

# OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMATICA -2004 OLIMPIADA CANGURO SEGUNDO AÑO DE DIVERSIFICADO

1) Si  $m$  bolígrafos cuestan  $n$  bolívares cada uno y  $n$  bolígrafos cuestan  $m$  bolívares cada uno, entonces el costo promedio, en bolívares, de cada bolígrafo es:

- (A) 1      (B)  $\frac{m+n}{2}$       (C)  $\frac{m^2n^2}{2}$       (D)  $\frac{2mn}{m+n}$       (E)  $mn$

2) Una pirámide tiene 17 caras. ¿Cuántas aristas tiene?

- (A) 14      (B) 16      (C) 17      (D) 18      (E) 32

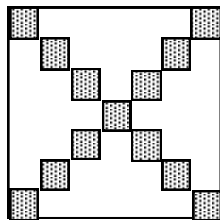
3) El menor número real  $x$  que satisface la desigualdad  $x^2 - 2004 \leq 0$  es:

- (A)  $-2004$       (B)  $-\sqrt{2004}$       (C)  $2004$       (D)  $\sqrt{2004}$       (E)  $0$

4) Cada marciano tiene uno, dos o tres tentáculos en su cabeza. Exactamente el 1% de toda la población marciana está conformada por individuos con tres tentáculos, exactamente el 97% de los marcianos tiene dos tentáculos y el restante 2% está conformado por marcianos de un tentáculo. ¿Qué tanto por ciento de marcianos tiene más tentáculos en su cabeza que el promedio de toda la población marciana?

- (A) 98%      (B) 97%      (C) 96%      (D) 3%      (E) 1%

5)  $s$  es un número impar. En el cuadrado de lado  $s$ , algunos cuadrados de lado 1 han sido sombreados (ver figura). ¿Cuál es el área de la región no sombreada?



- (A)  $s^2+1-2s$       (B)  $s^2+4-4s$   
 (C)  $2s^2+1-4s$       (D)  $s^2-1-2s$   
 (E)  $s^2-2s$

6) ¿Cuántos números de dos dígitos existen tales que su cuadrado y su cubo terminan en el mismo dígito?

- (A) 1      (B) 9      (C) 10      (D) 21      (E) Más de 30

7) Un cuadrado está dividido en 18 cuadrados pequeños, 17 de los cuales tienen lado de longitud 1. ¿Cuál es el área del cuadrado original?

- (A) 25      (B) 49      (C) 81      (D) 100      (E) 225

8) ¿Cuántos triángulos rectángulos pueden ser formados al unir tres vértices de un polígono regular de 14 lados?

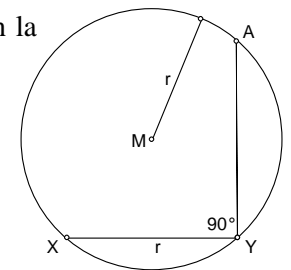
- (A) 72      (B) 82      (C) 84      (D) 88      (E) Otra respuesta

9) En un campo habían 15 ovejas y cierto número de pastores. Cuando la mitad de los pastores y la tercera parte de las ovejas se retiran de allí, queda un total de 50 piernas en el campo. ¿Cuál era el número de piernas que había al principio?

- (A) 60      (B) 72      (C) 80      (D) 90      (E) 100

10) ¿Cuál es la medida del ángulo  $\angle XAY$  en la figura? Los puntos A, M y X están alineados

- (A)  $22\frac{1}{2}^\circ$       (B)  $30^\circ$       (C)  $45^\circ$   
 (D)  $60^\circ$       (E)  $90^\circ$



11) ¿Cuántos cuadrados con un vértice en A (-1,-1) existen tales que al menos uno de los ejes coordenados es un eje de simetría del cuadrado?

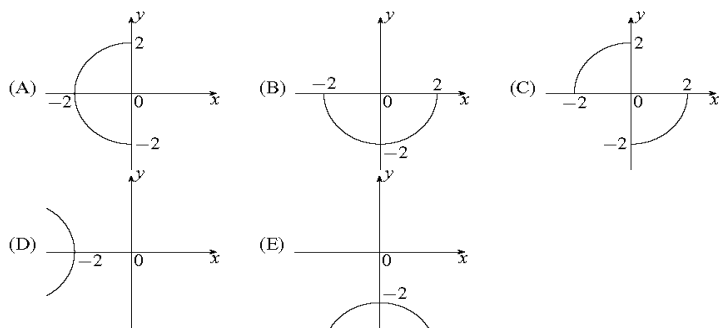
- (A) 2      (B) 3      (C) 4      (D) 5      (E) 6

12) Hay 100 tarjetas en un sobre no transparente, numeradas con los números naturales del 1 al 100. Hay un número diferente en cada tarjeta. ¿Cuál es el menor número de tarjetas que hay que sacar del sobre, al azar, para estar seguro que el producto de los números en las tarjetas elegidas es divisible entre 4?

