2015 - y$. Luego la suma pedida es $x + y + (2015 - x) + (2015 - y) = 4030$.

**17.** La respuesta correcta es la (D). Llamemos $a$ y $b$ a los lados del rectángulo. Como su área es $12cm^2$, tenemos que $ab = 12$. Ahora bien, como $a$ y $b$ son números naturales, sólo pueden ser 3 y 4, 2 y 6 o 1 y 12 (en algún orden). Luego hay tres posibles valores para el perímetro; 14, 16 y 26.

**18.** La respuesta correcta es la (B). El único color posible para el segmento marcado con $x$ es el rojo.

**19.** La respuesta correcta es la (A). Si saca 12 o menos, podrían ser todas manzanas amarillas o peras verdes. Pero si saca 13 frutas, debe sacar frutas de al menos tres tipos diferentes, y por lo tanto habrá dos de la misma especie y color.

**20.** La respuesta correcta es la (B). Es fácil ver que no se puede lograr en 1 ni en 2 movimientos. Pero en 3 sí: si se marcan las columnas de a hasta h y las filas de 1 a 8, como en el ajedrez, el canguro se encuentra inicialmente en d5 y hay que llevarlo a e4. Una forma de hacerlo es d5-g6-d7-e4.

**21.** La respuesta correcta es la (E). Como $Z$ aparece en las centenas del resultado, sólo puede ser $Z = 1$ y como resultado de un acarreo al sumar la columna de las decenas. Para ello debe ser $Y = 9$ y debe haber un acarreo de 2 al sumar la columna de las unidades. Para ello debe ser $X = 6$.

**22.** La respuesta correcta es la (C). Sea $x$ la cantidad de dinero inicial. Entonces por el primer juguete pagó $x/2 + 10$ y le quedaron $x - (x/2 + 10) = x/2 - 10$. Por el segundo juguete pagó la $(x/2 - 10)/2 + 20 = x/4 + 15$ y le quedaron $x/2 - 10 - (x/4 + 15) = x/4 - 25$. Por el tercer juguete pagó $(x/4 - 25)/2 + 40$ y no le quedó nada, es decir $x/4 - 25 - (x/8 - 25/2 + 40) = 0$, de donde $x/8 - 25/2 - 40 = 0$ y $x = 8(25/2 + 40) = 340$. Este problema también se puede resolver por razonamiento retrospectivo.

**23.** La respuesta correcta es la (D). Si se trata de armar el cubo como está, las caras 3 y 7 se solapan. Luego, es necesario quitar una de las dos.

**24.** La respuesta correcta es la (A). Luego de la primera operación se tiene 200 u 300. Luego de la segunda, se tiene 201, 202, 301 o 302. Pero 202, 301 y 302 no son divisibles entre 3 ni entre 4. Luego el único resultado posible es $201/3 = 67$.

**25.** La respuesta correcta es la (C). La mayor diferencia se logra para el número 1789 y es $79 - 18 = 61$.

**26.** La respuesta correcta es la (A). Observe que la suma de los números en dos vértices opuestos, como $C$ y $E$, es igual a la suma de los números escritos en las seis caras del cubo. Por lo tanto $C + E = D + F$ y $F = C + E - D = 14 + 24 - 16 = 22$.

**27.** La respuesta correcta es la (B). Si hay $k$ compartimientos por vagón, entonces los compartimientos del vagón $n$ van del $(n-1)k + 1$ al $nk$. Luego $2k + 1 \leq 18 \leq 3k$ y $6k + 1 \leq 50 \leq 7k$. De estas últimas desigualdades se sigue que $50/7 \leq k \leq 49/6$, que se cumple únicamente si $k = 8$. Este valor también satisface las primeras desigualdades, luego la respuesta es $k = 8$.

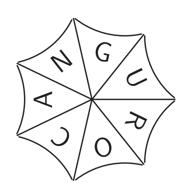
**28.** La respuesta correcta es la (D). Numeremos las celdas del 1 al 7. Las ubicaciones aceptables para los canguros son entonces $(1, 3, 5)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 3, 7)$, $(1, 4, 6)$, $(1, 4, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 4, 7)$, $(2, 5, 7)$ y $(3, 5, 7)$, 10 en total. Otra solución: deben quedar 4 casillas vacías y los canguros sólo pueden ir entre dos de esas celdas (3 posiciones), en el extremo izquierdo o en el extremo derecho, para un total de 5 posiciones posibles. Luego la respuesta es $\binom{5}{3} = 10$.

**29.** La respuesta correcta es la (D). Escojamos un sentido en la recta y asignemos abscisa 0 al punto más a la izquierda y 14 al que está más a la derecha. Como no hay diferencia 1 ni 13, no puede haber puntos en 1 ni 13, luego para realizar la distancia 12 uno de los puntos debe ser 2 ó 12. Supongamos que es el 2 (la otra alternativa es simétrica). Entonces para realizar la distancia 11 el punto restante debe ser 11 (ya que no puede ser 3 ni 13), y $k$ debe ser $11 - 2 = 9$.

**30.** La respuesta correcta es la (D). En ningún vértice del cubo grande concurren tres caras rojas, y tampoco tres azules pues las opuestas serían rojas y concurrirían en el vértice opuesto. Luego las tres caras rojas forman una U y lo mismo las azules. Los 8 cubitos en los vértices tienen dos caras de un color y otra del otro. De las 12 aristas hay 2 que limitan con caras azules, 2 que limitan con caras rojas y 8 que limitan con una cara roja y otra azul. Los dos cubitos centrales de estas 8 aristas tienen una cara de cada color, y son $2 \times 8 = 16$. Luego la respuesta es $8 + 16 = 24$.

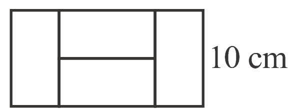
## 1.2. Prueba de Tercer Año

**Problema 1.** Mi sombrilla tiene la palabra CANGURO pintada encima, como se ve en la figura. ¿Cuál de las figuras siguientes NO corresponde a mi sombrilla?



(A)  ; (B)  ; (C)  ; (D)  ; (E)  .

**Problema 2.** Con cuatro rectángulos pequeños idénticos se forma un rectángulo grande, como muestra la figura. Si el lado menor del rectángulo grande mide 10 cm, ¿cuánto mide su lado mayor?

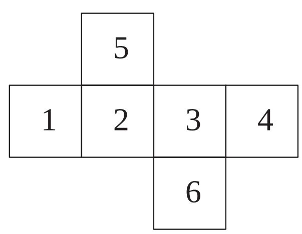



(A) 40 cm; (B) 30 cm; (C) 20 cm; (D) 10 cm; (E) 5 cm.

**Problema 3.** ¿Cuál de los números siguientes es el más próximo a $2{,}015 \times 510{,}2$?

(A) 1000; (B) 100; (C) 10; (D) 1; (E) 0,1.

**Problema 4.** El diagrama muestra el desarrollo de un cubo con las caras numeradas. Mario suma correctamente los números en cada par de caras opuestas. ¿Cuáles son los tres resultados que obtiene?




(A) 4, 5, 12; (B) 5, 6, 10; (C) 5, 7, 9; (D) 5, 8, 8; (E) 4, 6, 11.

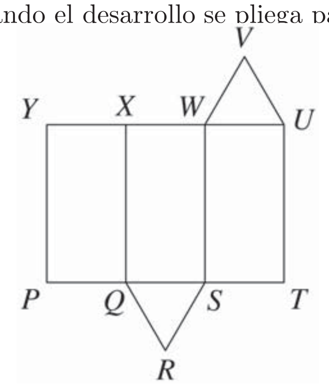
**Problema 5.** ¿Cuál de los siguientes números no es un entero?

(A) $\frac{2015}{5}$; (B) $\frac{2014}{4}$; (C) $\frac{2013}{3}$; (D) $\frac{2012}{2}$; (E) $\frac{2011}{1}$.

**Problema 6.** Juan tarda 130 minutos en ir de su casa a la de su abuela pasando por la de su tía. Si de su casa a la de su tía tarda 35 minutos, ¿cuánto tarda de la casa de su tía a la de su abuela?

(A) 175 minutos; (B) 115 minutos; (C) 165 minutos;
(D) 105 minutos; (E) 95 minutos.

**Problema 7.** El diagrama muestra el desarrollo de un prisma triangular. ¿Cuál arista coincide con la arista $UV$ cuando el desarrollo se pliega para formar el prisma?

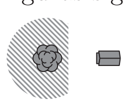
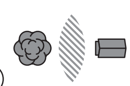
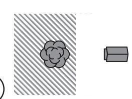
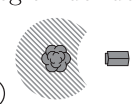
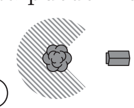



Ⓐ $RS$; Ⓑ $WV$; Ⓒ $XW$; Ⓓ $QR$; Ⓔ $XY$.

**Problema 8.** Un triángulo tiene lados de longitudes 6, 10 y 11. Un triángulo equilátero tiene el mismo perímetro. ¿Cuánto mide el lado del triángulo equilátero?

Ⓐ 6; Ⓑ 10; Ⓒ 18; Ⓓ 11; Ⓔ 9.

**Problema 9.** Cuando la ardilla Marta baja de su árbol, nunca se aleja más de 5 m del tronco. Además siempre permanece alejada 5 m o más de la casilla del perro. ¿Cuál de las figuras siguientes describe mejor la forma de la región donde Marta puede moverse?

Ⓐ  ; Ⓑ  ; Ⓒ  ; Ⓓ  ; Ⓔ  .

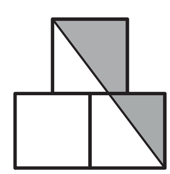
**Problema 10.** Un ciclista va a una velocidad de 5 m/s. Las ruedas de la bicicleta tienen una circunferencia de 125 cm. ¿Cuántas vueltas completas da cada rueda en 5 segundos?

Ⓐ 20; Ⓑ 4; Ⓒ 10; Ⓓ 5; Ⓔ 25.

**Problema 11.** En una clase no hay dos varones que hayan nacido en el mismo día de la semana ni dos niñas que hayan nacido en el mismo mes. Pero si un nuevo niño o niña se agregase a la clase, alguna de las dos condiciones se dejaría de cumplir. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

Ⓐ 18; Ⓑ 19; Ⓒ 20; Ⓓ 24; Ⓔ 25.

**Problema 12.** En la figura, el centro del cuadrado superior está directamente arriba del lado común de los dos cuadrados inferiores. Cada cuadrado tiene lados de 1 cm de longitud. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Ⓐ $\frac{3}{4}$; Ⓑ $\frac{7}{8}$; Ⓒ 1; Ⓓ $1\frac{1}{4}$; Ⓔ $1\frac{1}{2}$.

**Problema 13.** Cada asterisco en la expresión $2*0*1*5*2*0*1*5*2*0*1*5=0$ debe ser reemplazado por un signo $+$ o $-$ de manera que la igualdad sea correcta. ¿Cuál es el mínimo número de asteriscos que deben ser reemplazados por $+$?

(A) 3; (B) 1; (C) 2; (D) 5; (E) 4.

**Problema 14.** Durante una lluvia cayeron 15 litros de agua por metro cuadrado. ¿Cuánto se elevó el nivel del agua en la piscina?

(A) 1,5 cm; (B) 0,15 cm; (C) 150 cm; (D) 15 cm;
(E) Depende del tamaño de la piscina.

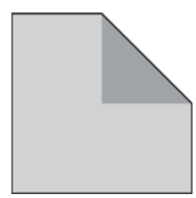
**Problema 15.** Un arbusto tiene 10 ramas. Cada rama tiene, o bien 2 hojas y una flor, o bien 5 hojas y ninguna flor. ¿Cuál puede ser el número total de hojas del arbusto?

(A) 45; (B) 39; (C) 37; (D) 31; (E) Ninguno de los anteriores.

**Problema 16.** El promedio de notas de los estudiantes que presentaron un examen de matemáticas fue 12. Exactamente el 60 % de los estudiantes aprobaron el examen. El promedio de los estudiantes aprobados fue 16. ¿Cuál fue el promedio de los estudiantes aplazados?

(A) 5; (B) 7; (C) 6; (D) 9; (E) 8.

**Problema 17.** Una esquina de un cuadrado se dobla llevando el vértice al centro del cuadrado, formándose un pentágono irregular. Las áreas del pentágono y del cuadrado son enteros consecutivos. ¿Cuál es el área del cuadrado?

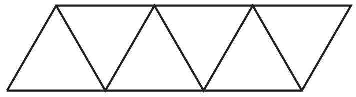


(A) 4; (B) 2; (C) 16; (D) 8; (E) 32.

**Problema 18.** Ximena sumó las longitudes de tres lados de un rectángulo y obtuvo 44 cm. Yajaira sumó las longitudes de tres lados del mismo rectángulo y obtuvo 40 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

(A) 42 cm; (B) 56 cm; (C) 64 cm; (D) 84 cm; (E) 112 cm.

**Problema 19.** La figura indica los colores de 4 segmentos de un diseño. Luis quiere pintar cada uno de los 9 segmentos restantes de rojo, verde o azul, de manera que cada triángulo tenga sus tres lados de diferentes colores. ¿Qué color puede usar Luis para el segmento marcado con la $x$?

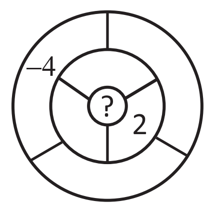



Ⓐ sólo verde; Ⓑ sólo rojo; Ⓒ sólo azul; Ⓓ rojo o azul; Ⓔ ninguno.

**Problema 20.** La maestra preguntó a sus 5 alumnos cuántos de ellos habían estudiado la lección. Noemí dijo que ninguno, Ulises dijo que uno, Dora dijo que dos, Tomás dijo que tres y Cristina dijo que cuatro. La maestra sabe que los que estudiaron dijeron la verdad, y los que no estudiaron mintieron. ¿Cuántos alumnos estudiaron?

Ⓐ 0; Ⓑ 1; Ⓒ 2; Ⓓ 3; Ⓔ 4.

**Problema 21.** Rita desea escribir un número en cada una de las 7 regiones acotadas del diagrama. Dos regiones se dicen vecinas si comparten parte de su frontera. El número en cada región debe ser la suma de los números en sus regiones vecinas. Rita ya ha escrito dos de los números. ¿Qué número debe escribir en la región central?

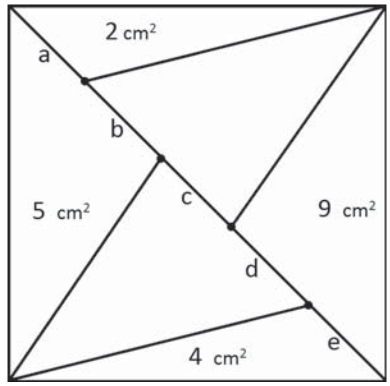



Ⓐ $-4$; Ⓑ $-2$; Ⓒ 0; Ⓓ 1; Ⓔ 6.

**Problema 22.** Pedro tiene cinco tarjetas. En cada una de ellas escribió un entero positivo (no necesariamente todos diferentes). Luego calculó la suma de los números en cada par de tarjetas, y obtuvo solamente tres resultados diferentes: 57, 70, y 83. ¿Cuál es el mayor de los números que escribió?

Ⓐ 35; Ⓑ 42; Ⓒ 48; Ⓓ 53; Ⓔ 82.

**Problema 23.** Una diagonal de un cuadrado se divide en 5 segmentos $a$, $b$, $c$, $d$ y $e$. Los extremos de esos segmentos se unen con los vértices del cuadrado como muestra la figura, quedando así el cuadrado dividido en 6 triángulos. Las áreas de algunos de esos triángulos se indican en la figura. El área del cuadrado es 30 cm$^2$.



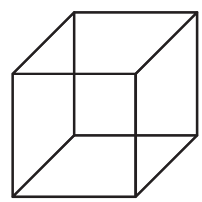

¿Cuál de los 5 segmentos de la diagonal es el más largo?

Ⓐ a; Ⓑ b; Ⓒ c; Ⓓ d; Ⓔ e.

**Problema 24.** En un grupo de canguros, los dos canguros más livianos pesan el 25 % del peso total del grupo. Los tres más pesados pesan el 60 % del peso total del grupo. ¿Cuántos canguros hay en el grupo?

Ⓐ 6; Ⓑ 7; Ⓒ 8; Ⓓ 15; Ⓔ 20.

**Problema 25.** Cirilo tiene siete trozos de alambre de longitudes 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm y 7 cm. Usando algunos de esos trozos arma un cubo con lados de longitud 1 cm, sin superposición de alambres. ¿Cuál es el menor número de trozos con los cuales puede lograrlo?



Ⓐ 2; Ⓑ 1; Ⓒ 4; Ⓓ 3; Ⓔ 5.

**Problema 26.** $P$, $Q$, $R$, y $S$ son los vértices de un trapecio, recorridos en sentido horario. Los lados $PQ$ y $SR$ son paralelos. El ángulo $RSP$ mide $120°$ y $RS = SP = \frac{1}{3}PQ$. ¿Cuánto mide el ángulo $PQR$?

Ⓐ 30°; Ⓑ 15°; Ⓒ 25°; Ⓓ 22,5°; Ⓔ 45°.

**Problema 27.** En una línea recta están marcados 5 puntos. Alex mide las distancias entre cada par de ellos y obtiene, en orden creciente: 2, 5, 6, 8, 9, $k$, 15, 17, 20 y 22. ¿Cuál es el valor de $k$?

Ⓐ 10; Ⓑ 14; Ⓒ 11; Ⓓ 13; Ⓔ 12.

**Problema 28.** Ayer anoté en mi agenda el número telefónico de mi amigo Edgardo. El número que anoté tiene 6 dígitos, pero debería tener 7. No tengo idea de qué dígito olvidé anotar, ni de cuál era su posición en el número. ¿Cuántos números diferentes tendré que ensayar para estar seguro de dar con el correcto?

Nota: Un número telefónico puede comenzar con cualquier dígito, incluso con el 0.

Ⓐ 60; Ⓑ 55; Ⓒ 70; Ⓓ 64; Ⓔ 80.

**Problema 29.** María divide 2015 sucesivamente entre 1, 2, 3,. . . , 1000 y escribe el resto obtenido en cada división. ¿Cuál es el mayor de esos mil restos?

Ⓐ 15; Ⓑ 1007; Ⓒ 215; Ⓓ 671; Ⓔ otro valor.

**Problema 30.** Se desea colorear cada entero positivo de rojo o de verde, de manera que:

(i) La suma de dos números rojos diferentes es un número rojo.
(ii) La suma de dos números verdes diferentes es un número verde.

¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer eso?

Ⓐ 0; Ⓑ 2; Ⓒ 4; Ⓓ 6; Ⓔ más de 6.

### 1.2.1. Soluciones

**1.** La respuesta correcta es la (B). La letra $R$ está mal.

**2.** La respuesta correcta es la (C), $5 + 10 + 5 = 20$.

**3.** La respuesta correcta es la (A), ya que $2{,}015 \times 510{,}2 > 2 \times 500 = 1000$.

**4.** La respuesta correcta es la (E), $4 = 3 + 1$, $6 = 4 + 2$ y $11 = 5 + 6$.

**5.** La respuesta correcta es la (B), ya que 2014 no es divisible entre 4.

**6.** La respuesta correcta es la (E), $130 - 35 = 95$.

**7.** La respuesta correcta es la (E). Al plegar el modelo los puntos $Y$ y $U$ coinciden y también los puntos $X$ y $V$. Así pues $XY$ coincide con $UV$.

**8.** La respuesta correcta es la (E). Como el perímetro es igual a $6 + 10 + 11 = 27$, entonces el lado del triángulo equilátero es $27/3 = 9$.

**9.** La respuesta correcta es la (D). La ardilla permanece dentro del círculo de centro el tronco y radio 5 metros, y fuera del círculo de centro la casilla del perro y radio 5 metros.

**10.** La respuesta correcta es la (A). En 5 segundos recorre 25 metros, luego cada rueda da $25/1{,}25 = 20$ vueltas.

**11.** La respuesta correcta es la (B), 19, de los cuales 7 son niños y 12 son niñas.

**12.** La respuesta correcta es la (C). El triángulo sombreado en el cuadrado inferior derecho es congruente al triángulo blanco en el cuadrado de arriba. Por lo tanto el área sombreada es igual al área de un cuadrado de lado 1.

**13.** La respuesta correcta es la (C). La suma de todos los números es 24, luego para que la suma algebraica sea cero, los negativos deben sumar $-12$ y los positivos $+12$. Para obtener $+12$ hacen falta como mínimo dos signos $+$ colocados delante de dos cincos, para que con el 2 inicial sumen 12. Por ejemplo $2-0-1+5-2-0-1+5-2-0-1-5=0$.

**14.** La respuesta correcta es la (A). Aumentó 1,5 cm, pues 15 litros son 15000 $\text{cm}^3$, 1 $\text{m}^2$ son 10000 $\text{cm}^2$, y $15000/10000 = 1{,}5$.

**15.** La respuesta correcta es la (E). Si $k$ ramas contienen 5 hojas y $10-k$ ramas contienen 2 hojas y una flor, el número total de hpjas será $5k+2(10-k) = 20+3k = 3(6+k)+2$, es decir que debe dejar resto 2 al dividirlo entre 3. Ninguno de los números 45, 39, 37, 31 cumple esta condición.

**16.** La respuesta correcta es la (C). Si $n$ es el número total de estudiantes, entonces $0{,}6n$ aprobaron y $0{,}4n$ reprobaron. La suma total de notas es $12n$, y la suma de notas de los aprobados $16(0{,}6n) = 9{,}6n$. Luego la suma de notas de los reprobados es $12n-9{,}6n = 2{,}4n$ y su promedio $2{,}4n/(0{,}4n) = 6$.

**17.** La respuesta correcta es la (D). El área del triángulo doblado es $1/8$ del área del cuadrado, luego el área del pentágono es $7/8$ del área del cuadrado. Como son enteros consecutivos, deben ser 7 y 8.

**18.** La respuesta correcta es la (B). Si $a$ y $b$ son los lados del rectángulo, entonces $a+2b = 44$ y $2a+b = 40$, de donde $a = 12$ y $b = 16$. Luego el perímetro es $2a+2b = 56$.

**19.** La respuesta correcta es la (A). Numeremos los triángulos de 1 a 6, de izquierda a derecha. La frontera entre 1 y 2 debe ser roja, igual que entre 5 y 6. Luego la frontera entre 2 y 3 debe ser azul, y la frontera entre 4 y 5 debe ser verde. Luego la frontera entre 3 y 4 debe ser roja y $x$ debe ser verde.

**20.** La respuesta correcta es la (B). Como todas las respuestas son diferentes, a lo sumo uno dijo la verdad. Pero no todos mintieron, pues en ese caso ninguno estudió y Noemí dijo la verdad, absurdo. Luego exactamente uno estudió y dijo la verdad.

**21.** La respuesta correcta es la (E). Las 4 regiones en blanco suman $-4$, y éstas más la central suman 2, es decir $-4+? = 2$. Luego en la región central va $4+2 = 6$.

**22.** La respuesta correcta es la (C). De los 5 números no puede haber 4 diferentes pues sus 6 sumas de a pares serían diferentes. No pueden ser todos iguales pues habría una sola suma. No puede haber sólo 2 diferentes $a$ y $b$ pues entonces las únicas sumas posibles serían $2a$, $a+b$ y $2b$, y si fuesen diferentes habría dos de ellas pares. Luego la única posibilidad es que haya 3 números diferentes $a < b < c$, con sumas $a+b = 57$, $a+c = 70$, $b+c = 83$, de donde $a = 22$, $b = 35$ y $c = 48$ y el mayor es 48.

**23.** La respuesta correcta es la (D). Cada uno de los dos triángulos en que queda dividido el cuadrado por su diagonal tiene área 15 $\text{cm}^2$, luego las áreas de los triángulos que no la tienen indicada son 4 $\text{cm}^2$ para el superior y 6 $\text{cm}^2$ para el inferior. Como todos los triángulos con base en la diagonal tienen la misma altura, sus bases son proporcionales a sus áreas. Como $a/2 = (a+b)/5$ resulta $a/2 = b/3$ y del mismo modo $a/2 = b/3 = c/1 = d/5 = e/4$, de donde $d$ es el mayor.

**24.** La respuesta correcta es la (A), 6 canguros. Quitando los dos más livianos y los 3 más pesados, los canguros restantes pesan el 15 % del total. Pero si hubiese dos o más, entonces dos de ellos pesarían a lo sumo el 15 % del total, que es menos de lo que pesan los dos más livianos, absurdo.

**25.** La respuesta correcta es la (C). Con menos de 4 trozos no se puede pues se tendrían a lo sumo 6 extremos, luego de los 8 vértices habría al menos 2 en los cuales no habría ningún extremo, lo que es claramente imposible. Con cuatro trozos de longitudes 1, 2, 3 y 6 (o bien 1, 2, 4 y 5) es fácil construir el cubo.

**26.** La respuesta correcta es la (A). Consideremos los puntos $X$ e $Y$, sobre el lado $PQ$, tales que $PX = XY = YQ$. Es fácil ver que los triángulos $PXS$, $XRS$ y $XYR$ son equiláteros y que el $YQR$ es isósceles con $\angle RYQ = 120°$ y $\angle YQR = \angle YRQ = 30°$.

**27.** La respuesta correcta es la (B). Escojamos un sentido en la recta y asignemos abscisa 0 al punto más a la izquierda y 22 al que está más a la derecha. Como no hay diferencia 1, no puede haber puntos en 1 ni en 21, luego para realizar la distancia 20 uno de los puntos debe ser 2 ó 20, pero no ambos pues no hay diferencia 18. Supongamos que es el 2 (la otra alternativa es simétrica). Entonces para realizar la distancia 17 es fácil ver que la única posibilidad es marcar el 17. Finalmente la distancia 6 sólo se puede realizar con 8 o con 11, pero 11 no sirve pues no se genera la diferencia 8. Luego tenemos los puntos 0, 2, 8, 17, 22 y las diferencias 0, 2, 5, 6, 8, 9, 14, 15, 17, 20, 22, es decir que $k = 14$.

**28.** La respuesta correcta es la (D). Si el número anotado es $abcdef$, debemos hacer diez intentos para el primer dígito, a saber $0abcdef$, $1abcdef$, $\ldots$, $9abcdef$. Como segundo dígito no hace falta probar el dígito $a$, pues ya fue considerado en la lista previa, $aabcdef$. Así que solo harán falta 9 nuevas pruebas. Igualmente sucede para los otros dígitos. Por lo tanto $10 + 9 \times 6 = 64$ intentos serán suficientes.

**29.** La respuesta correcta es la (D). Pongamos $2015 = qD + r$ con $0 \le r < D$. Si $D < 672$ entonces $r < 671$. Si $672 \le D \le 1000$ entonces $q = 2$ y $r = 2015 - 2D \le 2015 - 2 \cdot 672 = 671$. Luego el $r$ máximo es 671 y se alcanza para $D = 672$.

**30.** La respuesta correcta es la (D). Supongamos que el 1 es rojo. Entonces si algún $k > 1$ es rojo, $k+1$ debe ser rojo, y también $k+2 = (k+1)+1$, $k+3 = (k+2)+1, \ldots$ Es decir que todos los $n \ge k$ deben ser rojos. Pero entonces a lo sumo un número puede ser verde, pues si hubiese dos, haciendo sumas habría unfinitos verdes y habría verdes mayores que $k$, absurdo. Se sigue que con el 1 rojo sólo hay 3 coloraciones posibles, a saber R, R, R,... (todos rojos); R, V, V, V,... (todos verdes a partir del 2) y R, V, R, R, R,... (solo el 2 verde). Por simetría hay otras 3 coloraciones, a saber V, V, V,...; V, R, R, R,... y V, R, V, V, V,... para un total de 6.

## 1.3. Prueba de Cuarto Año y Quinto Año

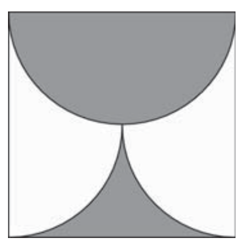
**Problema 1.** ¿Cuál de los números siguientes es el más próximo a $20{,}15 \times 51{,}02$?

Ⓐ 100; Ⓑ 1000; Ⓒ 10000; Ⓓ 100000; Ⓔ 1000000.

**Problema 2.** María lavó la ropa y colgó varias blusas en línea en un tendedero. Luego Pedro colocó un pantalón entre cada par de blusas. Si en total hay 29 piezas de ropa en el tendedero, ¿cuántas blusas hay?

Ⓐ 11; Ⓑ 13; Ⓒ 15; Ⓓ 14; Ⓔ 10.

**Problema 3.** La parte sombreada de un cuadrado de lado $a$ está limitada por una semicircunferencia y dos cuartos de circunferencia. ¿Cuál es su área?

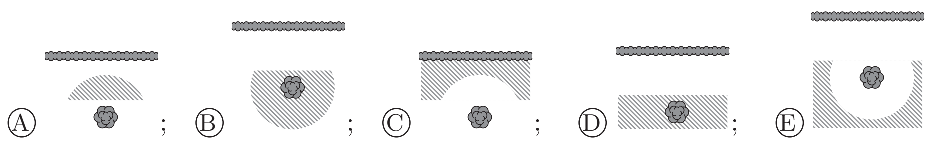


Ⓐ $\frac{a^2}{2}$; Ⓑ $\frac{\pi a^2}{8}$; Ⓒ $\frac{\pi a^2}{2}$; Ⓓ $\frac{a^2}{4}$; Ⓔ $\frac{\pi a^2}{4}$.

**Problema 4.** Tres hermanas, Ana, Berta y Carmen, compraron una bolsa de 30 tequeños. Cada una recibió 10 tequeños. Sin embargo Ana pagó 80 Bs, Berta 50 Bs y Carmen 20 Bs. Si hubiesen dividido los tequeños en forma proporcional a lo que cada una aportó, ¿cuántos tequeños más hubiera recibido Ana?

Ⓐ 10; Ⓑ 9; Ⓒ 8; Ⓓ 7; Ⓔ 6.

**Problema 5.** Un pirata desea desenterrar un tesoro que enterró en su jardín hace muchos años, pero sólo recuerda que lo enterró a por lo menos 5 m de la cerca, y a lo sumo a 5 m del tronco del roble. ¿Cuál de las siguientes figuras describe mejor la región en la cual el pirata debe buscar el tesoro?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ

**Problema 6.** ¿Cuál es el dígito de las unidades del número $2015^2+2015^0+2015^1+2015^5$?

Ⓐ 1; Ⓑ 7; Ⓒ 5; Ⓓ 9; Ⓔ 6.

**Problema 7.** Hay 33 alumnos en una clase. A todos les gusta la matemática y/o la física. A tres alumnos les gustan ambas materias. Los alumnos a los que les gusta sólo la matemática son el doble de aquellos a los que les gusta sólo la física. ¿A cuántos alumnos les gusta la matemática?

Ⓐ 15; Ⓑ 18; Ⓒ 20; Ⓓ 22; Ⓔ 23.

**Problema 8.** ¿Cuál de los números siguientes no es ni un cuadrado ni un cubo?

Ⓐ $2^9$; Ⓑ $3^{10}$; Ⓒ $4^{11}$; Ⓓ $5^{12}$; Ⓔ $6^{13}$.

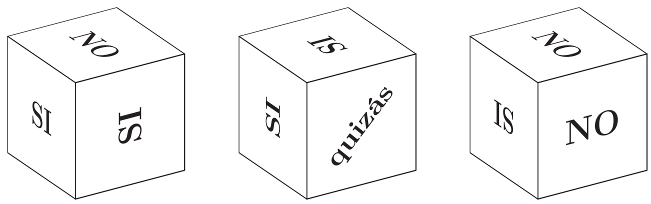
**Problema 9.** Juana compró 100 velas. Cada noche consume una vela, pero cuando tiene restos de 7 velas los combina para fabricar una nueva. ¿Para cuántas noches le alcanzarán las velas que compró?

Ⓐ 112; Ⓑ 114; Ⓒ 115; Ⓓ 116; Ⓔ 117.

**Problema 10.** El número de ángulos rectos en un pentágono convexo es $n$. ¿Cuál es la lista completa de valores posibles de $n$?

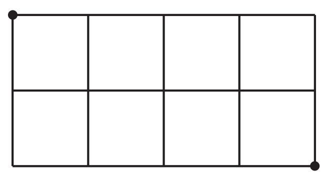
Ⓐ 0, 1, 2, 3; Ⓑ 1, 2, 3; Ⓒ 1, 2; Ⓓ 0, 1, 2; Ⓔ 0, 1, 2, 3, 4.

**Problema 11.** Para tomar decisiones, Juan utiliza un dado que en cada cara tiene escrita una de las palabras SI, NO y quizás. La figura siguiente muestra el dado en tres diferentes posiciones. ¿Cuál es la probabilidad de obtener SI con ese dado?




Ⓐ $\frac{1}{3}$; Ⓑ $\frac{1}{2}$; Ⓒ $\frac{5}{9}$; Ⓓ $\frac{2}{3}$; Ⓔ $\frac{5}{6}$.

**Problema 12.** El lado de cada cuadradito mide 1. ¿Cuál es la mínima longitud posible de un trayecto desde Inicio hasta Fin, si sólo se puede ir por los lados o por las diagonales de los cuadraditos?



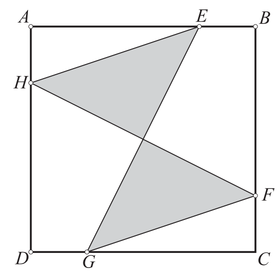

Ⓐ $2\sqrt{5}$; Ⓑ $\sqrt{10}+\sqrt{2}$; Ⓒ $2+2\sqrt{2}$; Ⓓ $4\sqrt{2}$; Ⓔ 6.

**Problema 13.** Cada habitante del planeta Orejón tiene al menos dos orejas. Un día se encontraron tres amigos: Imi, Dimi y Trimi. Imi dijo: "Yo veo 8 orejas". Dimi dijo: "Yo veo 7 orejas". Y Trimi dijo: "Yo veo 5 orejas". Si todos dijeron la verdad y ninguno puede ver sus propias orejas, ¿cuántas orejas tiene Trimi?

Ⓐ 2; Ⓑ 4; Ⓒ 5; Ⓓ 6; Ⓔ 7.

**Problema 14.** Un recipiente tiene forma de prisma recto y su base es un cuadrado de 10 cm de lado. El recipiente se llena de agua hasta una altura de $h$ cm. Un cubo sólido de metal de 2 cm de lado se coloca dentro del recipiente. ¿Cuál es el menor valor de $h$ para el cual el cubo queda sumergido por completo?

Ⓐ 1.92 cm; Ⓑ 1.93 cm; Ⓒ 1.91 cm; Ⓓ 1.94 cm; Ⓔ 1.90 cm.




**Problema 15.** El cuadrado $ABCD$ tiene área 80. Los puntos $E$, $F$, $G$ y $H$ están en los lados del cuadrado y $AE = BF = CG = DH$. Si $AE = 3EB$, ¿cuál es el área de la región sombreada?

Ⓐ 20; Ⓑ 40; Ⓒ 30; Ⓓ 35; Ⓔ 25.

**Problema 16.** El producto de las edades de un padre y su hijo es 2015. ¿Cuál es la diferencia entre sus edades?

Ⓐ 29; Ⓑ 26; Ⓒ 34; Ⓓ 31; Ⓔ 36.

**Problema 17.** Cuatro pesas $a$, $b$, $c$, $d$ se colocan en una balanza de platillos (vea la figura de la izquierda). Luego se intercambian dos de las pesas, y la balanza cambia como se ve en la figura de la derecha. ¿Cuáles pesas fueron intercambiadas?


Ⓐ $a$ y $b$; Ⓑ $b$ y $d$; Ⓒ $b$ y $c$; Ⓓ $a$ y $d$; Ⓔ $a$ y $c$.

**Problema 18.** Las dos raíces de la ecuación $x^2 - 85x + c = 0$ son números primos. ¿Cuál es el valor de la suma de los dígitos de $c$?

Ⓐ 12; Ⓑ 13; Ⓒ 14; Ⓓ 15; Ⓔ 21.

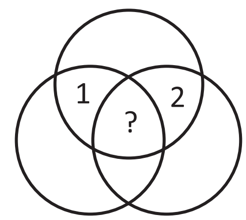
**Problema 19.** ¿Cuántos enteros positivos de tres dígitos hay tales que cualquier par de dígitos consecutivos difieren en tres unidades?

Ⓐ 20; Ⓑ 16; Ⓒ 12; Ⓓ 14; Ⓔ 27.

**Problema 20.** ¿Cuál de los siguientes valores de $n$ muestra que la afirmación «Si $n$ es primo entonces exactamente uno de los números $n-2$ y $n+2$ es primo» es falsa?

Ⓐ $n = 11$; Ⓑ $n = 37$; Ⓒ $n = 19$; Ⓓ $n = 29$; Ⓔ $n = 21$.

**Problema 21.** La figura muestra tres circunferencias que determinan siete regiones. Mirna quiere escribir un número en cada región, de manera que cada número sea igual a la suma de los números en las regiones vecinas a la que él ocupa (dos regiones son vecinas si sus fronteras tienen más de un punto común). Mirna ya ha escrito dos números. ¿Qué número debe escribir en la región central?




Ⓐ $-6$; Ⓑ 6; Ⓒ $-3$; Ⓓ 3; Ⓔ 0.

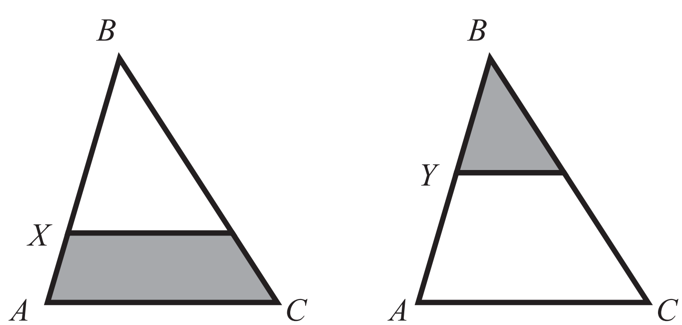
**Problema 22.** Petra tiene tres diccionarios diferentes y dos novelas diferentes en un estante. ¿De cuántas maneras puede ordenar los libros en el estante si ella quiere que los diccionarios permanezcan juntos y también que las novelas permanezcan juntas?

Ⓐ 12; Ⓑ 30; Ⓒ 24; Ⓓ 120; Ⓔ 60.

**Problema 23.** ¿Cuántos números de dos dígitos pueden ser escritos como la suma de exactamente seis potencias de 2 diferentes (una de ellas puede ser $2^0 = 1$)?

Ⓐ 0; Ⓑ 4; Ⓒ 3; Ⓓ 2; Ⓔ 1.

**Problema 24.** Las figuras muestran un triángulo $ABC$ en el cual se han trazado paralelas a la base $AC$ por dos puntos diferentes, $X$ e $Y$. Las áreas sombreadas son iguales. Si $\dfrac{BX}{XA} = 4$, ¿cuál es el valor de la razón $\dfrac{BY}{YA}$?




Ⓐ $\frac{3}{2}$; Ⓑ $\frac{4}{3}$; Ⓒ 3; Ⓓ 2; Ⓔ 1.

**Problema 25.** En un triángulo rectángulo, la bisectriz de uno de los ángulos agudos divide al lado opuesto en segmentos de longitud 1 y 2. ¿Cuánto mide esa bisectriz?

Ⓐ $\sqrt{2}$; Ⓑ $\sqrt{3}$; Ⓒ $\sqrt{4}$; Ⓓ $\sqrt{5}$; Ⓔ $\sqrt{6}$.

**Problema 26.** Denotemos mediante $\overline{ab}$ al número de dos dígitos con dígitos $a$ y $b$. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres dígitos diferentes no nulos $a$, $b$ y $c$ de modo que $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$?

Ⓐ 84; Ⓑ 96; Ⓒ 125; Ⓓ 201; Ⓔ 502.

**Problema 27.** Juan eliminó uno de los números de la lista 1, 2, 3,..., $n-1$, $n$. El promedio de los números que quedaron es 4,75. ¿Qué número eliminó?

Ⓐ 5; Ⓑ 7; Ⓒ 8; Ⓓ 9; Ⓔ No se puede determinar.

**Problema 28.** Una hormiga parte de un vértice de un cubo de lado 1 y desea recorrer cada arista del cubo al menos una vez, y regresar al vértice inicial. ¿Cuál es la mínima longitud posible de su trayecto?

Ⓐ 12; Ⓑ 14; Ⓒ 15; Ⓓ 16; Ⓔ 20.

**Problema 29.** Se escriben diez números enteros diferentes. Todos los números que sean iguales al producto de los otros nueve se subrayan. ¿Cuántos números se pueden subrayar, como máximo?

Ⓐ 10; Ⓑ 9; Ⓒ 3; Ⓓ 2; Ⓔ 1.

**Problema 30.** En una recta se marcan varios puntos, y se consideran todos los segmentos que tienen a dos de esos puntos como extremos. Uno de los puntos marcados pertenece al interior de 80 de esos segmentos. Otro pertenece al interior de 90 segmentos. ¿Cuántos son los puntos marcados?

Ⓐ 80; Ⓑ 20; Ⓒ 90; Ⓓ 22; Ⓔ No se puede determinar.

### 1.3.1. Soluciones

**1.** La respuesta correcta es la (B), ya que $20{,}15 \times 51{,}02 = 1028{,}053$.

**2.** La respuesta correcta es la (C), 15.

**3.** La respuesta correcta es la (A), $a^2/2$, ya que el semicírculo superior se puede descomponer en dos cuartos de círculo, que se pueden acomodar en la parte inferior de la figura para completar medio cuadrado.

**4.** La respuesta correcta es la (E). Entre las tres pagaron 150 Bs por 30 tequeños, es decir que cada tequeño salió a 5 Bs. A Ana le hubiesen correspondido 16 tequeños por sus 80 Bs, 6 más de los que recibió.

**5.** La respuesta correcta es la (B).

**6.** La respuesta correcta es la (E). $2015^1$, $2015^2$ y $2015^5$ terminan en 5, mientras que $2015^0 = 1$. Como $5+5+5+1 = 16$, el dígito de las unidades de la suma es 6.

**7.** La respuesta correcta es la (E). Sea $m$ la cantidad de alumnos a los que solo les gusta la matemática y sea $f$ la cantidad de los que sólo gustan de la física. Entonces $m + f + 3 = 33$, de donde $m + f = 30$. Pero como $m = 2f$, se tiene $3f = 30$, $f = 10$, $m = 20$ y hay $20 + 3 = 23$ alumnos a los que les gusta la matemática.

**8.** La respuesta correcta es la (E), $6^{13}$, ya que $2^9 = (2^3)^3$ y $5^{12} = (5^4)^3$ son cubos y $3^{10} = (3^5)^2$ y $4^{11} = (2^{11})^2$ son cuadrados.

**9.** La respuesta correcta es la (D). Como $100 = 7 \times 14 + 2$, luego de 98 noches le quedan 2 velas y restos de cera para hacer 14 más. Luego de usar esas 16 le queda cera para dos más.

**10.** La respuesta correcta es la (A). Es fácil construir ejemplos con 0, 1, 2, y 3 ángulos rectos. Pero si un pentágono tiene 4 ángulos rectos, como la suma de sus ángulos internos debe ser $3 \cdot 180°$, el quinto ángulo debería ser $180°$ y el pentágono no sería convexo.

**11.** La respuesta correcta es la (B), $\frac{1}{2}$, pues de las seis caras, tres tienen escrita la palabra SI.

**12.** La respuesta correcta es la (C), $2 + 2\sqrt{2}$, que se obtiene recorriendo dos diagonales y dos lados (hay tres recorridos posibles con esta longitud). Para ver que es el mínimo, considere tres casos, según que el camino pase por el punto medio del lado superior, por el punto medio del lado inferior, o por el centro del rectángulo.

**13.** La respuesta correcta es la (C). Si se suman las orejas que vió cada uno se obtiene $8+7+5 = 20$. Pero en esa suma cada oreja está contada dos veces, pues es vista por dos de los tres amigos. Luego el total de orejas es la mitad de 20, o sea 10. Como Trimi vió 5 orejas, y el total es 10, Trimi tiene 5 orejas.

**14.** La respuesta correcta es la (A). Hay $100h$ cm$^3$ de agua. El cubo desplaza 8 cm$^3$ de agua. Para que el agua quede al ras de la cara superior del cubo debe cumplirse que $100h + 8 = 100 \cdot 2 = 200$, por lo tanto $h = 192/100 = 1{,}92$.

**15.** La respuesta correcta es la (E). Sea $L$ el lado del cuadrado $ABCD$. El área de la región sombreada es la mitad de la del cuadrado $EFGH$, que es igual a la del $ABCD$ menos la de los cuatro triángulos $AEH$, $BFE$, $CGF$ y $DHG$. Cada uno de esos triángulos tiene catetos $\frac{3}{4}L$ y $\frac{1}{4}L$, luego su área es $\frac{3}{32}L^2$ y $[EFGH] = L^2 - 4\frac{3}{32}L^2 = \frac{5}{8}L^2 = 50$ y el área sombreada es la mitad, 25. Alternativamente se puede calcular el lado del cuadrado $EFGH$ usando Pitágoras.

**16.** La respuesta correcta es la (C). Como $2015 = 5 \times 13 \times 31$, los únicos valores razonables para las edades son 31 el hijo y $5 \times 13 = 65$ el padre, luego la diferencia es 34.

**17.** La respuesta correcta es la (D). Al observar la balanza concluimos que $a+b > c+d$, $a > b$ y $c > d$. Para que ambas balanzas pequeñas cambien su inclinación es claro que se intercambió una pesa del par $\{a, b\}$ con una del par $\{c, d\}$.

Si se intercambiaron $a$ y $c$ entonces a la derecha se tendría $b > c$ y $d > a$, de donde $d > a > b > c > d$, absurdo.

Si se intercambiaron $b$ y $d$ entonces a la derecha se tendría $d > a$ y $b > c$, de donde $d > a > b > c > d$, absurdo.

Si se intercambiaron $b$ y $c$ entonces a la derecha se tendría $c > a$ y $d > b$, de donde $c + d > a + b$, absurdo.

La única posibilidad que queda es que se hayan intercambiado $a$ y $d$. Esta situación efectivamente es posible, por ejemplo con $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$ y $d = 1$.

Por lo tanto los pesos que se intercambiaron son $a$ y $d$.

**18.** La respuesta correcta es la (B). Sean $p$ y $q$ los dos números primos que son raíces de la ecuación $x^2 - 85x + c = 0$. Entonces $p+q = 85$ y $pq = c$. Como 85 es impar, entonces $p$ y $q$ deben ser de diferente paridad, de donde uno de ellos debe ser 2. En consecuencia el otro es 83 y su producto es 166. Se sigue que la suma de los dígitos de $c$ es $1+6+6 = 13$.

**19.** La respuesta correcta es la (A). Sea $abc$ un número entero de tres cifras que cumple la condición. Entonces $a > 0$ y hay cuatro casos posibles:

$a < b < c$. Esto nos da 147, 258 y 369.

$a > b > c$. Esto nos da 630, 741, 852 y 963.

$a < b > c$. Esto nos da 141, 252, 363, 474, 585 y 696.

$a > b < c$. Esto nos da 303, 414, 525, 636, 747, 858 y 969.

En total son 20.

**20.** La respuesta correcta es la (B). $n = 37$ es primo, pero ni $n - 2 = 35$ ni $n + 2 = 39$ son primos.

**21.** La respuesta correcta es la (E). En la región superior debe ir $1+2 = 3$. Sea $x$ el número que debe ir en la región central. Si en la región izquierda va $a$, entonces $1 = 3 + x + a$, de donde $a = -x-2$. Si en la región derecha va $b$, entonces $2 = 3+x+b$, de donde $b = -x-1$. Entonces en la región que va debajo de la central va $a+x+b = -x-2+x-x-1 = -x-3$, y aplicando la condición a la región central se obtiene $x = 1 + 2 - x - 3 = -x$, de donde $x = 0$.

**22.** La respuesta correcta es la (C). Los 3 diccionarios se pueden ordenar de $3! = 6$ maneras, y las dos novelas de 2 maneras. Con los diccionarios a la izquierda y las novelas a la derecha hay por lo tanto $6 \cdot 2 = 12$ ordenaciones posibles, y otras tantas con los diccionarios a la derecha y las novelas a la izquierda. En total son 24 maneras posibles.

**23.** La respuesta correcta es la (D). Como $2^7 = 128$, solo podemos usar las potencias de 2 hasta exponente 6. De esta manera solo obtenemos los números $1+2+4+8+16+32 = 63$ y $1+2+4+8+16+64 = 95$. Cualquier otra combinación de la forma pedida da números de más de dos cifras.

**24.** La respuesta correcta es la (A). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el área del triángulo $ABC$ es 1. Como $BX = 4XA$ se tiene

$$\frac{BX}{BA} = \frac{BX}{BX + XA} = \frac{4XA}{5XA} = \frac{4}{5},$$

luego el área de la parte blanca en el triángulo de la izquierda es $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ y el área de la parte sombreada es $1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$. Es decir que el área de la parte sombreada en el triángulo de la derecha es $\frac{9}{25} =$. Como el área del triángulo $ABC$ es 1, y $\frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$, entonces por la semejanza entre el triángulo sombreado (parte de arriba) y el triángulo $ABC$, tenemos que $\frac{BY}{BA} = \frac{3}{5}$, de donde $BY = \frac{3}{5}BA$ y $YA = BA - BY = \frac{2}{5}BA$. Finalmente

$$\frac{BY}{YA} = \frac{\frac{3}{5}BA}{\frac{2}{5}BA} = \frac{3}{2}.$$

**25.** La respuesta correcta es la (C). Sea $ABC$ un triángulo rectángulo en $B$ y sea $D$ el punto de corte de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ con el lado $BC$. Por el teorema de la bisectriz, $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{1}$, por lo tanto, $AC = 2AB$. Por Pitágoras, $AB^2 + 3^2 = AC^2 = 4AB^2$, de donde $3AB^2 = 9$ y $AB^2 = 3$. De nuevo por Pitágoras en el triángulo rectángulo $ABD$, $AD^2 = 1^2 + 3 = 4$ y entonces $AD = \sqrt{4} = 2$.

**26.** La respuesta correcta es la (A). Es claro que $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ si y sólo si $a < b < c$, y tres dígitos no nulos que cumplan esta condición se pueden elegir de $\binom{9}{3} = 84$ maneras.

**27.** La respuesta correcta es 9, la opción (B). Si $S$ es la suma de los números que quedan luego de quitar uno, entonces el promedio es

$$\frac{S}{n-1} \geq \frac{1 + 2 + \cdots + (n-1)}{n-1} = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n}{2},$$

de donde $n \leq 9$. Además como $\frac{S}{n-1} = 4,75 = \frac{19}{4}$, se tiene que $4S = 19(n-1)$, de donde 4 divide a $n - 1$ y $n$ sólo puede ser 5 ó 9. Pero $n = 5$ no cumple, en cambio $n = 9$ sí sumple (si se elimina el 7).

**28.** La respuesta correcta es la (D), 16. Observe que cada vértice debe ser visitado al menos 4 veces, y como $4 \times 8 = 32$ eso requiere recorrer al menos 16 aristas. Si $A$, $B$, $C$, $D$ son los vértices de una cara del cubo, escritos en sentido horario, y $E$, $F$, $G$ y $H$ son las proyecciones de $A$, $B$, $C$, $D$ sobre la cara opuesta, entonces un recorrido de longitud 16 es $ABCDAEFBFGCGHEHDA$.

**29.** La respuesta correcta es la (E). Si $p$ es el producto de los diez números y $x$ es un número subrayado, entonces $x^2 = p$. Es decir que $p$ debe ser un cuadrado perfecto, digamos $p = n^2$, y $x$ sólo puede ser $a$ o $-a$. Pero si $p > 0$, $a$ y $-a$ no pueden estar ambos entre los 10 números, pues el producto de los 8 restantes debería ser $-1$ y eso es imposible con 8 enteros diferentes. Por lo tanto a lo sumo puede haber un número subrayado.

**30.** La respuesta correcta es la (D). Sea $n$ la cantidad total de puntos y sea $P$ el punto que pertenece a 80 segmentos. Si hay $a$ puntos a la izquierda de $P$ y $b$ puntos a su derecha, entonces $ab = 80$ y $a + b + 1 = n$. Abálogamente existen enteros $c$ y $d$ con $cd = 90$ y $c + d = a + b = n - 1$. Como $80 = 1 \cdot 80 = 2 \cdot 40 = 4 \cdot 20 = 5 \cdot 16 = 8 \cdot 10$ y $90 = 1 \cdot 90 = 2 \cdot 45 = 3 \cdot 30 = 5 \cdot 18 = 6 \cdot 15 = 9 \cdot 10$, hay una única solución: $a = 5$, $b = 16$, $c = 6$, $d = 15$. Así $n - 1 = a + b = c + d = 21$ y $n = 22$.

# Capítulo 2

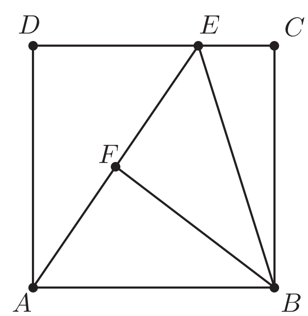
# Prueba Regional

La prueba regional de la OJM consta de cuatro problemas, que se valoran en una escala de 1 a 7. Los participantes disponen de tres horas y media para resolverlos.

## 2.1. Prueba de Primer Año

**Problema 1.** Halle el mayor entero formado por 5 dígitos diferentes, que sea múltiplo de 9. Explique razonadamente su respuesta.

**Problema 2.** $ABCD$ es un cuadrado de lado 6 cm. $E$ es un punto cualquiera del lado $CD$ y $F$ es el punto medio de $AE$. Calcule el área del triángulo $BEF$.




**Problema 3.** Hay 48 naranjas repartidas en tres cestas: A, B y C. La cesta B contiene el doble de naranjas que la cesta A. Las cestas A y C juntas contienen el doble de naranjas que la cesta B. ¿Cuántas naranjas contiene la cesta C?

**Problema 4.** María desea escribir un entero del 1 al 4 en cada casilla de un tablero de $4 \times 4$, de modo que no haya números repetidos en la misma fila o en la misma columna. La figura muestra algunos números que ella ya ha escrito. Llene las casillas que faltan, cumplendo la condición exigida.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 3 |
| | 2 | | |
| | | | 4 |
| | | 3 | |

### 2.1.1. Soluciones

**1.** El mayor entero formado por 5 dígitos diferentes es 98765, pero no es múltiplo de 9 ya que al dividirlo entre 9 deja resto 8 (alternativamente: porque $9+8+7+6+5=35$ no es múltiplo de 9). El múltiplo de 9 inferior más cercano es $98765-8=98757$, pero tiene el 7 repetido. Los anteriores son 98748, 98739 y 98730. Como 98748 y 98739 tienen cifras repetidas, la respuesta es 98730.

**Solución alternativa:** El mayor múltiplo de 9 de 5 dígitos es 99999. A partir de este número se pueden ir restando nueves hasta lograr que todas las cifras sean diferentes. Pero es claro que hay qur restar al menos $999+9=1008$ para que la segunda cifra sea diferente de 9. Así nos queda $99999-1008=98991$. Ahora para que la tercera cifra sea diferente de las dos anteriores hay que restar $99+99=198$ y queda $98991-198=98793$. Y ahora para que la cuarta cifra sea diferente de las tres anteriores hay que restar 27 y nos queda 98766. Restando ahora de 9 en 9 quedan sucesivamente 98757, 98748, 98739 (que tienen dígitos repetidos) y finalmente 98730, que es la respuesta.

**2.** El área del triángulo $ABE$ es $[ABE]=6\times 6/2=18$ cm$^2$. Pero $[BEF]$ es la mitad de $[ABE]$, ya que $EFB$ y $FAB$ tienen bases iguales $BF=FA$ y la misma altura, por ser el vértice $B$ común. Luego la respuesta es 9 cm$^2$.

**3.** Como A y C juntas contienen el doble que B, el total 48 es el triple de B, luego B tiene 16. A tiene la mitad que B, es decir 8. A y C contienen 32, y restando las 8 de A quedan 24.

**Solución alternativa:** Si A contiene $a$ naranjas, B contiene $b$ y C contiene $c$, entonces se tiene que: (1) $a+b+c=48$; (2) $b=2a$; (3) $a+c=2b$. Sustituyendo $a+c$ por $2b$ en (1) queda $2b+b=48$, es decir $3b=48$, de donde $b=16$. Sustituyendo este valor en (2) queda $16=2a$, de donde $a=8$. Finalmente de (3) sale $c=2b-a=2\cdot 16-8=24$.

**4.** Observemos que en la casilla marcada $a$ sólo puede ir un 4, ya que en su fila ya aparecen 1 y 3 y en su columna el 2. Luego $b=2$. Se sigue con $e=1$, $k=2$, $j=1$, $i=4$, $d=3$, $e=4$, $f=2$, $g=3$ y $h=1$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $a$ | $b$ | 3 |
| $c$ | 2 | $d$ | $e$ |
| $f$ | $g$ | $h$ | 4 |
| $i$ | $j$ | 3 | $k$ |

$\longrightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 4 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |
| 4 | 1 | 3 | 2 |

## 2.2. Prueba de Segundo Año

Los tres primeros problemas de Segundo Año fueron los mismos que los de Primer Año (ver pág. 30). Las pruebas sólo se diferenciaron en el problema 4, que se enuncia a continuación.

**Problema 4.** Un dado se rueda sobre una mesa y los puntos en sus 5 caras visibles se suman y se anotan en un papel. Esta acción se realiza una o más veces. Finalmente todos los números anotados se suman. ¿Cuál es el entero más grande que **no** se puede obtener como resultado?

### 2.2.1. Soluciones

**4.** Como $1+2+3+4+5+6=21$, cada valor anotado es de la forma $21-x$, con $x=1,2,3,4,5$ ó 6. Por lo tanto en un lanzamiento se obtiene un entero entre 15 y 20. En dos lanzamientos, el total es un entero entre 30 y 40. En tres lanzamientos, el total es un entero entre 45 y 60. En cuatro lanzamientos, el total es un entero entre 60 y 80, etc. Se ve entonces que el 44 no se puede obtener, pero cualquier $n>44$ sí se puede obtener. En efecto, pongamos $n=15q+r$, con $q\geq 3$ y $0\leq r<15$. Si $0\leq r\leq 5$, entonces $n=15(q-1)+15+r$ se obtiene con $q-1$ lanzamientos de 15 y uno de $15+r$. Si $6\leq r\leq 10$, entonces $n=15(q-2)+20+10+r$ se obtiene con $q-2$ lanzamientos de 15, uno de 20 y otro de $10+r$. Si $11\leq r<leq14$, entonces $n=15(q-3)+20+20+5+r$ se obtiene con $q-3$ lanzamientos de 15, dos de 20 y otro de $5+r$.

## 2.3. Prueba de Tercer Año

**Problema 1.** Halle un entero positivo de 4 dígitos $abcd$ tal que, si se lo multiplica por 4, se obtienen las mismas cifras pero en orden inverso, es decir $dcba$.

**Problema 2.** Claudia tiene 5 segmentos, de longitudes 2 cm, 3 cm, 4cm, 8 cm y 9 cm. ¿Cuántos triángulos diferentes puede construir usando 3 de esos segmentos? Describa todas las posibilidades.

**Problema 3.** En el pueblo Miauguau hay 120 animales, entre perros y gatos. Pero un 10 % de los perros creen que son gatos y maúllan en vez de ladrar. Del mismo modo, un 10 % de los gatos creen que son perros y ladran en vez de maullar. Si en total hay 44 animales que maúllan (sean perros o gatos), ¿cuántos gatos hay en el pueblo?

**Problema 4.** Idéntico al Problema 4 de Segundo Año (ver pág. 32).

### 2.3.1. Soluciones

**1.** $abcd \times 4 = dcba$. Es claro que $a < 3$, pues de lo contrario $abcd \times 4$ tendría 5 cifras. Pero $a$ no puede ser 1, pues en ese caso $dcba$ sería impar y no podría ser múltiplo de 4. Luego $a = 2$. Entonces $4d$ debe terminar en 2, lo cual sólo es posible si $d$ es 3 u 8. Pero es claro que $d \geq 8$, luego $d = 8$. Tenemos que $2bc8 \times 4 = 8cb2$, es decir $(2000+100b+10c+8)\times 4 = 8000+100c+10b+2$. Luego $400b+40c+32 = 100c+10b+2$, o $390b + 30 = 60c$, y dividiendo entre 30 $13b + 1 = 2c$. Para esto $b$ debe ser impar, y $b \geq 3$ no sirve pues daría $c \geq 20$. Luego la única posibilidad es $b = 1$, de donde $c = 7$ y el número buscado es 2178. Verificación: $2178 \times 4 = 8712$.

**2.** Hay 4 posibilidades con lados $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 8, 9\}$, $\{3, 8, 9\}$ y $\{4, 8, 9\}$. Estos 4 casos cumplen la desigualdad triangular (cada lado es menor que la suma de los otros dos). Cualquier otra elección debe tener un lado 8 ó 9, y dos lados tomados entre 2, 3 y 4. Ninguna de ellas forma triángulo, pues el lado mayor (8 ó 9) supera la suma de los otros dos, que es a lo sumo 7.

**3.** Digamos que hay $x$ gatos. Entonces hay $120 - x$ perros, y los animales que maúllan son $\frac{9}{10}x + \frac{1}{10}(120 - x) = 44$, de donde $9x + 120 - x = 440$, $8x = 320$ y $x = 40$. Hay 40 gatos.

De manera equivalente se puede plantear un sistema $x + y = 120$, $\frac{9}{10}x + \frac{1}{10}y = 44$.

**Solución alternativa 1:** Si hay $x$ perros que maúllan, como por cada uno de ellos hay 9 perros que ladran, habría al menos $44 + 9x$ animales. Si $x \geq 9$ entonces $44 + 9x \geq 44 + 81 > 120$, luego $x \leq 8$. Para $x = 8$ habría 80 perros en total, $44 - 8 = 36$ gatos que maúllan y 40 gatos en total, cumpliéndose todas las condiciones. Ésta es la única solución, pues si $x \leq 7$ entonces habría a lo sumo 70 perros, luego debería haber al menos 50 gatos de los cuales al menos 45 maullarían, absurdo.

**Solución alternativa 2:** Para que el 10 % sea un número entero, el número de gatos y el de perros deben ser múltiplos de 10, digamos $10g$ gatos y $10p$ perros. De los $10g$ gatos los que maúllan son el 90 %, es decir $9g$. Como debe ser $9g \leq 44$ los únicos valores posibles para $g$ son 0, 1, 2, 3, 4. Pero si $g \leq 3$ entonces a lo sumo 27 gatos maúllan, luego al menos 17 perros maúllan y el total de perros sería al menos 170, absurdo. Luego $g = 4$ y el número total de gatos es 40.

## 2.4. Prueba de Cuarto Año

**Problema 1.** Idéntico al Problema 1 de Tercer Año (ver pág. 32).

**Problema 2.** Idéntico al Problema 2 de Tercer Año (ver pág. 32).

**Problema 3.** Tres recipientes contienen en total 72 litros de agua. Si se vierte $\frac{1}{3}$ del contenido del primer recipiente en el segundo, a continuación se vierte $\frac{1}{4}$ del contenido del segundo en el tercero, y por último se vierte $\frac{1}{5}$ del contenido del tercero en el primero, entonces cada recipiente queda con la misma cantidad de agua. ¿Qué cantidad de agua había originalmente en cada recipiente?

**Problema 4.** Si en la pizarra está escrito un entero positivo $n$, una *jugada válida* consiste en borrar $n$ y escribir en su lugar un entero $k$ tal que $n < k \leq 4n$. Inicialmente está escrito el 1. Ana y Bruno hacen alternadamente jugadas válidas, comenzando Ana. El primero de ellos que escriba el número 100 o uno mayor, gana. Determine si alguno de los dos tiene uns estrategia ganadora, y descríbala.

**Nota:** una *estrategia ganadora* es un método de juego que asegura la victoria del que lo aplica, juegue lo que juegue su adversario.

### 2.4.1. Soluciones

**3.** Los tres recipientes finalizan con $72/3 = 24$ litros cada uno. La última operación consistió en trasvasar $\frac{1}{5}$ del contenido del tercer recipiente al primero. Luego 24 son los $\frac{4}{5}$ de lo que tenía, de donde antes del trasvase tenía 30 l. Y como le pasó 6 l al primer recipiente, que quedó con 24 l, el primer recipiente debía tener 18 l antes del trasvase. En otras palabras, después de la segunda operación y antes de la tercera el contenido de los recipientes era 18, 24 y 30 litros, en ese orden. Del mismo modo se ve que luego de la primera y antes de la segunda operación, el segundo recipiente contenía 32 l, para poder quedar en 24 al perder la cuarta parte de su contenido. El tercero tenía 22 l, para quedar en 30 al ganar 8 l, y el primero tenía 18 l. Los contenidos después de la primera operación eran entonces 18, 32 y 22. Razonando de igual forma llegamos a que inicialmente los recipientes contenían 27, 23 y 22 litros de agua. La siguiente tabla resume este análisis retrospectivo:

| etapa | Rec. 1 | Rec. 2 | Rec. 3 |
|---|---|---|---|
| 4 | 24 | 24 | 24 |
| 3 | 18 | 24 | 30 |
| 2 | 18 | 32 | 22 |
| 1 | 27 | 23 | 22 |

**Solución alternativa:** Hay varias maneras de resolver este problema mediante sistemas de ecuaciones con dos o tres incógnitas. Una de ellas es la siguiente: sean $x$ e $y$ los contenidos iniciales de los recipientes 1 y 2, respectivamente. El contenido inicial del tercer recipiente será entonces $72 - x - y$. Después de la primera operación el contenido del primer recipiente será $\frac{2}{3}x$, el del segundo $y + \frac{1}{3}x$ y el del tercero no cambia. Luego de la segunda operación el contenido del segundo recipiente será $\frac{3}{4}(y+\frac{1}{3}x) = \frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y$ y el del tercero $72-x-y+\frac{1}{4}(y+\frac{1}{3}x) = 72-\frac{11}{12}x-\frac{3}{4}y$. Luego de la tercera operación el contenido del tercer recipiente será $\frac{4}{5}(72-\frac{11}{12}x-\frac{3}{4}y) = \frac{288}{5} - \frac{11}{15}x - \frac{3}{5}y$. Igualando el contenido final de los recipientes 2 y 3 a 24 se obtiene el sistema $\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = 24$, $\frac{288}{5} - \frac{11}{15}x - \frac{3}{5}y = 24$, que es equivalente a

$$\begin{aligned} x + 3y &= 96 \\ \frac{11}{3}x + 3y &= 168. \end{aligned}$$

Restando la primera ecuación de la segunda resulta $\frac{8}{3}x = 72$, de donde $x = 27$, $y = (96-27)/3 = 23$, y el contenido del tercer recipiente era $72 - 27 - 23 = 22$.

**4.** Si en la pizarra está escrito un número del 25 al 99, el que tenga el turno escribe 100 y gana. Si en la pizarra está escrito el 24, el que tenga el turno pierde (pues debe escribir un número del 25 al 96 y cae en el caso anterior). Si está escrito un número del 6 al 23, el que tenga el turno escribe 24 y gana. Si está escrito el 5, el que tenga el turno pierde. Si está escrito un número del 2 al 4, el que tenga el turno escribe 5 y gana. Como inicialmente está escrito el 1, Ana debe escribir 2, 3 ó 4 y Bruno tiene una estrategia ganadora.

La estrategia ganadora de Bruno está descripta implícitamente en el análisis anterior, pero se puede hacer explícita así: Inicialmente Ana debe jugar 2, 3 ó 4; a cualquiera de estas jugadas Bruno responde con 5. Ahora Ana debe jugar un número del 6 al 20. A cualquiera de esas jugadas Bruno responde 24. Ahora Ana debe jugar un número del 25 al 96. Bruno juega 100 y gana.

## 2.5. Prueba de Quinto Año

**Problema 1.** Idéntico al Problema 1 de Tercer Año (ver pág. 32).

**Problema 2.** El área del triángulo $ABC$ es 12 cm$^2$. Sean $M$ y $N$ los puntos medios de los lados $AB$ y $AC$, respectivamente, y sea $G$ el punto donde se cortan los segmentos $BN$ y $CM$. Calcule el área del cuadrilátero $AMGN$.

**Problema 3.** Idéntico al Problema 3 de Cuarto Año (ver pág. 34).

**Problema 4.** Idéntico al Problema 4 de Cuarto Año (ver pág. 34).

### 2.5.1. Soluciones

**2.** Como $CN = \frac{1}{2}CA$ se tiene $[CNB] = \frac{1}{2}[CAB] = 6$ cm$^2$. Análogamente $[BMC] = \frac{1}{2}[BAC] = 6$ cm$^2$. Y como $MG = \frac{1}{3}MC$ resulta $[MGB] = \frac{1}{3}[MCB] = \frac{6}{3} = 2$ cm$^2$. Luego $[AMGN] = [ABC] - [BCN] - [MGB] = 12 - 6 - 2 = 4$ cm$^2$.

# Capítulo 3

# Prueba Final OJM 2015

La prueba final de la OJM 2015 se realizó en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad de Carabobo, Valencia, el sábado 13 de junio. La prueba constó de cuatro problemas, cada uno de ellos con un valor de 7 puntos. Los participantes dispusieron de tres horas y media para resolverlos.

## 3.1. Prueba de Primer Año

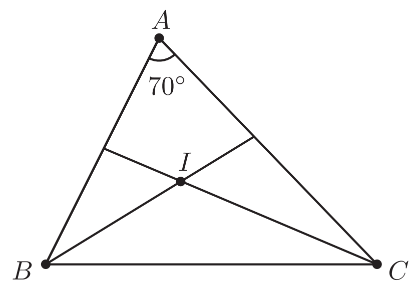
**Problema 1.** Ana repartió una bolsa de caramelos entre los asistentes a su cumpleaños: le dió 15 caramelos a cada niño y le sobró uno. Pero de pronto llegaron dos niños más. Entonces Ana recogió todos los caramelos y los volvió a repartir. Esta vez le tocaron 11 caramelos a cada niño y sobraron tres. ¿Cuántos caramelos tenía la bolsa?

**Problema 2.** $N$ es un entero positivo de 5 dígitos. $P$ es el número que se obtiene al colocar un 1 a la derecha del último dígito de $N$. $Q$ es el número que se obtiene al colocar un 1 a la izquierda del primer dígito de $N$. Si $P$ es el triple de $Q$, ¿cuál es el valor de $N$?

**Problema 3.** Cinco niños de edades diferentes tienen 9 caramelos para repartirse, y acuerdan hacerlo de la siguiente manera: El mayor de ellos efectuará una propuesta de reparto, que será sometida a votación. Si obtiene el apoyo de al menos la mitad de los niños presentes (incluido el proponente), será aceptada y asunto concluido. Si es rechazada, el proponente es eliminado del grupo y le tocará el turno de proponer al mayor de los que queden, repitiéndose el proceso descripto. Cada vez que una propuesta no obtenga el apoyo de al menos la mitad de los presentes, el proponente es eliminado y el turno pasa al mayor de los niños que queden. ¿Cómo se repartirán los caramelos?

Notas: 1) Los caramelos son indivisibles. 2) Cada niño basa sus decisiones exclusivamente en su provecho personal. 3) Si aceptar o rechazar una propuesta les rinde el mismo beneficio, optan por rechazarla para tratar de eliminar al proponente.

**Problema 4.** En el triángulo $ABC$ se trazan las bisectrices de los ángulos en $B$ y en $C$, que se cortan en $I$. Si $\angle BAC = 70°$, halle la medida del ángulo $BIC$.




### 3.1.1. Soluciones

**1.** Si $c$ es el número de caramelos y $n$ el número inicial de niños, entonces $c = 15n + 1 = 11(n + 2) + 3$. Luego $4n = 22 + 3 - 1 = 24$, de donde $n = 6$ y $c = 15 \cdot 6 + 1 = 91$.

**Solución alternativa:** Si $n$ es el número inicial de niños, para darle caramelos a los dos niños nuevos Ana debió quitarle 4 a cada uno de los que ya estaban. Esos $4n$ caramelos y el sobrante hacen $4n + 1$, que alcanzaron para hacer 2 grupos de 11 y sobraron 3. Es decir que $4n+1 = 2\cdot 11+3 = 25$. Por lo tanto $4n = 24$, $n = 6$ y la cantidad de caramelos era $15 \cdot 6 + 1 = 91$.

**2.** $P = 10N+1$, $Q = 10^5 + N$, $10N+1 = 3(10^5 + N)$, o sea $7N = 300000-1 = 299999$, de domde $N = 299999/7 = 42857$.

**3.** Numeremos los niños del 1 al 5, en orden decreciente de edades. Supongamos que sólo queden dos niños 4 y 5. Entonces el 4 se queda con todo, pues su voto es la mitad. Si hay tres niños 3, 4 y 5, y el 3 propone quedarse con todo, será eliminado, ya que al 4 le conviene pues luego podrá quedarse con todo y el 5 quedará igual sin nada, pero opta por la alternativa de eliminación. Sin embargo proponiendo 8 caramelos para él y uno para el número 5, el 3 obtendrá el voto favorable de 5 y gana la votación. Si hay cuatro niños 2, 3, 4 y 5, el 2 necesita conseguir un voto (además del suyo). Para ello basta con que le ofrezca un caramelo al número 4, pues éste, de ser rechazada la propuesta, no recibiría nada (por el caso anterior). Finalmente, si son 5 niños, el 1 necesita conseguir dos votos (además del suyo). Para ello basta que ofrezca un caramelo al número 3 y otro al 5, quienes apoyarán la propuesta pues de ser rechazada quedarían sin nada (por el caso anterior). Por lo tanto los caramelos se repartirán así: 7 caramelos para el número 1, uno para el 3, uno para el 5 y nada para 2 y 4.

**4.** Sean $\beta = \angle CBA$ y $\gamma = \angle BCA$. Entonces $\beta + \gamma + 70 = 180$, de donde $\beta + \gamma = 110$. Por otra parte $\angle CBI = \frac{1}{2}\beta$ y $\angle BCI = \frac{1}{2}\gamma$, luego en el triángulo $BIC$ se tiene

$\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \angle BIC = 180$, de donde

$$\angle BIC = 180 - \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 180 - \frac{110}{2} = 180 - 55 = 125.$$

Luego la respuesta es $125°$.

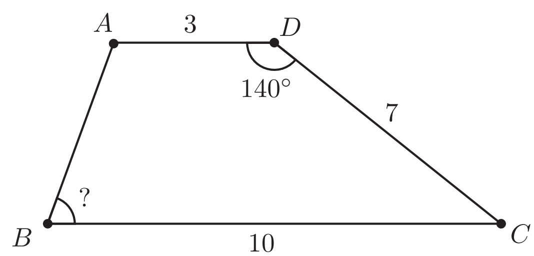
## 3.2. Prueba de Segundo Año

**Problema 1.** Idéntico al Problema 1 de Primer Año (ver pág. 37).

**Problema 2.** Halle el menor número natural $n$ tal que $9n$ tenga todos sus dígitos iguales a 1.

**Problema 3.** Idéntico al Problema 3 de Primer Año (ver pág. 37).

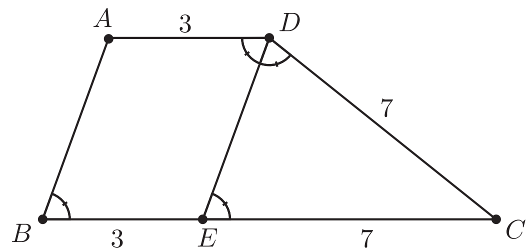
**Problema 4.** $ABCD$ es un trapecio con $AD$ paralela a $BC$, $AD = 3$, $BC = 10$, $CD = 7$ y $\angle ADC = 140°$. Determine la medida del ángulo $ABC$.




### 3.2.1. Soluciones

**2.** Como $9n$ es divisible entre 9, la suma de sus dígitos debe ser divisible entre 9. Pero si esos dígitos son todos iguales a 1, entonces su número debe ser divisible entre 9. El menor valor posible para $9n$ es entonces 111111111, y en consecuencia el menor valor posible para $n$ es $111111111/9 = 12345679$.

**4.** Tracemos la paralela a $AB$ por $D$ y sea $E$ su punto de corte con el lado $BC$. Entonces $ABED$ es un paralelogramo y $BE = AD = 3$. Luego $EC = BC-BE = 10-3 = 7 = CD$ y el triángulo $CDE$ es isósceles. Por lo tanto $\angle CDE = \angle CED$. Pero $\angle CED = \angle EDA$ por alternos internos, luego $\angle CDE = \angle EDA$ y como ambos suman $140°$, cada uno de ellos debe medir $70°$. Finalmente por ser ángulos opuestos de un paralelogramo se tiene $\angle ABC = \angle EDA = 70°$. (También se puede argumentar que $\angle DCE = 40°$ por ser suplementario de $\angle ADC = 140°$, luego los ángulos en la base del triángulo isósceles $CDE$ miden $70°$.)




Alternativamente se puede comenzar por ubicar el punto $E$ en el lado $BC$ de modo que $BE = 3$, con lo cual $EC = 7$. Entonces $ABED$ es un paralelogramo por tener los lados $BE$ y $AD$ paralelos e iguales. Luego se continúa de la misma manera.

## 3.3. Prueba de Tercer Año

**Problema 1.** Halle la suma de todos los dígitos del número $10^{2015} - 2015$.

**Problema 2.** Idéntico al Problema 3 de Primer Año (ver pág. 37).

**Problema 3.** Idéntico al Problema 4 de Segundo Año (ver pág. 39).

**Problema 4.** Juan montó sus chivos en una carreta para ir a venderlos al mercado. También puso en la carreta una cantidad de repollos exactamente igual al cuadrado del número de chivos. Durante el viaje cada chivo se comió dos repollos. Una vez en el mercado Juan vendió 5 chivos y cierto número de repollos. Al final del día observó con sorpresa que el número de repollos que tenía era igual al cuadrado del número de chivos que le quedaban. Entonces puso todo lo que no vendió en la carreta y emprendió el regreso. Pero durante el viaje cada chivo se comió dos repollos, y al llegar a su casa Juan tenía chivos pero ningún repollo. ¿Cuántos repollos vendió Juan en el mercado?

### 3.3.1. Soluciones

**1.** $10^{2015} - 2015 = 10^{2015} - 1 - 2014$. Ahora bien, $10^{2015} - 1$ se compone de 2015 nueves, y al restarle 2014 queda $\underbrace{999\ldots999}_{\text{2011 nueves}}7985$, cuyos dígitos suman $2011 \times 9 + 7 + 9 + 8 + 5 = 18099 + 29 = 18128$.

**4.** Si Juan montó $x$ chivos en su carreta entonces puso también $x^2$ repollos. Al llegar al mercado quedaban $x^2 - 2x$ repollos. Si vendió $y$ repollos entonces quedaron $x^2 - 2x - y$, y como le quedaron $x - 5$ chivos se tiene que

$$x^2 - 2x - y = (x - 5)^2. \tag{*}$$

Durante el viaje de regreso los $x^2 - 2x - y$ repollos fueron comidos por los $x - 5$ chivos que quedaron, a razón de 2 por chivo, es decir que

$$x^2 - 2x - y = 2(x - 5). \qquad (*)$$

De (*) y (**) resulta $(x-5)^2 = 2(x-5)$, y como $x - 5 \neq 0$ se tiene $x - 5 = 2$ y $x = 7$. De (**) se despeja $y = x^2 - 2x - 2(x-5) = 49 - 14 - 4 = 31$, o sea que Juan vendió 31 repollos.

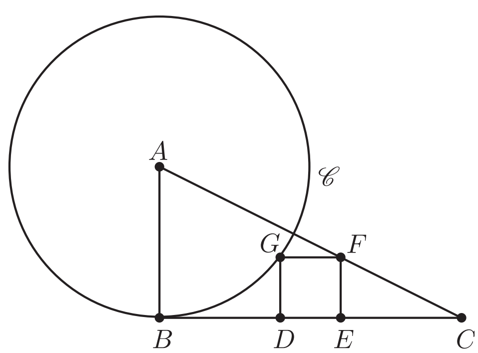
## 3.4. Prueba de Cuarto Año

**Problema 1.** Halle dos cuadrados perfectos, cada uno de 4 dígitos, que difieran en 2015.

**Problema 2.** Idéntico al Problema 4 de Tercer Año (ver pág. 40).

**Problema 3.** Juan tiene tres tarjetas en blanco. En cada una de ellas escribe un dígito diferente, del 0 al 8. Entonces reparte las tarjetas entre Ana, Berta y Claudia, dándole una tarjeta a cada una. Cada una de ellas anota el número de su tarjeta en un papel. Luego Juan recoge las tarjetas, las baraja y las vuelve a repartir. Cada una de las tres chicas anota el número de su nueva tarjeta. Este proceso se repite algunas veces. Al final, cada chica suma los números que anotó. La suma de Ana es 9, la de Berta 25 y la de Claudia 31. ¿Qué números estaban escritos en las tarjetas? Halle todas las posibilidades.

**Problema 4.** $ABC$ es un triángulo rectángulo en $B$, con $AB = 5$ cm y $BC = 10$ cm. $\mathscr{C}$ es la circunferencia de centro $A$ que pasa por $B$. $DEFG$ es un cuadrado contenido en el triángulo $ABC$, que tiene los vértices $D$ y $E$ en el segmento $BC$, el vértice $F$ en el segmento $AB$ y el vértice $G$ en la circunferencia $\mathscr{C}$ ¿Cuál es el área de $DEFG$?



### 3.4.1. Soluciones

**1.** Sean $a^2$ y $b^2$, con $b^2 - a^2 = 2015$ y $1000 \le a^2 < b^2 \le 9999$. Entonces $32 \le a < b < 100$ y $(b-a)(b+a) = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Como $65 \le b+a < 200$, las únicas posibilidades para $b+a$ son 65 y 155. Si $b+a=65$ entonces $b-a=31$, de donde $a=17$, que se descarta pues $17^2 = 289$ tiene sólo tres dígitos. La otra posibilidad es $b+a=155$, $b-a=13$, de donde $a=71$ y $b=84$. Entonces $a^2=5041$ y $b^2=7056$ son la respuesta.

**3.** Sea $n$ el número de repartos y $S$ la suma de los dígitos en las tarjetas. Entonces $nS = 9+25+31 = 65$. Luego $S$ es un divisor de $65 = 5 \cdot 13$. Pero $0+1+2 = 3 \le S \le 6+7+8 = 21$, luego $S=5$ y $n=13$ o $S=13$ y $n=5$.

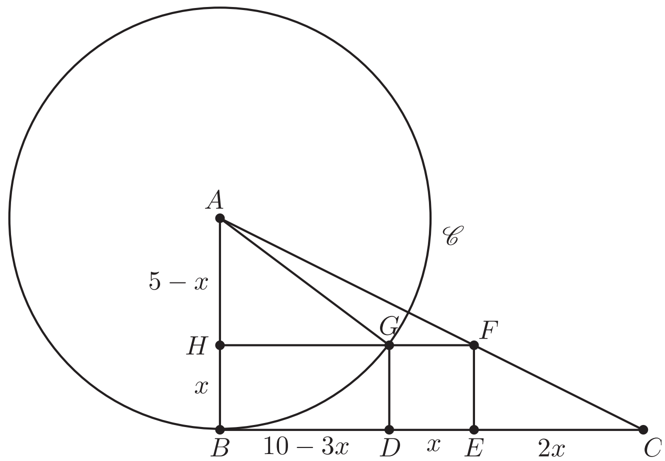
En el primer caso los dígitos sólo pueden haber sido 0, 1 y 4 o 0, 2 y 3. Ambas alternativas son posibles, como muestran los repartos $6(0,1,4)+3(4,1,0)+3(4,0,1)+(1,0,4)$ y $5(0,3,2)+4(0,2,3)+3(2,0,3)+(3,2,0)$, respectivamente.

En el segundo caso sean $x<y<z$ los dígitos escritos en las tarjetas. Es claro que $z \ge 7$, ya que si $z \le 6$ en 5 turnos cada chica podría totalizar a lo sumo 30 puntos (y Claudia totalizó 31). Además $x \le 1$, ya que si $x \ge 2$ en 5 turnos cada chica habría totalizado por lo menos 10 puntos (y Ana totalizó 9). Nos quedan entonces las siguientes posibilidades:

| $x$ | $y$ | $z$ | comentario |
|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 8 | No se puede totalizar 9 |
| 0 | 6 | 7 | No se puede totalizar 9 |
| 1 | 4 | 8 | No se puede totalizar 9 |
| 1 | 5 | 7 | $9=1+1+1+1+5$ |

Entonces en este caso la única posibiliada que queda para $x$, $y$, $z$ es que sean 1, 5 y 7. Los repartos pueden haber sido así: (1,5,7), (1,5,7), (1,7,5), (1,7,5), (5,1,7).

**4.** Sea $x$ el lado del cuadrado $DEFG$. Como $CEF$ es semejante a $CBA$ se tiene $CE/EF = CB/BA = 10/5 = 2$, es decir que $CE = 2x$. Por lo tanto $BD = 10-x-2x = 10-3x$. Prolonguemos $FG$ hasta cortar a $AB$ en $H$. Es claro que el triángulo $AHG$ es rectángulo en $H$, $AH = AB-HB = 5-x$, $HG = BD = 10-3x$ y $AG = AB = 5$. Luego por Pitágoras $(5-x)^2 + (10-3x)^2 = 5^2$, o sea $10x^2 - 70x + 100 = 0$, que dividiendo entre 10 queda $x^2 - 7x + 10 = 0$. Las raíces de esta ecuación de segundo grado son 2 y 5. Evidentemente 5 no cumple la condiciones del problema, luego $x=2$ y finalmente el área pedida es $2^2 = 4$ cm$^2$.




## 3.5. Prueba de Quinto Año

**Problema 1.** Idéntico al Problema 1 de Cuarto Año (ver pág. 41).

**Problema 2.** María escribió en la pizarra los números desde el 1 hasta el 2015. Luego borró todos los números pares, y de los que quedaron borró todos los múltiplos de 3.

(a) ¿Cuántos números quedaron en la pizarra?

(b) ¿Cuál es la suma de todos ellos?

**Problema 3.** Idéntico al Problema 3 de Cuarto Año (ver pág. 41).

**Problema 4.** Idéntico al Problema 4 de Cuarto Año (ver pág. 41).

### 3.5.1. Soluciones

**2.** Primero María borra los pares 2, 4, 6,. . . , 2014, que forman una progresión aritmética de 1007 números que suman $(2 + 2014)1007/2 = 1015056$. Quedan los impares 1, 3, 5, 7, 9,. . . , 2013, 2015, de los cuales se borran los múltiplos de 3: 3, 9, 15,. . . , 2013. Estos números también forman una progresión aritmética con diferencia común 6. Como $2013 = 3+2010 = 3+6\cdot 335$, son 336 números y su suma es $(3+2013)336/2 = 338688$. En total se borraron $1007+336 = 1343$ números con suma total $1015056+338688 = 1353744$. Por lo tanto en la pizarra quedaron $2015-1343 = 672$ nçumeros. Como $1+2+3+\cdots+2015 = 2016\cdot 2015/2 = 2031120$, la suma de los que quedaron es $2031120-1353744 = 677376$.

**Solución alternativa:** Cada entero es de la forma $6q + r$, con $0 \leq r \leq 5$. Los números de la forma $6q$, $6q + 2$ y $6q + 4$ son pares. Los de la forma $6q + 3$ son múltiplos de 3.

Entonces los que quedan son de la forma $6q + 1$ ó $6q + 5$. Los de la forma $6q + 1$ son 1, 7, 13,..., 2005, 2011. Forman una progresión aritmética de diferencia común 6, y como $2011 = 1 + 6 \cdot 335$, son 336 términos y su suma es $(1 + 2011)336/2 = 338016$. Los de la forma $6q + 5$ son 5, 11, 17,..., 2009, 2015. También forman una progresión aritmética con 336 términos y con suma $(5 + 2015)336/2 = 339360$. En total son 672 números con suma 677376.

# Capítulo 4

# Olimpiada de Mayo

La Olimpiada de Mayo es una competencia matemática internacional coordinada por la Olimpiada Matemática Argentina (OMA). Consiste en una prueba escrita de 3 horas de duración y consta de dos niveles: el primer nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 13 años hasta el 31 de diciembre del año anterior a la prueba, y el segundo nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 15 años hasta el 31 de Diciembre del año anterior a la prueba. Cada país participante envía las diez mejores pruebas de cada nivel a la Argentina para ser puntuadas junto con las de los demás países y premiadas por OMA.

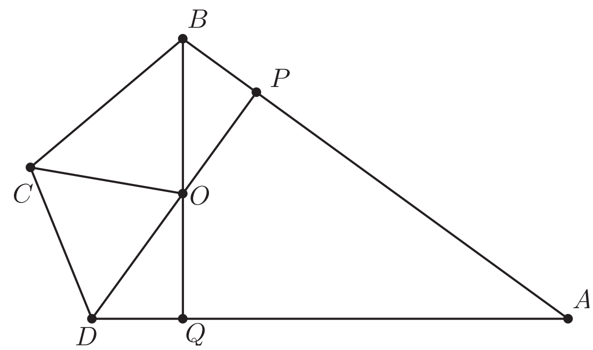
## 4.1. Problemas del Primer Nivel

**Problema 1.** El maestro pensó en secreto un número $S$ de tres dígitos. Los alumnos $A$, $B$, $C$ y $D$ intentaron adivinarlo, diciendo, respectivamente, 541, 837, 291 y 846. El maestro les dijo: "Cada uno de ustedes acertó exactamente un dígito de $S$ y en la posición correcta." ¿Cuál es el número $S$?

**Problema 2.** Son dadas 6 monedas indistinguibles, 4 son auténticas, todas del mismo peso, y 2 son falsas, una es más liviana que las auténticas y la otra, más pesada que las auténticas. Las dos falsas pesan, en conjunto, lo mismo que dos monedas auténticas. Hallar dos monedas auténticas utilizando dos veces una balanza de dos platos, sin pesas.

ACLARACIÓN: Una balanza de dos platos solo informa si el plato izquierdo pesa más, igual o menos que el derecho.

**Problema 3.** En el cuadrilátero $ABCD$, el ángulo $C$ es el triple del ángulo $A$. Sean $P$ en el lado $AB$ tal que $DPA = 90°$ y $Q$ en el lado $AD$ tal que $BQA = 90°$. Los segmentos $DP$ y $BQ$ se cortan en $O$ de modo que $BO = CO = DO$. Calcular la medida de los ángulos $A$ y $C$.




**Problema 4.** Decimos que un número es *supersticioso* cuando es igual a 13 veces la suma de sus cifras. Encontrar todos los números supersticiosos.

**Problema 5.** En una casa se reúnen veintiséis personas. Alicia es amiga de solo una persona, Bruno es amigo de dos personas, Carlos es amigo de tres, Daniel de cuatro, Elías de cinco, y así siguiendo cada persona es amiga de una persona más que la persona anterior, hasta llegar a Yvonne, la persona número veinticinco, que es amiga de todos. ¿De cuántas personas es amiga Zoila, la persona número veintiséis?

ACLARACIÓN: Si A es amigo de B, entonces B es amigo de A.

## 4.2. Soluciones del Primer Nivel

**1.** Hay cuatro conjeturas correctas y sólo tres dígitos, de modo que dos de las conjeturas coinciden. Puede ser: $B$ y $D$ en el primer dígito $x$, $x = 8$; $A$ y $D$ en el segundo dígito $y$, $y = 4$; $A$ y $C$ en el tercer dígito $z$, $z = 1$.

Si $z = 1$, conjeturado por $A$ y $C$, entonces $x \neq 2$ y $x \neq 5$ por hipótesis, luego $x = 8$, conjeturado por $B$ y $D$. Sin embargo, en tal caso, no hay opción para $y$. De modo similar, si $x = 8$ , conjeturado por $B$ y $D$, entonces $z = 1$, conjeturado por $A$ y $C$, y de nuevo no hay opción para $y$. Luego $A$ y $D$ conjeturaron correctamente $y = 4$. Esto excluye $x = 5, 8$ y $z = 1, 6$. De manera que $x = 2$, $z = 7$ y $S = 247$ .

**2.** Comparamos dos monedas $A$ y $B$. Si hay equilibrio son las dos auténticas. Si no, al menos una de ellas es falsa (pueden serlo ambas). En el segundo caso, comparamos, en la segunda pesada, otras dos monedas $C$ y $D$. Igual que en el caso anterior, o bien son ambas auténticas (si hay equilibrio) o una de ellas es falsa. En este último caso, las dos falsas están entre $A$, $B$, $C$, $D$, luego las dos que no hemos pesado son auténticas.
**Alternativa:** Dividimos las monedas en dos grupos de 3 monedas y comparamos los dos grupos en la balanza. Si hay equilibrio entonces las dos monedas falsas están en el mismo platillo, junto con una auténtica; en ese platillo, todas las monedas son de distinto peso.

En el otro platillo las tres monedas son auténticas. Ahora basta, en la segunda pesada, comparar 2 monedas de un mismo platillo. Si hay equilibrio, son las dos auténtica; en caso contrario, en el otro platillo hay 3 monedas auténticas. Si el platillo $A$ es más liviano que el $B$, entonces la moneda falsa liviana está en $A$ y la falsa pesada en $B$. Comparamos en la segunda pesada dos monedas de $A$. Si hay equilibrio, son las dos auténticas; en caso contrario, la más pesada es auténtica, como también lo es la tercera moneda de $A$.

**3.** Tenemos que $POQ = 180° - A$, por ángulos internos del cuadrilátero $APOQ$. Como los triángulos $OBC$ y $OCD$ son isósceles, tenemos $\alpha = OBC = BCO$ y $\beta = OCD = CDO$. Tenemos entonces: $C = BCD = \alpha + \beta$, y en el cuadrilátero $OBCD$:

$$BOD = 360° - OBC - BCD - ODC = 360° - 2(\alpha + \beta) = 360° - 2C = 360° - 6A.$$

Pero los ángulos $POQ$ y $BOD$ son iguales, pues son opuestos por el vértice; luego $180° - A = 360° - 6A$, es decir, $A = 36°$ y $C = 3A = 3 \cdot 36° = 108°$ .

**4.** Obviamente no hay números supersticiosos de una cifra. Si un número de dos cifras $ab$ fuera supersticioso, $10a + b = 13(a + b)$, lo que es imposible.

Si un número de tres cifras $abc$ fuera supersticioso, tendríamos $100a + 10b + c = 13(a + b + c)$, es decir $87a = 3b + 12c$, de donde $29a = b + 4c$. El máximo valor posible para $b + 4c$ es 45 (para $b = c = 9$), con lo que $a$ debe ser 1 y la ecuación $29 = b + 4c$ tiene por soluciones los pares $(1, 7)$, $(5, 6)$ y $(9, 5)$. Los números 117, 156 y 195 son los únicos números supersticiosos de tres cifras.

Si un número de cuatro cifras $abcd$ es supersticioso, resultaría $1000a + 100b + 10c + d = 13(a + b + c + d)$. Como el número de la izquierda es, como poco 1000, y el de la derecha como mucho $13 \cdot 36 = 468$, no hay números supersticiosos de cuatro cifras.

Tampoco hay ningún número supersticioso de más de cuatro cifras, ya que cada dígito agregado contribuye al menos en 1000 al número de la izquierda, mientras que el de la derecha contribuye como mucho en $13 \cdot 9 = 117$. Así pues, los únicos números supersticiosos son 117, 156 y 195.

**5.** Zoila es amiga de 13 personas. Zoila no es amiga de Alicia (ya que Alicia solo es amiga de una persona y esa es Yvonne que es amiga de todos). Zoila es amiga de la persona 24 que es amiga de todos excepto Alicia. Zoila no es amiga de Bruno que solo es amigo de dos y son las personas 24 y 25. Zoila es amiga de la persona 23 (que es amiga de todos excepto Alicia y Bruno) pero no es amiga de Carlos que es amigo de las personas 23, 24 y 25. Y se puede seguir así... Zoila es amiga de la persona 14 (que es amiga de todos las personas excepto las primeras 11) pero no es amiga de la persona número 12 que solo es amiga de las personas del 14 al 25. Zoila es amiga de la persona 13 (que no es amiga de las personas del 1 al 12, por lo tanto es amiga de las personas del 14 al 26) Finalmente Zoila es amiga de las personas del 13 al 25 es decir, es amiga de 13 personas.

## 4.3. Problemas del Segundo Nivel

**Problema 1.** Ana y Celia venden varios objetos y obtienen por cada objeto tantos euros como objetos vendieron. El dinero obtenido está constituido por algunos billetes de 10 euros y menos de 10 monedas de 1 euro. Deciden repartir el dinero del siguiente modo: Ana toma un billete de 10 euros y después Celia, y así sucesivamente hasta que Ana toma el último billete de 10 euros, y Celia se lleva todas las monedas de 1 euro. ¿Cuántos euros más que Celia se llevó Ana? Dar todas las posibilidades.

**Problema 2.** Se tiene un tablero de $7 \times 7$. Se desea pintar algunas de sus casillas de manera tal que cualquier subtablero de $3 \times 3$ tenga más casillas pintadas que sin pintar. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que se deben pintar? Mostrar una configuración con esa cantidad de casillas pintadas y explicar porqué no es posible con menos.

ACLARACIÓN: Un subtablero de $3\times3$ es un cuadrado formado por 9 casillas del tablero.

**Problema 3.** Sea $ABCDEFGHI$ un polígono regular de 9 lados. Los segmentos $AE$ y $DF$ se cortan en $P$. Demostrar que $PG$ y $AF$ son perpendiculares.

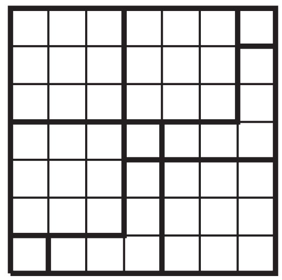
**Problema 4.** En una pizarra están escritos los primeros 510 enteros positivos: 1, 2, 3, ..., 510. Una operación consiste en borrar dos números cuya suma sea un número primo. ¿Cuál es el máximo número de operaciones seguidas que se puede hacer? Mostrar cómo se logra y explicar porqué no se puede hacer más operaciones.

**Problema 5.** Se tienen 65 puntos del plano. Se trazan todas las rectas que pasan por dos de ellos y se obtienen exactamente 2015 rectas distintas. Demostrar que al menos cuatro de los puntos están alineados.

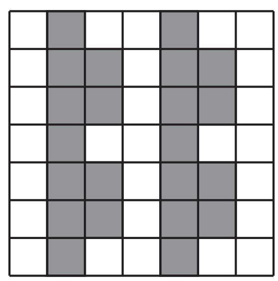
## 4.4. Soluciones del Segundo Nivel

**1.** Sea $n$ el número de objetos. El valor obtenido es $n^2$ euros. El número de billetes de 10 euros es impar, esto es $2p + 1$. Sea $a$ el número de monedas de 1 euro. Entonces: $n^2 = (2p+1)10 + a$ con $a < 10$. Y $n$ se puede expresar como $n = 10x + y$ con $y < 10$. Por lo tanto, $n^2 = 100x^2 + 20xy + y^2 = 2 \cdot 10(5x^2 + xy) + y2$. Como $n^2$ tiene un número impar de decenas lo mismo ocurre con $y^2$. Como los únicos cuadrados de números menores de 10 que tienen impar las decenas son 16 y 36 y en los dos casos el número de las unidades es 6 resulta que el número de monedas de 1 euro es 6. Ana se llevó 4 euros más que Celia.

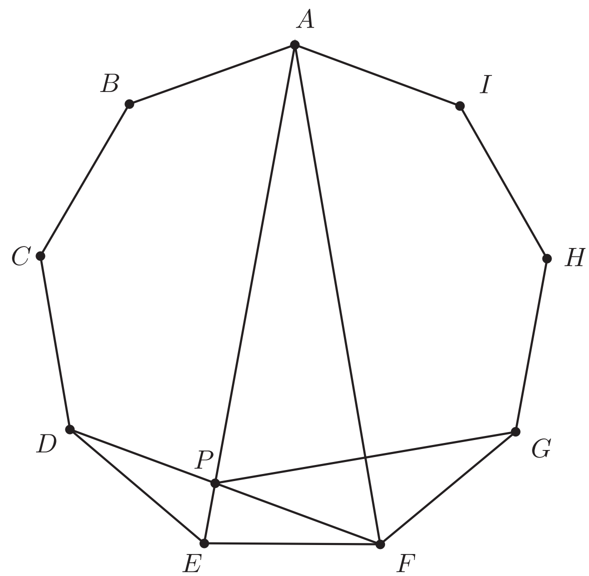
**2.** Dividimos el tablero de la siguiente manera:



Luego, en cada cuadrado de $3 \times 3$ hay al menos 5 casillas pintadas y en cada región en forma de L hay al menos una casilla pintada (en caso contrario el cuadrado que lo contiene tendría a lo más cuatro). Así, necesitamos al menos 22 casillas pintadas y un ejemplo con 22 casillas pintadas es el siguiente.



**3.** Los 9 vértices de un polígono regular de 9 lados pertenecen a una misma circunferencia $C$, donde cada arco determinado mide $40°$. Como el menor arco $AD$ mide $120°$ y el menor arco $EF$ mide $40°$ entonces $DPA = \frac{120°+40°}{2} = 80°$ . Además como el menor arco $AF$ mide $160°$ entonces $FDA = PDA = 80°$. Luego el triángulo $DAP$ es isósceles con $AD = AP$. Pero es claro que $AD = AG$, en consecuencia $AP = AG$. De forma similar tenemos que $FEP = 80°$ y como $EPF = 80°$ resulta $FP = FE$. Pero $FG = FE$, entonces $FG = FP$. En el cuadrilátero $APFG$ tenemos que $FP = FG$ y $AP = AG$, con lo cual los triángulos $APF$ y $AGF$ son congruentes, luego se sigue que las perpendiculares de $P$ y $G$ sobre $AF$ caen en el mismo punto, es decir, $PG$ es perpendicular a $AF$.




**4.** Se puede hacer como máximo 255 operaciones permitidas. El número 521 es primo (basta ver que no es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19), así que realizamos las operaciones en las que se borran los números $k$ y $521 - k$, para $k$ entre 11 y 260. Hasta ahora hemos realizado 250 operaciones y en la pizarra quedan los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Para terminar hacemos las operaciones (10, 3), (9, 4), (8, 5), (7, 6) y (1, 2). Hemos conseguido realizar 255 operaciones y ya no hay números en la pizarra, luego éste es el máximo. Observar que se puede hacer lo mismo usando otros primos. Por ejemplo, con 523 se borran los números entre 13 y 510, y luego se borran las 6 parejas que suman 13: (1, 12); (2, 11); $\ldots$; (6, 7).

**5.** En primer lugar, $\binom{65}{2} = \frac{65 \cdot 64}{2} = 2080$ implica que hay 3 puntos colineales, pues solo se pueden trazar 2015 rectas. Supongamos que no hay 4 puntos alineados, entonces toda recta que pasa por dos de los 65 puntos contiene 2 o 3 de los puntos. Luego $\binom{65}{2}$ cuenta una vez las rectas que solo contienen 2 puntos y cuenta 3 veces las que contienen 3 puntos. Para obtener el número de rectas hay que restar 2 por cada recta que pasa por 3 puntos. Si hay $n$ de estas rectas, entonces $2015 = 2080 - n \cdot 2$. Luego $n|\frac{65}{2}$, pero $n$ es entero. Contradicción.

# Capítulo 5

# Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe tuvo lugar en Cuernavaca, México, desde el 20 hasta el 26 de junio de 2015. Participaron trece países: Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela.

Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Amanda Vanegas (San Francisco, Edo. Zulia), Iván Rodríguez (Santiago de León, Caracas) y Wemp Pacheco (Calicantina, Edo. Aragua). El Jefe de la delegación fue José Heber Nieto y la tutora Estefanía Ordaz.

Wemp Pacheco obtuvo medalla de oro, Amanda Vanegas medalla de plata e Iván Rodríguez medalla de bronce. Además el equipo venezolano obtuvo la Copa El Salvador, que se otorga al país con mayor progreso relativo respecto a los dos años anteriores.

## 5.1. Problemas

### Primer Día

**Problema 1.** Se desea escribir $n$ números reales diferentes, con $n \geq 3$, alrededor de una circunferencia, de modo que cada uno de ellos sea igual al producto de su vecino de la derecha por su vecino de la izquierda. Determine todos los valores de $n$ para los cuales lo anterior es posible.

**Problema 2.** Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales está definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 2015$, y para todo entero $n \geq 1$ como

$$a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}.$$

Calcule el valor de

$$\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} - \frac{a_4}{a_5} + \cdots + \frac{a_{2013}}{a_{2014}} - \frac{a_{2014}}{a_{2015}}.$$

**Problema 3.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB < CD$, y sea $P$ el punto de intersección de las rectas $AD$ y $BC$. El circuncírculo del triángulo $PCD$ corta a la recta $AB$ en los puntos $Q$ y $R$. Sean $S$ y $T$ los puntos donde las tangentes desde $P$ al circuncírculo de $ABCD$ tocan a dicha circunferencia.

(a) Pruebe que $PQ = PR$.

(b) Muestre que $QRST$ es un cuadrilátero cíclico.

**Segundo Día**

**Problema 4.** Anselmo y Bonifacio inician un juego donde alternadamente van sustituyendo el número escrito en la pizarra. En cada turno, el jugador debe sustituir el número escrito, ya sea por la cantidad de divisores del número escrito o por la diferencia entre el número escrito y su cantidad de divisores. Anselmo es el primero en jugar, y aquel jugador que escriba el 0 gana. Dado que el número inicial es 1036, determine cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora y describa dicha estrategia.

Nota: Por ejemplo, la cantidad de divisores del 14 es 4, pues sus divisores son 1, 2, 7 y 14.

**Problema 5.** Sea $ABC$ un triángulo tal que $AC = 2AB$. Sea $D$ el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $CAB$ con $BC$. Sea $F$ el punto de intersección de la paralela a $AB$ por $C$ con la perpendicular a $AD$ por $A$. Muestre que $FD$ pasa por el punto medio de $AC$.

**Problema 6.** En una olimpiada de matemáticas participaron 39 alumnos. El examen consistió en 6 problemas y cada uno se calificó con 1 punto si estaba correcto o con 0 si estaba incorrecto. Para cualesquiera tres alumnos, hay a lo más un problema que no fue resuelto por ninguno de los tres. Sea $B$ la suma de los puntos que obtuvieron los 39 alumnos. Encuentre el menor valor posible para $B$.

## 5.2. Soluciones

**1.** (Solución de Iván Rodríguez) El único valor posible es $n = 6$. Sean $a_1$, $a_2$,…, $a_n$ los números ordenados en sentido horario.

Si $n = 3$ entonces $a_1 = a_2a_3$ (1) y $a_2 = a_1a_3$ (2). Reemplazando $a_2$ de (2) en (1) resulta $a_1 = (a_1a_3)a_3$, de donde $1 = a_3^2$ y $a_3$ es 1 o $-1$. Análogamente $a_1 = \pm 1$ y $a_2 = \pm 1$. Pero por el principio de las casillas al menos dos de estos números deben ser iguales y por lo tanto para $n = 3$ no es posible.

Si $n = 4$ se tiene $a_2 = a_1 a_3 = a_4$ y tampoco es posible.

Si $n = 5$ se tiene $a_2 = a_1 a_3$ (1), $a_3 = a_2 a_4$ (2) y $a_4 = a_3 a_5$ (3). Reemplazando $a_2$ de (1) y $a_4$ de (3) en (2) resulta $a_3 = (a_1 a_3)(a_3 a_5)$, de donde $a_1 a_3 a_5 = 1$. Pero comenzando con $a_3$ en vez de $a_1$ se obtiene análogamente que $a_3 a_5 a_2 = 1$. Luego $a_1 a_3 a_5 = a_3 a_5 a_2$, de donde $a_1 = a_2$ y tampoco es posible.

Para $n = 6$ sí hay solución, por ejemplo los números 2, 6, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$.

Si $n \geq 7$ se tiene $a_1 a_3 a_5 = 1$ (como se vió en el caso $n = 5$) y análogamente $a_3 a_5 a_7 = 1$, luego $a_1 a_3 a_5 = a_3 a_5 a_7$ y $a_1 = a_7$, es decir que no es posible. es posible.

**2.** (Solución de Amanda Vanegas)

$$a_2 = \frac{1-1}{1+1}a_1 - \frac{1-2}{1^2+1}a_0 = 0 - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = \frac{2-1}{2+1}a_2 - \frac{2-2}{2^2+2}a_1 = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$a_4 = \frac{3-1}{3+1}a_3 - \frac{3-2}{3^2+3}a_2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}.$$

Conjeturamos que $a_k = \frac{1}{k!}$ para $k \geq 2$. Lo probaremos por inducción fuerte. Para $k = 2, 3$ y 4 es cierto. Si es cierto para $2 \leq k \leq n$, entonces

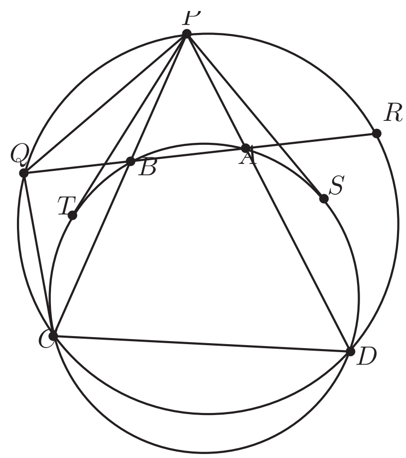
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{n!} - \frac{n-2}{n(n+1)}\frac{1}{(n-1)!} \\ &= \frac{n-1}{(n+1)!} - \frac{n-2}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

y listo. Llamemos $S$ la suma buscada. Entonces

$$\begin{aligned} S &= \frac{2015}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2!}}{\frac{1}{3!}} + \frac{\frac{1}{3!}}{\frac{1}{4!}} - \cdots + \frac{\frac{1}{2013!}}{\frac{1}{2014!}} - \frac{\frac{1}{2014!}}{\frac{1}{2015!}} \\ &= 4030 - \frac{3!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \cdots + \frac{2014!}{2013!} - \frac{2015!}{2014!} \\ &= 4030 - 3 + 4 - 5 + \cdots + 2014 - 2015 \\ &= 4030 + (-3+4) + (-5+6) + \cdots + (-2013+2014) - 2015 \\ &= 4030 + 1 + 1 + \cdots + 1 - 2015 = 4030 + 1006 - 2015 = 3021. \end{aligned}$$

**3.** Los triángulos $PQC$ y $PBQ$ son semejantes, ya que tienen el ángulo en $P$ común y además

$$\angle PQC = 180^\circ - \angle PDC = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC = \angle PBQ.$$




Por lo tanto $PQ/PB = PC/PQ$ y $PB \cdot PC = PQ^2$. Análogamente $PA \cdot PD = PR^2$, y como la potencia de $P$ respecto a la circunferencia que pasa por $A$, $B$, $C$ y $D$ es $PB \cdot PC = PA \cdot PD = PS^2 = PT^2$, resulta $PQ^2 = PR^2 = PS^2 = PT^2$ y por tanto $PQ = PR = PS = PT$, es decir que $Q$, $R$, $S$ y $T$ pertenecen a una misma circunferencia de centro $P$.

**4.** (Solución de Wemp Pacheco) Al ser $1036 = 2^2 \cdot 7 \cdot 37$, su número de divisores es $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$. Entonces Anselmo en la primera jugada puede poner 12 o $1036 - 12 = 1024$.

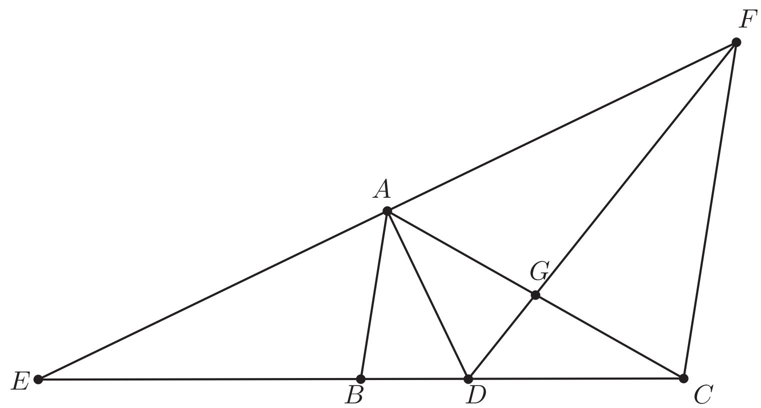
Notemos que si un jugador pone 1 o 2 entonces pierde, pues el 1 tiene un divisor y el 2 tiene dos, luego el otro jugador puede poner 0.

Bonifacio tiene una estrategia ganadora, que es la siguiente:

Si Anselmo pone 12, que tiene 6 divisores, entonces Bonifacio pone 6, que tiene 4 divisores. Si ahora Anselmo pone 2 pierde, y si pone 4 entonces Bonifacio pone 3, tras lo cual Anselmo sólo puede poner 1 ó 2 y pierde.

Si Anselmo pone 1024, que tiene 11 divisores, entonces Bonifacio pone 11, que tiene 2 divisores. Si ahora Anselmo pone 2 pierde, y si pone 9 entonces Bonifacio pone 3 y gana como en el caso anterior.

**5.** Sean $E$ el punto de corte de $AF$ con $BC$, y $G$ el punto de corte de $DF$ con $AC$. Debemos probar que $G$ es el punto medio de $AC$.
Una primera observación es que $AE$ es la bisectriz externa de $\angle CAB$, de donde por el teorema de la bisectriz externa $CE/EB = CA/AB = 2$, es decir $B$ es el punto medio de $CE$. Luego el teorema de Thales asegura que $FA/AE = CB/BE = 1$, por lo que $A$ es el punto medio de $EF$. En consecuencia los triángulos rectángulos $ADE$ y $ADF$ son congruentes, de donde $DE = DF$ y $\angle DFA = \angle DEA$.




Pero esto último junto con el hecho de que $\angle BAE = \angle GAF = 90° - \angle CAB/2$ implica que los triángulos $ABE$ y $AGF$ son congruentes (criterio ALA), lo cual implica que $AG = AB$. Y como $AC = 2AB$, esto garantiza que $G$ es el punto medio de $AC$, tal y como se pedía.

**6.** Sea $A_i$ el conjunto de estudiantes que no resolvieron el problema $i$. La condición equivale a decir que $|A_i \cap A_j| \leq 2$ para todos los $1 \leq i, j \leq 6$. Como $B = 39 \cdot 6 - \sum |A_i|$, minimizar $B$ es lo mismo que maximizar $\sum |A_i|$. Por el principio de inclusiones y exclusiones se tiene

$$\begin{aligned} |\cup S_i| &= \sum |S_i| - \sum |S_i \cap S_j| + \cdots \geq \sum |S_i| - \sum |S_i \cap S_j| \\ &\leq \binom{6}{2} \cdot 2 + 39 = 69. \end{aligned}$$

Luego $B \leq 6 \cdot 39 - 69 = 165$.

Veamos ahora que efectivamente se pueden lograr 165 puntos. Sea $P$ el conjunto de los 6 problemas. Para cada subconjunto $Q \subset P$ con $|Q| = 4$, tomemos 2 estudiantes que resolvieron, cada uno, los problemas en $Q$ y ningún otro. Como hay $\binom{6}{4} = 15$ subconjuntos $Q$ eso nos da 30 estudiantes. Digamos que cada uno de los 8 estudiantes restantes resolvió 5 problemas. Esta configuración cumple la condición del problema y el total de puntos es $30 \cdot 4 + 9 \cdot 5 = 165$.

En conclusión el menor valor posible para $B$ es 165.

# Capítulo 6

# Olimpiada Iberoamericana de Matemática

La XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemática tuvo lugar en Mayagüez, Puerto Rico, del 7 al 14 de Noviembre de 2015. En la misma participaron 26 países: Angola, Argentina, Bolivia, Brasil, Cabo Verde, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Mozambique, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, República Dominicana, Santo Tomé y Príncipe, Uruguay y Venezuela. Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Amanda Vanegas, del colegio San Francisco de Asís de Maracaibo, Wemp Pacheco, del colegio Calicantina de Maracay e Iván Rodríguez, del colegio Santiago León de Caracas. Wemp Pacheco ganó medalla de bronce y tanto Amanda como Iván lograron menciones honoríficas. La delegación fue liderada por la profesora Laura Vielma de la Academia Washington de Caracas y la tutora fue Estefanía Ordaz, licenciada en Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar.

## 6.1. Problemas

### Primer Día

**Problema 1.** El número 125 se puede representar como suma de varios números naturales que son mayores que 1 y coprimos dos a dos. Encuentre el máximo número de sumandos que puede tener tal representación.

**Problema 2.** Una recta $r$ contiene los puntos $A$, $B$, $C$, $D$, en ese orden. Sea $P$ un punto fuera de $r$ tal que $\angle APB = \angle CPD$. Pruebe que la bisectriz de $\angle APD$ corta a $r$ en un punto $G$ tal que

$$\frac{1}{GA} + \frac{1}{GC} = \frac{1}{GB} + \frac{1}{GD}.$$

**Problema 3.** Sean $\alpha$ y $\beta$ las raíces del polinomio $x^2 - qx + 1$, donde $q$ es un número racional mayor que 2. Se define $s_1 = \alpha + \beta$, $t_1 = 1$ y para cada entero $n \geq 2$:

$$s_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad t_n = s_{n-1} + 2s_{n-2} + \cdots + (n-1)s_1 + n.$$

Demuestre que, para todo $n$ impar, $t_n$ es el cuadrado de un número racional.

**Segundo Día**

**Problema 4.** En el triángulo acutángulo $ABC$ el punto $D$ es el pie de la perpendicular desde $A$ sobre el lado $BC$. Sea $P$ un punto en el segmento $AD$. Las recta $BP$ y $CP$ cortan a los lados $AC$ y $AB$ en $E$ y $F$ respectivamente. Sean $J$ y $K$ los pies de las perpendiculares desde $E$ y $F$ sobre $AD$ respectivamente. Demuestre que

$$\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}.$$

**Problema 5.** Determine todos los pares $(a, b)$ de números enteros que verifican

$$(b^2 + 7(a - b))^2 = a^3 b.$$

**Problema 6.** Beto juega con su computadora al siguiente juego: inicialmente su computadora elige al azar 30 enteros de 1 a 2015, y Beto los escribe en un pizarrón (puede haber números repetidos); en cada paso, Beto elige un entero positivo $k$ y algunos de los números escritos en el pizarrón, y le resta a cada uno de ellos el número $k$, con la condición de que los números resultantes sigan siendo no negativos. El objetivo del juego es lograr que en algún momento los 30 números sean iguales a 0, en cuyo caso el juego termina. Determine el menor número $n$ tal que, independientemente de los números que inicialmente eligió su computadoraue, Beto puede terminar el juego en a lo sumo $n$ pasos.

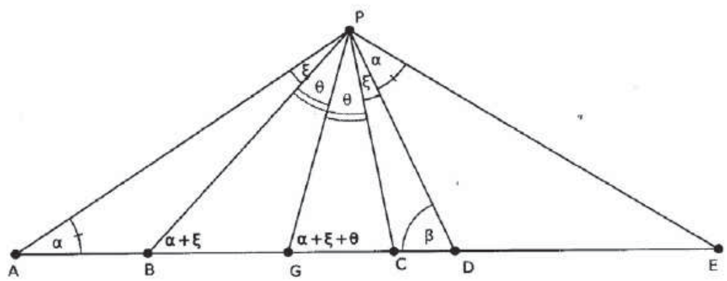
## 6.2. Soluciones

**1.** El número máximo en cuestión es 8 sumandos. Por ejemplo

$$125 = 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 16 + 17 + 53.$$

Todos los sumandos son primos distintos impares, excepto 16 que es una potencia de 2. Supongamos que existe una representación con más de 8 sumandos. A lo sumo uno de ellos es par, luego al menos 8 son impares. Por otra parte, 125 es impar, de modo que el número de sumandos impares es impar, de modo que son por lo menos 9. Reemplazamos cada sumando impar por uno de sus factores primos. El resultado es una suma menor o igual que 125 que contiene al menos 9 primos impares. Los primos son distintos porque los sumandos de la representación son coprimos dos a dos. Sin embargo esta conclusión es imposible pues la suma de los 9 primos impares más pequeños es mayor que 125: $3+5+7+11+13+17+19+23+29 = 129$. La contradicción completa la solución.

**2.** Sea $PG$ la bisectriz común de los ángulos $\angle APD$ y $\angle BPC$. Sean $\xi$, $\theta$, $\alpha$ y $\beta$ los ángulos indicados en la figura siguiente.




La recta que forma un ángulo $\alpha$ con $PD$, en el sentido indicado en la figura, corta a $AD$ en el punto $E$. Si la construcción se torna dificultosa porque $E$ se nos va al infinito, es porque $\alpha = \beta$, en cuyo caso el problema es trivial ya que todo es simétrico: $\alpha+\xi+\theta = 90°$, $GA = GD$, $GB = GC$, etc.

Supongamos entonces, sin pérdida de generalidad, que $\alpha < \beta$ y $E$ bien definido. Se ve inmediatamente que el triángulo $EPG$ es isósceles con $EP = EG$, y además $EP$ es tangente común a las circunferencias circunscritas de $APD$ y $BPC$. Razonando con la potencia de $E$ respecto de la circunferencia que pasa por $P$, $A$ y $D$ tenemos:

$$EG^2 = EP^2 = EA \cdot ED = (EG + GA)(EG - GD),$$

de donde $0 = EG(GA - GD) - GA \cdot GD$ y

$$EG = \frac{GA \cdot GD}{GA - GD}.$$

Análogamente, considerando la potencia de $E$ respecto de la la circunferencia $PBC$, resulta

$$EG = \frac{GB \cdot GC}{GB - GC}.$$

Igualando las dos expresiones se obtiene

$$\frac{GA \cdot GD}{GA - GD} = \frac{GB \cdot GC}{GB - GC},$$

de donde

$$\frac{GA - GD}{GA \cdot GD} = \frac{GB - GC}{GB \cdot GC},$$

es decir

$$\frac{GA - GD}{GA \cdot GD} = \frac{GB - GC}{GB \cdot GC},$$
$$\frac{1}{GD} - \frac{1}{GA} = \frac{1}{GC} - \frac{1}{GB},$$

expresión equivalente a la pedida.

**3.** Vamos a plantear y resolver una relación de recurrencia para encontrar una fórmula explícita para $t_n$.

Por las relaciones de Vieta sabemos que $\alpha + \beta = q$ y $\alpha\beta = 1$. Ahora notemos que $(\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) = \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} + \alpha^n + \beta^n$, de donde la sucesión $s_n$ satisface

$$s_{n+2} - qs_{n+1} + s_n = 0$$

para todo $n \geq 1$. De esto se desprende que

$$\begin{aligned}
&t_{n+2} - qt_{n+1} + t_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k(s_{n+2-k} - qs_{n+1-k} + s_{n-k}) + n(s_2 - qs_1 + 1) + (n+1)(s_1 - q) + (n+2) \\
&= 0 - n + 0 + (n+2) = 2.
\end{aligned}$$

Luego la sucesión $t_n$ satisface la relación de recurrencia

$$t_{n+2} - qt_{n+1} + t_n = 2$$

para todo $n \geq 1$. Esta relación no es homogénea, pero restando la ecuación anterior de $t_{n+3} - qt_{n+2} + t_{n+1} = 2$ deducimos que

$$t_{n+3} - (q+1)t_{n+2} + (q+1)t_{n+1} - t_n = 0$$

para todo $n \geq 1$. Ahora podemos aplicar la teoría elemental de las relaciones de recurrencia homogéneas: el polinomio característico correspondiente es

$$x^3 - (q+1)x^2 + (q+1)x - 1 = (x-1)(x^2 - qx + 1) = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta).$$

Puesto que $q > 2$, vemos que $\alpha$ y $\beta$ son distintos entre sí y distintos de 1, por lo que la solución general de esta recurrencia toma la forma

$$t_n = A\alpha^n + B\beta^n + C$$

donde $A$, $B$, $C$ son constantes por determinar. Es fácil verificar que $t_1 = 1$, $t_2 = q + 2$, $t_3 = (q+1)^2$. La primera ecuación es

$$A\alpha + B\beta + C = 1. \tag{6.1}$$

Usando los valores de $t_1$ y $t_2$ vemos que

$$2 = t_2 - qt_1 = A(\alpha^2 - q\alpha) + B(\beta^2 - q\beta) + C(1 - q) = -A - B + C(1 - q), \qquad (6.2)$$

y empleando $t_2$ y $t_3$ se infiere que

$$1 = t_3 - qt_2 = A(\alpha^3 - q\alpha^2) + B(\beta^3 - q\beta^2) + C(1 - q) = -A\alpha - B\beta + C(1 - q). \quad (6.3)$$

De (6.1) y (6.3) se obtiene que

$$C = \frac{-2}{q-2}.$$

Luego las ecuaciones (6.1) y (6.2) se convierten en

$$A + B = C(1 - q) - 2 = \frac{2}{q-2}, \quad A\alpha + B\beta = 1 - C = \frac{q}{q-2}.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales llegamos a

$$A = B = \frac{1}{q-2}.$$

Por tanto la fórmula deseada es

$$t_n = \frac{\alpha^n + \beta^n - 2}{q-2}.$$

Puesto que hemos asumido que $q > 2$, tenemos que $\alpha, \beta$ son números reales y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha > \beta$. Luego la sucesión de números reales

$$u_n = \sqrt{t_n} = \sqrt{\frac{(\alpha^{n/2} - \beta^{n/2})^2}{q-2}} = \frac{\alpha^{n/2} - \beta^{n/2}}{\sqrt{q-2}}.$$

está bien definida, y ya que $t_1 = 1$, $t_3 = (q+1)^2$ resulta que $u_1 = 1$, $u_3 = q + 1$. Pero

$$(\alpha + \beta)(\alpha^{n/2} - \beta^{n/2}) = \alpha^{(n+2)/2} - \beta^{(n+2)/2} + \alpha^{(n-2)/2} - \beta^{(n-2)/2}$$

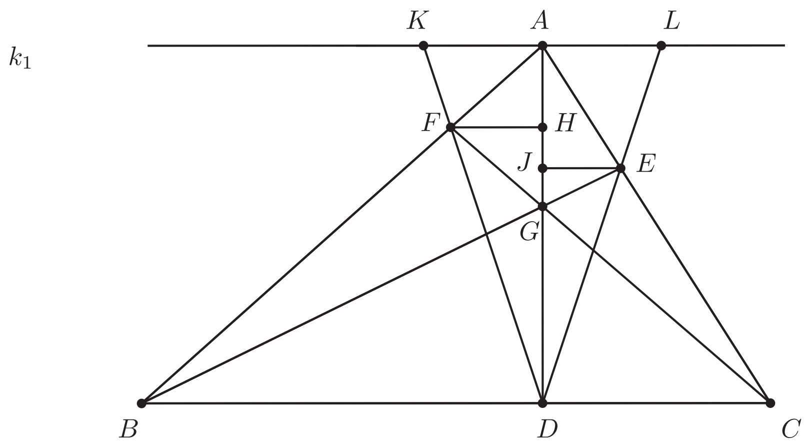
y esto implica que para todo $n \geq 3$ se cumple la relación

$$u_{n+2} - qu_{u_n} + u_{n-2} = 0.$$

Por último, como $u_1$, $u_3$ son racionales la recurrencia anterior establece que todos los términos impares de la sucesión son racionales. Así $t_n = u_n^2$ es el cuadrado de un número racional para todo $n$ impar.

Nota: Este problema también se puede resolver usando funciones generatrices.

**4.** Por $A$ trazamos la recta $r$ paralela a $BC$. Los puntos K y $L$ son las intersecciones de $DE$ y $CF$ con $r$.




$$\triangle FPA \sim \triangle BFD \Longrightarrow \frac{KA}{BD} = \frac{AF}{FB};$$
$$\triangle AEL \sim \triangle BCE \Longrightarrow \frac{AL}{DC} = \frac{AE}{EC};$$

de lo anterior tenemos

$$KA = \frac{AF}{FB} \cdot BD, \qquad AL = \frac{AE}{EC} \cdot CD \tag{6.4}$$

por otra parte

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \quad \text{(Teorema de Ceva)}$$

luego

$$\frac{AF}{FB} \cdot BD = \frac{AE}{EC} \cdot CD. \tag{6.5}$$

De (6.4) y (6.5) se obtiene que $KA = AL$, entonces $AD$ es bisectriz de $\angle FDE$, por consiguiente $\triangle FHD \sim \triangle JED$. Luego:

$$\frac{FH}{HD} = \frac{EJ}{JD}.$$

**5.** Desarrollando la ecuación obtenemos, sucesivamente,

$$b^4 + 14b^2(a-b) + 49(a-b)^2 = a^3b,$$
$$a^3b - b^4 - 14b^2(a-b) - 49(a-b)^2 = 0,$$
$$(a-b)(a^2b + ab^2 + b^3 - 14b^2 - 49(a-b) = 0, \tag{1}$$

Si $a = b$ la (1) se verifica idénticamente. Tenemos, entonces, una primera familia infinita de soluciones de la ecuación:

$$a = b = t, \text{con } t \in \mathbb{Z} \tag{*}$$

A partir de ahora supondremos que $a \neq b$. Entonces de (1) deducimos que

$$a^2b + ab^2 + b^3 - 14b^2 - 49(a - b) = 0 \tag{2}$$

Si $b = 0$ obtenemos en (2) que $a = 0$. La solución $a = b = 0$ ya estaba englobada en (*). Supondremos desde ahora que $b \neq 0$ y consideramos (2) como una ecuación cuadrática en $a$:

$$ba^2 + (b^2 - 49)a + b^3 - 14b^2 + 49b = 0 \tag{3}$$

El discriminante $D$ de (3) es

$$\begin{aligned} D &= (b^2 - 49)^2 - 4b(b^3 - 14b^2 + 49b) \\ &= (b - 7)^2 \left((b + 7)^2 - 4b^2\right) = -(b - 7)^3(3b + 7). \end{aligned} \tag{4}$$

La ecuación (3) tendrá soluciones reales si y solo si $D \geq 0$. Esto ocurre si y solo si $b \in [-\frac{7}{3}, 7]$. Como se buscan las soluciones enteras de (1), determinamos los números enteros que están en ese intervalo, que son $-2$, $-1$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Por lo que hemos visto anteriormente podemos prescindir del caso $b = 0$. Además los valores que nos interesan son los que hacen que $D$ sea cuadrado perfecto. Esto limita las consideraciones a $D = 27^2$ si $b = -2$, $D = 2^10$ si $b = 3$, $D = 5^2$ si $b = 6$ y $D = 0$ si $b = 7$. Las soluciones de (3) son entonces

$$a_{1,2} = \frac{49 - b^2 \pm \sqrt{D}}{2b},$$

que en cada uno de los casos anteriores conduce a

$$\begin{aligned} D = 27^2, &\quad b = -2 \quad \to \quad a_1 = -\frac{9}{2}, \quad a_2 = -18, \\ D = 2^10, &\quad b = 3 \quad \to \quad a_1 = \frac{4}{3}, \quad a_2 = 12, \\ D = 5^2, &\quad b = 6 \quad \to \quad a_1 = \frac{13}{12}, \quad a_2 = \frac{85}{12}, \\ D = 0, &\quad b = 7 \quad \to \quad a_1 = a_2 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

En conclusión, las soluciones enteras de (1) son $a = b = t$, con $t \in \mathbb{Z}$, junto con las parejas $(a, b)$ siguientes: $(-18, 2)$, $(0, 7)$ y $(12, 3)$.

**6.** La respuesta es 11. Para ver que Beto puede ganar siempre en 11 pasos, sean $a_1$, $a_2$,..., $a_{26}$ los números escritos inicialmente en el pizarrón. Escribamos los números en binario. Sea $b^i_{10}b^i_9 \ldots b^i_0$ la representación de $a_i$ en binario (esta representación puede tener ceros por delante, pero lo importante es que no tiene más de 11 dígitos binarios, pues $2015 < 2^11$). En el $n$-ésimo paso, Beto le resta $2^{n-1}$ al $i$-ésimo número si $b_{n-1}^i = 1$. Con este procedimiento es claro que al cabo de 11 pasos todos los números se reducen a cero.

Para ver que Beto no se puede garantizar la victoria con menos de 11 pasos, probamos por inducción en $n$ que los números 1, 2, 4,..., $2^{n-1}$ no pueden ser reducidos a 0 en $n-1$ pasos. En tal caso, si los 26 números iniciales son tales que contienen a 1, 2, 4,..., 1024, Beto no podrá ganar en 10 movidas (ni tampoco en menos), y habremos terminado. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que la proposición vale para algún $n \geq 1$ y supongamos por absurdo que los números 1, 2, 4,..., $2^n$ se pueden reducir a 0 en $n$ pasos. Consideremos una tal secuencia de pasos. Si alguno de ellos involucra únicamente al $(n+1)$-ésimo número (el que inicialmente era $2^n$), entonces los $n-1$ pasos restantes serían suficientes para reducir los números 1, 2, 4,..., $2^{n-1}$ a 0, contradiciendo la hipótesis inductiva. Luego los $n$ pasos deben involucrar todos a alguno de los primeros $n$ números (es decir, a alguno de los que inicialmente era $2^i$, $i \leq n-1$). Pero entonces, consideremos el valor $f(t) = a_{n+1}^t - (a_n^t + \cdots + a_1^t)$ en cada paso, donde $a_i^t$ es el valor después de $t$ pasos del $i$-ésimo número (luego $a_i^0 = 2^{i-1}$). Este valor resulta, por la observación anterior, creciente (mas no necesariamente estrictamente). Pero su valor inicial es $f(0) = 2^n - (2^{n-1} + \cdots + 1) = 1$ y su valor final es $f(n) = 0$, contradicción. Esto completa la inducción, y la solución está completa.

Comentario: 26 y 2015 pueden ser cambiados por cualquier par $m$ y $n$ de números naturales tales que $2^m > n$; el resultado es que los números se pueden reducir a cero en $\lceil \log_2 n \rceil$ pasos pero no en menos (con certeza).

# Capítulo 7

# Olimpiada Internacional de Matemática

ESTA sección está dedicada a la $55^a$ Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) celebrada en Chiang Mai, Tailandia, del 4 al 16 de Julio del 2015, con la participación de 577 jóvenes provenientes de 104 países de los cinco continentes. La delegación venezolana estuvo integrada por dos estudiantes, Rafael Aznar Segrera del colegio Los Arcos de Caracas, ganador de una Mención Honorífica, y José Tomás Guevara, del colegio Bella Vista de Maracay. La tutora de la delegación fue la Lic. Sofía Taylor Coronel y el jefe de la delegación el Prof. Rafael Sánchez Lamoneda, ambos de la Universidad Central de Venezuela.

## 7.1. Problemas

**Primer Día**

**Problema 1.** Decimos que un conjunto finito $\mathcal{S}$ de puntos del plano es *equilibrado* si para cada dos puntos distintos $A$ y $B$ en $\mathcal{S}$ hay un punto $C$ en $\mathcal{S}$ tal que $AC = BC$. Decimos que $\mathcal{S}$ es *libre de centros* si para cada tres puntos distintos $A$, $B$, $C$ en $\mathcal{S}$ no existe ningún punto $P$ en $\mathcal{S}$ tal que $PA = PB = PC$.

(a) Demostrar que para todo $n \geq 3$ existe un conjunto de $n$ puntos equilibrado.

(b) Determinar todos los enteros $n \geq 3$ para los que existe un conjunto de $n$ puntos equilibrado y libre de centros.

**Problema 2.** Determinar todas las ternas $(a, b, c)$ de enteros positivos tales que cada uno de los números

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

es una potencia de 2.

(*Una potencia de* 2 *es un entero de la forma* $2^n$, *donde* $n$ *es un entero no negativo.*)

**Problema 3.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo con $AB > AC$. Sea $\Gamma$ su circunferencia circunscrita, $H$ su ortocentro, y $F$ el pie de la altura desde $A$. Sea $M$ el punto medio del segmento $BC$. Sea $Q$ el punto de $\Gamma$ tal que $\angle HQA = 90°$ y sea $K$ el punto de $\Gamma$ tal que $\angle HKQ = 90°$. Supongamos que los puntos $A$, $B$, $C$, $K$ y $Q$ son todos distintos y están sobre $\Gamma$ en este orden. Demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo $KQH$ es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo $FKM$.

**Segundo Día**

**Problema 4.** El triángulo $ABC$ tiene circunferencia circunscrita $\Omega$ y circuncentro $O$. Una circunferencia $\Gamma$ de centro $A$ corta al segmento $BC$ en los puntos $D$ y $E$ tales que $B, D, E$ y $C$ son todos diferentes y están en la recta $BC$ en este orden. Sean $F$ y $G$ los puntos de intersección de $\Gamma$ y $\Omega$, tales que $A, F, B, C$ y $G$ están sobre $\Omega$ en este orden. Sea $K$ el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo $BDF$ y el segmento $AB$. Sea $L$ el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo $CGE$ y el segmento $CA$. Supongamos que las rectas $FK$ y $GL$ son distintas y se cortan en el punto $X$. Demostrar que $X$ está en la recta $AO$.

**Problema 5.** Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f\big(x + f(x + y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x + y) + yf(x)$$

para todos los números reales $x$, $y$.

**Problema 6.** La sucesión de enteros $a_1, a_2, \ldots$ satisface las siguientes condiciones:

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ para todo $j \geq 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ para todo $1 \leq k < \ell$.

Demostrar que existen dos enteros positivos $b$ y $N$ tales que

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leq 1007^2$$

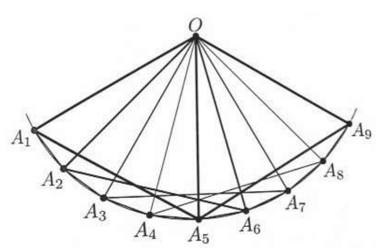
para todos los enteros $m$ y $n$ que satisfacen $n > m \geq N$.

## 7.2. Soluciones

**1.** (a) Supongamos que $n \geq 3$ es impar y consideremos un polígono regular de $n$-lados. Identifiquemos sus vértices en sentido antihorario como $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y sea $V = \{eA_1, A_2, \ldots, A_n\}$. $V$ es balanceado. En efecto, para cada dos vértices $A_i$, $A_j$, si los unimos y formamos el segmento $A_iA_j$, de un lado del segmento habrá un número par de véttices, (puede ser 0, si $j = i + 1$), y del otro un número impar, pues $n$ es impar. En el lado con la cantidad impar de vértices tomemos el vértice intermedio $A_k$. Entonces $A_iA_k = A_kA_j$. Formalmente podemos describir esto de la siguiente manera: Como $n$ es impar, la congruencia $2x \equiv i + j(modn)$ siempre tiene solución en $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $k$ tal que $2k \equiv i + j(modn)$. Entonces $k - i \equiv j - k(modn)$ y por lo tanto $A_iA_k = A_kA_j$.

Supongamos ahora que $n \geq 3$ es par. Consideremos un polígono regular con $3n - 6$ lados y sea $O$ su circuncentro. Enumeremos de nuevo los vértices de manera antihoraria, $A_1, A_2, \ldots, A_{3n-6}$. Sea $V = \{O, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. $V$ es un conjunto balanceado. En efecto. Para cada par de vértices distintos $A_i$, $A_j$, elegimos el punto $O$ y entonces es claro que $A_iO = OA_j$.

Consideremos ahora los puntos $O$ y $A_i$. Observemos que para todo $i \leq \frac{n}{2}$, como el polígono tiene $3n - 6$ lados, sus ángulos centrales miden $\frac{60}{\frac{n}{2}-1}$; por lo tanto en el triángulo isósceles $OA_iA_{\frac{n}{2}-1+i}$ el ángulo $\angle A_iOA_{\frac{n}{2}-1+i} = 60°$ y por lo tanto es equilátero y $OA_{\frac{n}{2}-i+1} = A_iA_{\frac{n}{2}-i+1}$. Por otra parte si $i > \frac{n}{2}$, entonces $i - \frac{n}{2} + 1$ corresponde a un índice $j \leq \frac{n}{2}$ y entonces $OA_{i-\frac{n}{2}+1} = A_iA_{i-\frac{n}{2}+1}$. Un ejemplo de esta construcción para $n = 10$ lo muestra la siguiente figura.




(b) Demostremos ahora que para $n \geq 3$ impar, existe un conjunto balanceado y libre de centros y que este tipo de conjuntos no existe si $n \geq 3$ es par.

Si $n \geq 3$ es impar, entonces $V$ es el conjunto de los vértices de un polígono regular de $n$ lados. Ya demostramos en la parte (a) que $V$ es balanceado, ahora demostraremos que es libre de centros. En efecto, supongamos que existe un punto $P \in V$ tal que para tres puntos distintos $A$, $B$, $C$ de $V$, ocurre que $PA = PB = PC$. Entonces $P$ sería el circuncentro del polígono regular de $n$ lados y por lo tanto $P \notin V$.

Supongamos ahora que $n \geq 3$ es par y que tenemos un conjunto $V$ balanceado, libre de centros y con $n$ elementos. Dados un par de puntos distintos $A$ y $B$ en $V$, decimos que el punto $C \in V$ es asociado al par $\{A, B\}$ si $AC = BC$. Como el conjunto es balanceado, entonces cada par de puntos $\{A, B\}$ tiene al menos un asociado. Como hay $\frac{n(n-1)}{2}$ pares de puntos y $n$ puntos, entonces existe un punto $P$ que es asociado con al menos $\lceil \frac{n(n-1)}{2} n \rceil = \frac{n}{2}$ pares y ninguno de estos $\frac{n}{2}$ pares puede contener a $P$. Por lo tanto la unión de todos ellos consiste de a lo sumo $n-1$ puntos y en consecuencia existen dos de estos pares que comparten un punto. Sean ellos $\{A, B\}$ y $\{A, C\}$, entonces $PA = PB = PC$ y $V$ no sería libre de centros.

**2.** Hay 16 ternas, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 6, 11)$, $(3, 5, 7)$ y todas las posibles permutaciones de estas. Veamos cómo es esto:

Sea $(a, b, c)$ una terna con la propiedad pedida. Si $a = 1$, entonces $b - c$ y $c - b$ serían potencias de 2, pero eso no es posible pues $(b - c) + (c - b) = 0$. Por simetría también vemos que $b$ y $c$ son mayores que 1.

Analizaremos dos casos:

Caso 1: Al menos dos de los tres números $a$, $b$ y $c$ son iguales.

Si $a = b = c$, entonces

$$ab - c = ac - b = bc - a = a^2 - a = a(a - 1).$$

Entonces $a(a-1) = 2^\alpha$ para algún entero $\alpha \geq 0$. $\alpha = 0$ es imposible pues la ecuación $a(a - 1) = 1$ no tiene solución en el conjunto de los enteros positivos, ya que $a \geq 2$. Si $\alpha = 1$, entonces $a(a-1) = 2$ por lo que $a = 2$ y la terna buscada es $(2, 2, 2)$. Si $\alpha \geq 2$ no hay solución pues entonces $2^\alpha$ tendría un divisor impar.

Supongamos ahora que dos de los números $a$, $b$ y $c$ son iguales. Por simetría podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a = b$. Entonces $a^2 - c$ y $ac - a = a(c - 1)$ son potencias de 2. Por lo tanto $a$ y $c-1$ son potencias de 2. En consecuencia existen enteros no negativos $\alpha$ y $\gamma$ tal que $a = 2^\alpha$ y $c = 2^\gamma + 1$. Como $a^2 - c = 2^{2\alpha} - 2^\gamma - 1 = 2^\beta$ para algún entero no negativo $\beta$, entonces $a^2 - c \not\equiv -1(mod 4)$. Pero si $\gamma > 1$, entonces $2^{2\alpha} - 2^\gamma - 1 \equiv -1(mod 4)$, en consecuencia $\gamma \leq 1$, es decir $\gamma = 0$ o $\gamma = 1$. Si $\gamma = 0$, entonces $a^2 - c = 2^{2\alpha} - 2$. Si $\gamma = 1$, entonces $a^2 - c = 2^{2\alpha} - 3$. Como $a^2 - c = 2^{2\alpha} - 2$ es una potencia de 2, entonces $\alpha = 1$ y por lo tanto $a = b = c = 2$ y la terna es $(2, 2, 2)$. En el otro caso, como $a^2 - c = 2^{2\alpha} - 3$ es una potencia de 2, entonces de nuevo $\alpha = 1$ y tenemos $c = 3$, $a = b = 2$ y la terna es $(2, 2, 3)$. Si $a = c$ o $b = c$ nos darán las ternas $(2, 3, 2)$ y $(3, 2, 2)$.

Caso 2: Supongamos ahora que $a$, $b$ y $c$ son distintos. Por simetría podemos suponer que

$$2 \leq a < b < c. \tag{7.1}$$

Demostremos que $(a, b, c) \in \{(3, 5, 7), (2, 6, 11)\}$.

Por hipótesis existen tres enteros negativos $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ tales que

$$bc - a = 2^\alpha. \tag{7.2}$$

$$ac - b = 2^\beta. \tag{7.3}$$

$$bc - a = 2^\gamma. \tag{7.4}$$

Evidentemente,

$$\alpha > \beta > \gamma. \tag{7.5}$$

Caso 2.1: $a = 2$.

Supongamos que $\gamma > 0$. Entonces $c = 2b - 2^\gamma$ es par (por 7.4), y por 7.5 y 7.3, $b$ también es par.

Por lo tanto el lado izquierdo de 7.2 es congruente con 2 módulo 4 y dadas las condiciones impuestas, esto solo es posible si $bc = 4$. Pero esto contradice 7.1. Luego $\gamma = 0$ y $c = 2b - 1$.

Ahora por 7.3 $3b - 2 = 2^\beta$. Como $b > a = 2$, esto solo es posible si $\beta \geq 4$. Si $\beta = 4$, entonces $3b - 2 = 16$, es decir $b = 6$. De donde se deduce que $c = 11$ y tenemos la terna $(2, 6, 11)$ y sus permutaciones.

Veamos qué sucede si $\beta > 4$. Por 7.2 $2^\alpha = b(2b-1) - 2$ y entonces:

$$9 \cdot 2^\alpha = 9b(2b-1) - 18 = (3b-2)(6b+1) - 16 = 2^\beta(2^{\beta+1} + 5) - 16,$$

y si $\beta \geq 5$, el lado derecho es divisible por 32, por lo tanto $\alpha \leq 4$y esto contradice a 7.5. Luego $\beta \ngeq 5$.

Caso 2.2: $a \geq 3$.

Elijamos un entero $v \in \{-1, 1\}$ tal que $c - v$ no sea divisible por 4. ( Esto siempre es posible pues (c+1)-(c-1)=2). Entonces:

$$2^\alpha + v \cdot 2^\beta = (bc - av) + v(ca - b) = (b + av)(c - v).$$

Como $2^\alpha > 2^\beta$, entonces $2^\alpha + v \cdot 2^\beta = (b+av)(c-v)$ es divisible por $2^\beta$, pero $2^2$ no divide a $c - v$, entonces $2^{\beta-1}$ divide a $b + av$.

Por otra parte

$$2^\beta = ac - b > ac - c = (a-1)c \geq 2c,$$

y por 7.1 $a$ y $b$ son mayores que $2^{\beta-1}$. Pero esto solo es posible si $v = 1$ y $a + b = 2^{\beta-1}$.

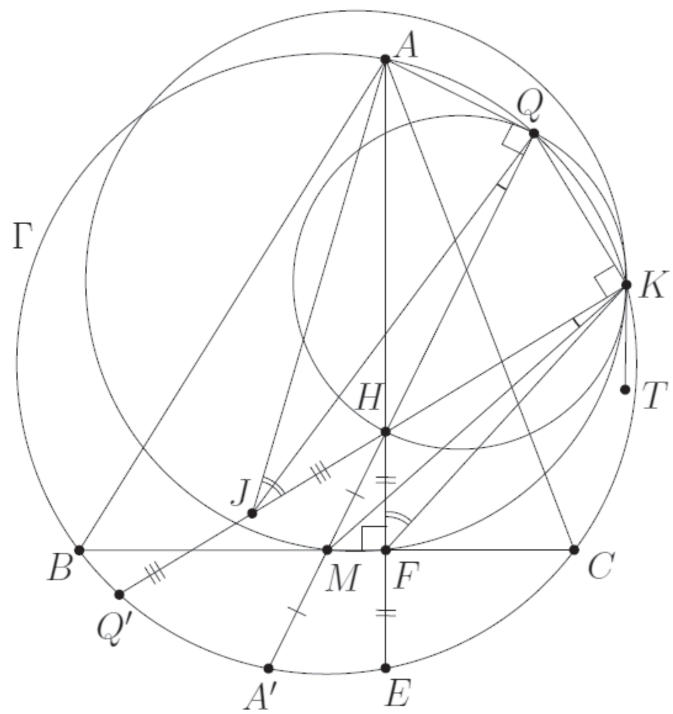
Ahora por 7.3

$$ac - b = 2^\beta = (a + b)2, \tag{7.6}$$

por lo tanto $a + 3b = ac - a = a(c-1)$ y $4b > a + 3b = a(c-1) = ab$. En consecuencia $3 \leq a < 4$ y entonces $a = 3$. Ahora 7.6 se simplifica como $c = b + 2$ y 7.2 nos dice que $b(b+2) - 3 = (b-1)(b+3)$ es una potencia de 2. En consecuencia ambos factores, $b - 1$ y $b + 3$ lo son y como $(b+3) - (b-1) = 4$, esto solo es posible si $b = 5$ y por lo tanto $c = 7$. Así tenemos la terna $(3, 5, 7)$ y sus permutaciones.

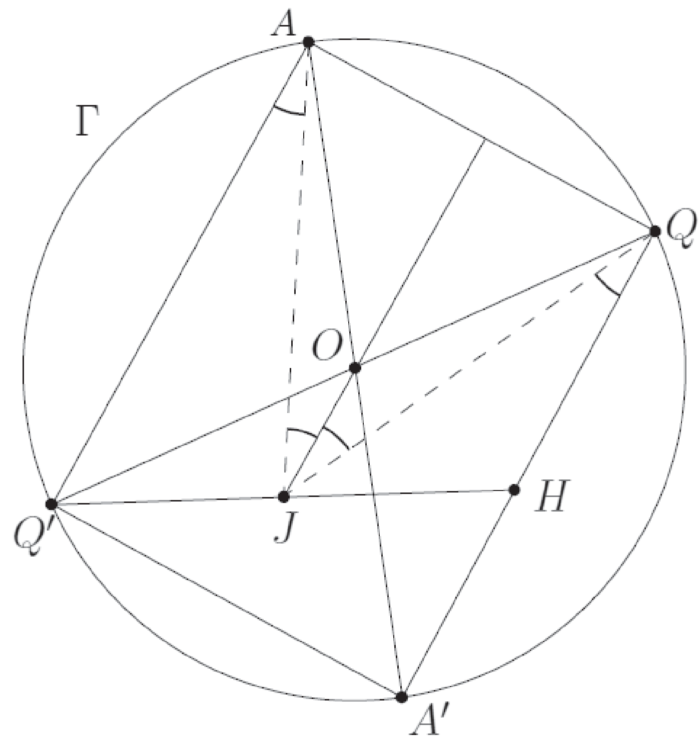
**3.** Sea $A'$ el punto diametralmente opuesto a $A$ sobre la circunferencia $\Gamma$. Como $\angle AQA' = 90° = \angle AQH$, los puntos $Q$, $H$ y $A'$ están alineados. Análogamente si $Q'$ denota al punto en $\Gamma$ diametralmente opuesto a $Q$, entonces $K$, $H$ y $Q'$ son colineales. Sea $E$ distinto de $A$, el otro punto de intersección de la altura $AH$ con $\Gamma$. Demostremos primero que $M$

es el punto medio del segmento $HA'$ y $F$ el punto medio del segmento $HE$. En efecto: Como $AA'$ es diámetro de $\Gamma$ tenemos que $\angle ABA' = \angle ACA' = 90°$. Sean $X$ y $Y$ los pies de las alturas desde $B$ y $C$ respectivamente, entonces el cuadrilátero $BCXY$ es cíclico y $\angle XBY = \angle XCY$. Restando ambas igualdades miembro a miembro nos queda que: $\angle A'BX = \angle ABA' - \angle XBY = \angle ACA' - \angle XCY = \angle A'CY$. Por otra parte, como $AYHX$ es cíclico se tiene que: $\angle BHC = \angle XHY = 180° - \angle BAC = \angle BA'C$. En consecuencia el cuadrilátero $HBA'C$ tiene cada ángulo igual a su opuesto, de donde se sigue que es un paralelogramo y sus diagonales se cortan en el punto medio, es decir $M$ es el punto medio de $HA'$.




Para ver que $F$ es el punto medio de $HE$ observemos que como $H$ es el ortocentro del triángulo $ABC$, se tiene que $\angle HBC + \angle ACB = 90°$, y entonces $\angle HBC = 90° - \angle ABC = \angle CAE$. Como el cuadrilátero $ABEC$ es cíclico, $\angle CAE = \angle CBE$. Por lo tanto el triángulo $HBE$ es isósceles y $H$ y $E$ son simétricos respecto de $F$, por tanto $HF = FE$.

Como $Q$, $H$ y $A'$ son colineales y $M$ es el punto medio de $A'H$, entonces el rayo $MH$ pasa por $Q$. Observemos que los puntos $A'$ y $E$ se comportn como los puntos $Q$ y $K$, respectivamente. El punto $A'$ es el segundo punto de intersección de la recta $MH$ con $\Gamma$ y $E$ es el punto sobre $\Gamma$ tal que $\angle HEA' = 90°$.




En las circunferencias $KQH$ y $EA'H$, los segmentos $HQ$ y $HA'$ son diámetros, por lo tanto estas circunferencias tiene una tangente común $t$ en $H$, perpendicular a $MH$. Sea $R$ el cnetro radical de las tres circunferencias, $\Gamma$, $KQH$ y $EA'H$. La recta $KQ$ es el eje radical de $\Gamma$ y $KQH$, la recta $A'E$ es el eje radical de $\Gamma$ y $EA'H$ y la recta $t$ es el eje radical de $KQH$ y $EA'H$. Estas tres rectas se intersectan en $R$.

Sea $S$ el punto medio de $HR$. Como $\angle RKH = \angle HKQ = 90° = \angle HEA' = \angle HER$, el cuadrilátero $HERK$ es cíclico y su circuncentro es el punto $S$, por lo tanto $SK = SE = SH$. Como $BC$ es perpendicular a $HE$, y $F$ es el punto medio de $HE$, tenemos que $BC$ es la mediatriz de $HE$ y por lo tanto $BC$ pasa por $S$. Por otra parte la circunferencia $HMF$ es tangente a $t$ en $H$ y por la potencia de $S$ con respecto a esta circunferencia tenemos que:

$$SM \cdot SF = SH^2 = SK^2.$$

Por lo tanto, la potencia de $S$ con respecto a las circunferencias $KQH$ y $KFM$ es $SK^2$ y en consecuencia la recta $SK$ es tangente a ambas circunferencias en $K$, por lo que ellas son tangentes.

**4.** Como $X$ es punto de intersección de las rectas $FK$ y $GL$, si demostramos que ellas son simétricas con respecto a la recta $AO$, podremos concluir que los puntos $A$, $X$ y $O$ son colineales.

Como $F$ y $G$ son puntos en $\Gamma$ cuyo centro es $A$, entonces $AF = AG$. Por lo tanto ambos segmentos son cuerdas de $\Omega$ de la misma longitud y en consecuencias son simétricas con respecto de $AO$.

Por lo tanto será suficiente demostrar que:

$$\angle KFA = \angle LGA. \tag{7.7}$$

Denotemos las circunferencias circunscritas de los triángulos $BDF$ y $CEG$ por $\omega_B$ y $\omega_C$, respectivamente. Para demostrar 7.7 veamos primero que:

$$\angle KFA = \angle DFG + \angle GFA - \angle DFK.$$

Con base en las circunferencias $\omega_B$ $\Gamma$ y $\omega_C$ esta igualdad se puede ver como:

$$\angle KFA = \angle CEG + \angle GBA - \angle DBK,$$

pues como $BDKF$ está inscrito en $\omega_B$, ocurre que $\angle DBK = \angle DFK$, como $AFBG$ está inscrito en $\Omega$, $\angle GFA = \angle GBA$ y como $FDEG$ está inscrito en $\Gamma$, $\angle DFG + \angle GED = 180° = \angle CEG + \angle GED$, de donde $\angle DFG = \angle CEG$. Pero

$$\angle CEG + \angle GBA - \angle DBK = \angle CEG - \angle CBG,$$

pues

$$\angle DBK = \angle CBA = \angle CBG + \angle GBA,$$

por lo tanto

$$\angle GBA - \angle DBK = -\angle CBG,$$

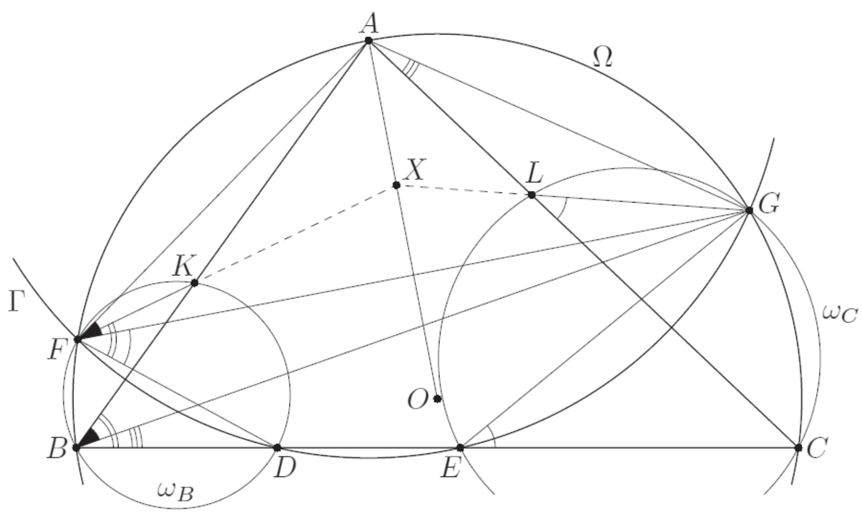
y en consecuencia

$$\angle KFA = \angle CEG - \angle CBG.$$

Ahora bien, como $LECG$ está inscrito en $\omega_C$ tenemos que $\angle CEG = \angle CLG$, y como $ABCG$ está inscrito en $\Omega$, $\angle CBG = \angle CAG$ y por lo tanto

$$\angle KFA = \angle CLG - \angle CAG = \angle AGL,$$

pues $\angle CLG = \angle AGL + \angle CAG$.




**5.** Las funciones que cumplen con las condiciones del problema son $f(x) = x$ y $f(x) = 2 - x$, para todo número real $x$. Es fácil verificar que ellas cumplen con la propiedad pedida y dejamos su verificación al lector. Demostremos ahora que estas son las únicas funciones que satisfacen las condiciones del problema.

Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que para todo $x \in \mathbf{R}$ se cumple que

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x). \tag{7.8}$$

Pongamos $y = 1$ en 7.8, entonces

$$f(x + f(x + 1)) + f(x) = x + f(x + 1) + f(x). \tag{7.9}$$

Por lo tanto $f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1)$, para todo $x \in \mathbf{R}$. Es decir $x + f(x + 1)$ es un punto fijo de $f$, $x \in \mathbf{R}$.

Caso 1: $f(0) \neq 0$.

Sea $x = 0$ en 7.8, entonces para todo $y \in \mathbf{R}$,

$$f(f(y)) + f(0) = f(y) + yf(0).$$

Si $a \in \mathbf{R}$ es un punto fijo de $f$, sustituyendo en la igualdad anterior tenemos que $a + f(0) = a + af(0)$. Por lo tanto $a = 1$, pues $f(0) \neq 0$. En consecuencia como $x + f(x + 1)$ es un punto fijo de $f$, $x \in \mathbf{R}$, entonces $x + f(x + 1) = 1$, o bien $f(x) = 2 - x$, para todo $x \in \mathbf{R}$.

Caso 2: $f(0) = 0$. Hagamos $y = 0$ en 7.8 y pongamos $x + 1$ en vez de $x$. Nos queda:

$$f(x + 1 + f(x + 1)) = x + 1 + f(x + 1). \tag{7.10}$$

Entonces $x+1+f(x+1)$ es un punto fijo para todo $x \in \mathbf{R}$. Si ahora hacemos $x=1$ en 7.8 tendremos,

$$f(1+f(y+1))+f(y)=1+f(1+y)+yf(1). \tag{7.11}$$

Hagamos ahora $x=-1$ en 7.9, entonces $f(-1)=-1$. Luego pongamos $y=-1$ en 7.11, entonces $f(1)+f(-1)=1-f(1)$ y entonces $f(1)=1$. Por lo tanto 7.11 se convierte en,

$$f(1+f(y+1))+f(y)=1+f(1+y)+y. \tag{7.12}$$

Observemos ahora que $-1$, $0$ y $1$, son tres puntos fijos consecutivos de la función $f$. Supongamos que tanto $y_0$ como $y_0+1$ son puntos fijos de $f$. Entonces por 7.12,

$$f(1+f(y_0+1))+f(y_0)=1+f(y_0+1)+y_0.$$

Por lo tanto,

$$f(y_0+2)=y_0+2.$$

Es decir, $y_0+2$ también es punto fijo de $f$.

Como por 7.9 $x+f(x+1)$ es fijo y por 7.10 $x+f(x+1)+1$ es fijo, entonces $x+f(x+1)+2$ también es fijo, para todo número real $x$. Es decir, $f(x+f(x+1)+2)=x+f(x+1)+2$, para todo número real $x$. Si ponemos $x-2$ en vez de $x$, nos queda $f(x+f(x-1))=x+f(x-1)$. Por otra parte si hacemos $y=-1$ en 7.8, nos queda que

$$f(x+f(x-1))+f(-x)=x+f(x-1)-f(x),$$

entonces $f(-x)=-f(x)$ para todo número real $x$, es decir, $f$ es una función impar. Si ahora sustituimos $x=-1$ e $y=-y$ en 7.8 y por ser $f(-1)=-1$, tendremos que,

$$f(-1+f(-y-1))+f(y)=-1+f(-y-1)+y.$$

Pero como $f$ es impar nos queda que $-f(1+f(y+1))+f(y)=-1-f(y+1)+y$ y sumando esta igualdad con 7.12 obtenemos $2f(y)=2y$ o bien $f(y)=y$, para todo número real $y$. Hemos demostrado entonces que solo las funciones enunciadas al comienzo son la solución del problema.

**6.** Miremos el conjunto de los números enteros positivos como una sucesión de puntos. Para cada entero positivo $n$ dibujemos una flecha que sale de $n$ y llega a $n+a_n$, por lo que la longitud de esta flecha es $a_n$. Como $m+a_m \neq n+a_n$ para $m \neq n$, cada entero positivo recive a lo sumo una flecha. Observemos que existen algunos enteros positivos, como el 1, a los cuales no les llega ninguna flecha, de ahora en adelante los llamaremos *puntos iniciales*. Cuando uno comienza en cualquiera de estos puntos iniciales y va siguiendo las flechas, construimos un camino infinito, al cual llamaremos *rayo*. Estos rayos tocan una sucesión estríctamente creciente de enteros positivos. Por ejemplo, si tomamos como punto inicial al número 1, la primera flecha llega a $1+a_1$. Pero $1+a_1=n_1$, así la siguiente flecha sale de $n_1$ y llega a $n_1+a_{n_1}$. De esta manera continuamos el camino y vamos tocando cada vez un punto que corresponde a un número entero positivo, distinto a los anteriores. Como la longitud de cada flecha es a lo sumo 2015, cada rayo, que comience en un punto $s$, toca cada intervalo de la forma $[n, n + 2014]$, con $n \geq s$ al menos una vez.

Demostremos ahora que hay a lo sumo 2015 puntos iniciales. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que hay al menos 2016 puntos iniciales. Sea $n$ un entero mayor que los primeros 2016 puntos iniciales. Por lo dicho antes, hay al menos 2016 rayos que intersectan en puntos ditintos al intervalo $[n, n + 2014]$, pero esto es absurdo, pues este intervalo tiene solo 2015 puntos. Pr lo tanto hay a lo sumo 2015 puntos iniciales. Sea $b$ el número de puntos iniciales, entonces $1 \geq b \geq 2015$. Elijamos $N$ como un número entero positivo cualquiera, mayor que todos los puntos iniciales. Afirmamos que $b$ y $N$ son los números buscados.

En efecto, sean $m$ y $n$ dos números enteros con $n > m \geq N$. La suma $\sum_{i=m+1}^{n} a_i$ nos da la longitud total de las flechas que emergen desde $m + 1, \ldots, n$. En conjunto, estas flechas forman $b$ subcaminos, uno en cada uno de los $b$ rayos que determinan los $b$ puntos iniciales. Nótese que alguno de los subcaminos puede ser vacío, si ninguno de los enteros $m + 1, \ldots, n$ pertenece a alguno de los caminos originales. Ahora en cada rayo miramos al primer número que es mayor que $m$. Denotemos estos números por $x_1, \ldots, x_b$. Sean $y_1, \ldots, y_b$, enumerados en el orden correspondiente, números definidos de la misma manera que los $x_i$ pero con respecto de $n$. Entonces la lista de las diferencias $y_1 - x_1, \ldots, y_b - x_b$ consiste de las longitudes de todos los subcaminos, y posiblemente algunas diferencias son iguales a cero, aquellas que correspondan a subcaminos vacíos. En consecuencia tenemos que

$$\sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{b} (y_j - x_j),$$

por lo tanto

$$\sum_{i=m+1}^{n} (a_i - b) = \sum_{j=1}^{b} (y_j - n) - \sum_{j=1}^{b} (x_j - m).$$

Pero cada uno de los $b$ rayos intersecta al intervalo $[m + 1, m + 2015]$ en algún punto y por lo tanto $x_1 - m, \ldots x_b - m$ son $b$ elementos distintos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2015\}$. Más aún, como $m + 1$ no es un punto inicial, él debe pertenecer a algún rayo y por lo tanto 1 tiene que aparecer como uno de los números $x_i - m$. Entonces:

$$1 + \sum_{j=1}^{b-1} (j + 1) \leq \sum_{j=1}^{b} (x_j - m) \leq 1 + \sum_{j=1}^{b-1} (2016 - b + j).$$

Ahora el mismo argumento aplicado a $n$ y a $y_1, \ldots, y_b$ nos da:

$$1 + \sum_{j=1}^{b-1} (j + 1) \leq \sum_{j=1}^{b} (y_j - n) \leq 1 + \sum_{j=1}^{b-1} (2016 - b + j).$$

Juntando todo esto tenemos:

$$\begin{aligned}|\sum_{i=m+1}^{n}(a_i-b)| &\leq \sum_{j=1}^{b-1}(2016-b+j)-(j-1)=(b-1)(2015-b)\\ &\leq \left(\frac{(b-1)+(2015-b)}{2}\right)^2=1007^2,\end{aligned}$$

como deseábamos.

# Premiación de las Olimpiadas Matemáticas del 2015

## Final Nacional de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas

### Primer Año

#### Medallas de Oro

| | | |
|---|---|---|
| José Alberto Ortiz | San José Maristas | Aragua |
| Javier Parada | Joseph Lancaster | Carabobo |
| Bernardo Patiño | Independencia (V) | Lara |

#### Medallas de Plata

| Nombre | Instituto | Estado |
|---|---|---|
| Verónica Del Corral | Juan XXIII | Carabobo |
| Diego Gutiérrez | Santiago de León Caracas | |
| Luis Indriago | Las Colinas Lara | |
| Sabrina Queipo | San Vicente de Paul Zulia | |

#### Medallas de Bronce

| | |
|---|---|
| Nicolás Arkilo | Liceo Los Robles Zulia |
| José Gabriel Malaspina | Santiago de León Caracas |
| Luis Negrón | Escuela Bella Vista Zulia |
| Cristina Story | San Ignacio Caracas |
| Adolfo Vivas | Araguaney Falcón |

### Segundo Año

#### Medallas de Oro

| | | |
|---|---|---|
| Kimberly Rodríguez | Escuela Bella Vista | Zulia |
| Román Rodríguez | Monte Carmelo | Bolivar |

#### Medallas de Plata

| | |
|---|---|
| Andrés Betancourt | San Lázaro Sucre |
| Martín Fernandes | Colegio Cumbres Caracas |
| Pablo Ramírez | Escuela Comunitaria Miranda |
| Jesús Urbaneja | Iberoamericano Bolivar |

#### Medallas de Bronce

| | | |
|---|---|---|
| Laura de Jongh | Santiago de León | Caracas |
| Rubén Duarte | Nuestra Señora de La Paz | Anzoátegui |
| José Ángel Hernao | Liceo Los Robles | Zulia |
| Bella Jiménez | U.E Colegio La Esperanza | Carabobo |
| Adrián Sánchez | Col Teresa Titos | Merida |
| Alejandro Troconis | I.E.A. El Peñón | Caracas |

### Menciones de Honor

| | | |
|---|---|---|
| Néstor Duarte | Hipocampitos | Miranda |
| Deydimarian García | Escuela Bella Vista | Zulia |
| Herson La Riva | Escuela Bella Vista | Zulia |
| Diego Pérez | Guayamurí | Nueva Esparta |
| Gianfranco Radomile | San Vicente de Paul | Lara |
| Hanan Saab | Bellas Artes | Zulia |

## Tercer Año

### Medallas de Oro

| | | |
|---|---|---|
| Ónice Aguilar | Col La Presentación | Mérida |
| Miguel Melo | Hipocampitos | Miranda |
| Sohrab Vafa | Instituto Educacional Aragua | Aragua |
| Amanda Vanegas | San Francisco de Asís | Zulia |

### Medallas de Plata

| | | |
|---|---|---|
| José Méndez | Colegio Cumbres | Caracas |
| Nicole Pineda | Escuela Bella Vista | Zulia |
| Javier Pulido | Hipocampitos | Miranda |
| Laura Queipo | San Vicente de Paul | Zulia |
| Iván Rodríguez | Santiago de Leon | Caracas |

### Medallas de Bronce

| | | |
|---|---|---|
| Carlos Duarte | Nuestra Señora de La Paz | Anzoátegui |
| Andrés Gutiérrez | Ramón Pierluissi Ramírez | Carabobo |
| María Laura Leal | Los Pirineos Don Bosco | Táchira |
| Carlos Martínez | Ymca Don Teodoro Gubaira | Carabobo |
| Valeria Sánchez | Escuela Bella Vista | Zulia |

### Menciones de Honor

| | | |
|---|---|---|
| José Ramírez | Liceo Los Robles | Zulia |
| Esteban Saldaña | Liceo Los Robles | Zulia |
| José Armando Sánchez | Claret | Zulia |

## Cuarto Año

### Medallas de Oro

| | | |
|---|---|---|
| Johann Bastardo | Iberoamericano | Bolívar |
| Miguel Römer | San Ignacio | Caracas |

### Medallas de Plata

| | | |
|---|---|---|
| Gabriel Matute | Academia Washington | Caracas |
| Wremp Pacheco | Calicantina | Aragua |

**Medallas de Bronce**

| | | |
|---|---|---|
| Franklin Bello | Iberoamericano | Bolívar |
| Shahrouz Dalirian | Escuela Bella Vista | Zulia |
| María León | Altamira | Zulia |
| Ignacio Muñoz | Santiago de León | Caracas |
| Alejandro Salazar | Madre Guadalupe | Nueva Esparta |
| Oriana Valladares | I.E.A. El Peñón | Caracas |

**Menciones de Honor**

| | | |
|---|---|---|
| Luis Cedeño | Liceo Los Robles | Zulia |
| Ángel Moya | San José Maristas | Aragua |
| Pierangeli Rodríguez | Los Campitos | Caracas |

## Quinto Año

**Medallas de Oro**

| | | |
|---|---|---|
| José Tomás Guevara | Bella Vista | Aragua |

**Medallas de Plata**

| | | |
|---|---|---|
| Rafael Aznar | Los Arcos | Caracas |
| Karen Taub | Moral Y Luces | Caracas |

**Medallas de Bronce**

| | | |
|---|---|---|
| Minh Ngo | San Ignacio | Caracas |
| Miguel Peña | Hipocampitos | Miranda |
| Luis Uzcátegui | Los Próceres | Bolívar |

**Menciones de Honor**

| | | |
|---|---|---|
| Fiorella Toledano | Ntra Sra de Chiquinquirá | Zulia |

## Premios Especiales

**José Tomás Guevara** (Bella Vista, Aragua)

Premio de la Fundación Empresas Polar a la mejor prueba.

**Ignacio Muñoz** (Santiago León, Capital)

Premio UNEXPO a la respuesta más creativa.

**José Alberto Ortiz** (San José Maristas, Aragua)

Premio Universidad de Carabobo a la mejor prueba de 1er y 2do año.

**Luis Uzcátegui, José Tomás Guevara, Rafael Aznar**

Premio de Honor al Mérito por haber participado en todos los niveles de la OJM.

**Prof. Mirba Romero** (Carabobo)

Premio Profesor Eduardo Contreras al mejor Coordinador de la OJM 2015.

**Prof. Saturnino Fermín**

Premio Honor al Mérito por 40 años en las Olimpíadas Matemáticas.

## Olimpiada de Mayo 2015

### Nivel I

#### Medallas de Plata

| | | |
|---|---|---|
| Francisco Molina | Escuela Comunitaria | Miranda |

#### Medallas de Bronce

| | | |
|---|---|---|
| Daniela Matute | U.E Academia Washington | Distrito Capital |
| Andrea Abate | Los Hipocampitos | Miranda |
| John Wilches | U.E.P Los Tricolores | Miranda |
| Rocío Espinoza | CEAPULA | Mérida |
| José Ortiz | San José HH Maristas | Aragua |
| Juan Pelaez | I.E.A | Distrito Capital |

#### Menciones de Honor

| | | |
|---|---|---|
| Irene Agustí | U.E Academia Washington | Distrito Capital |
| Jacob Navarro | U.E Colegio Emil Friedman | Distrito Capital |
| Fernando Rodríguez | I.E.A | Distrito Capital |

### Nivel II

#### Medallas de Bronce

| | | |
|---|---|---|
| Román Rodríguez | Monte Carmelo | Bolívar |

#### Menciones de Honor

| | | |
|---|---|---|
| María Dávila | UE PAIDEA | Mérida |
| Hugo Cuenca | San Ignacio | Distrito Capital |
| Humberto Bravo | San Ignacio | Distrito Capital |
| Andrés Pabón | La Fe | Carabobo |

## Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2015

| | |
|---|---|
| Wemp Pacheco | Oro |
| Amanda Vanegas | Plata |
| Iván Rodríguez | Bronce |

## Olimpiada Iberoamericana 2015

| | |
|---|---|
| Wemp Pacheco | Bronce |
| Amanda Vanegas | Mención de Honor |
| Iván Rodríguez | Mención de Honor |

## Olimpiada Internacional (IMO) 2015

| | |
|---|---|
| Rafael Aznar | Mención de Honor |

## Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2014

### Comité Organizador Nacional

Rafael Sánchez Lamoneda (Presidente)
Laura Vielma Herrero (Coordinadora Nacional)
José Heber Nieto Said (Coordinador Académico)
Saturnino Fermín Reyes (Coordinador Administrativo)
Sophia Taylor, Estefanía Ordaz, Diego Peña,
Rubmary Rojas, Mauricio Marcano (Colaboradores)

### Coordinadores Regionales

Prof. Luis Alberto Rodríguez (Anzoátegui)
Prof. Rafael Antonio Valdez Tovar (Apure)
Prof. Jesús Acosta (Aragua)
Prof. Mary Acosta (Bolívar)
Prof. José Alberto Infante (Capital)
Prof. Mirba Romero (Carabobo)
Prof. Sonia Chacón (Cojedes)
Prof. Addy Goitía (Falcón)
Prof. Carlos Lira (Guárico)
Prof. Víctor Carruci (Lara)
Prof. Olga Porras (Mérida)
Prof. Lisandro Alvarado (Miranda)
Prof. Yelenny Guanipa (Monagas)
Prof. Grace Rivero (Nueva Esparta)
Prof. Evelio Castillo (Portuguesa)
Prof. Luisa López (Sucre)
Prof. Jonathan Riveros (Táchira)
Prof. Ramón Blanco (Trujillo)
Prof. Larry Mendoza (Vargas)
Prof. Johan Goyo (Yaracuy)
Prof. José Heber Nieto Said (Zulia)
Prof. Lisbardo Serrudo (Zulia-Santa Bárbara)

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y NATURALES

Association Le Kangourou des Mathématiques Kangourou sans frontiéres

**Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas**
**UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ofic. 331**
**Los Chaguaramos, Caracas 1020. Venezuela. Telefax: 212.6051512**
**email:asomatemat8@gmail.com. Página Web:www.acfiman.org**