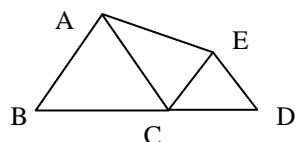
- (A) 51      (B) 52      (C) 53      (D) 54      (E) 55

13) El conjunto de todos los pares  $(x,y)$  que satisfacen las condiciones  $x$

$\bullet y \leq 0$  y  $|x|^2 + |y|^2 = 4$  corresponde al gráfico:



14) En la figura, los dos triángulos equiláteros  $ABC$  y  $ECD$ , tienen lados de longitudes 2 y 1, respectivamente. El área del cuadrilátero  $ABCE$  es:



- (A)  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$  (B)  $\frac{4+5\sqrt{3}}{4}$  (C) 3 (D)  $\frac{6+\sqrt{3}}{4}$  (E)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

15) ¿Cuántos enteros positivos pueden ser escritos como

$$a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + 3^3a_3 + 3^4a_4$$

si  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ , pertenecen al conjunto  $\{-1,0,1\}$ ?

- (A) 5 (B) 80 (C) 81 (D) 121 (E) 243

16) El número  $(\sqrt{22+12\sqrt{2}} - \sqrt{22-12\sqrt{2}})^2$  es:

- (A) negativo (B) es igual a cero  
 (C) la cuarta potencia de algún entero no nulo  
 (D) igual a  $11\sqrt{2}$   
 (E) un entero positivo divisible por 5

17) ¿Cuántos vértices hay en un polígono regular en el que la suma de las medidas de sus ángulos interiores es la séptima parte de la de un polígono regular de 16 lados?

- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 10

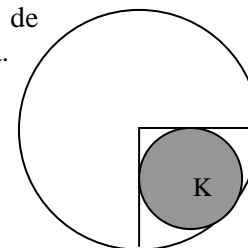
18) Si para una progresión geométrica  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$  se cumple la relación  $a_3 < a_2 < a_4$ , entonces es cierto que:

- (A)  $a_3 \cdot a_4 > 0$  (B)  $a_2 \cdot a_3 < 0$  (C)  $a_2 \cdot a_4 < 0$   
 (D)  $a_2 < 0$  (E)  $a_2 \cdot a_3 > 0$

19) ¿Cuál es el dígito de las decenas de  $11^{2004}$ ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

20) Un círculo  $K$  está inscrito en un cuarto de círculo de radio 6 como se muestra en la figura. ¿Cuál es el radio del círculo  $K$ ?

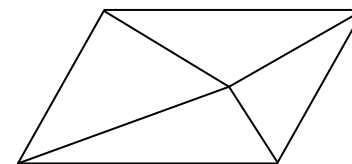


- (A)  $\frac{6-\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (C) 2,5  
 (D) 3 (E)  $6(\sqrt{2}-1)$

21) Las elecciones en Villa Vegetal fueron llevadas a cabo hoy. Todos los votantes que votaron por el Partido del Brócoli han comido brócoli alguna vez en su vida. El 90% de los votantes restantes que votaron por otros partidos nunca han comido brócoli. ¿Qué tanto por ciento de votos obtuvo el Partido del Brócoli en las elecciones, si exactamente el 46% de todos los votantes que acudieron a las elecciones han comido brócoli alguna vez en su vida?

- (A) 40% (B) 41% (C) 43% (D) 45% (E) 46%

22) Un paralelogramo es dividido en cuatro triángulos como se muestra en la figura. De las siguientes posibilidades para las áreas de los triángulos dados, a lo más una puede ser válida. ¿Cuál es esa posibilidad?



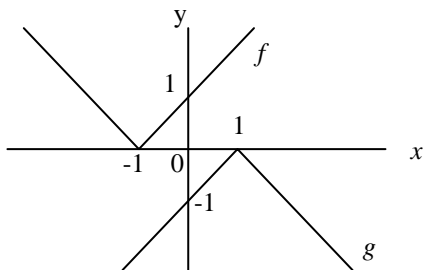
- (A) 4, 5, 8, 9 (B) 5, 6, 7, 12 (C) 10, 11, 12, 19  
 (D) 11, 13, 15, 16 (E) A, B, C y D no son válidas

23) Sea ABC un triángulo equilátero con lados de longitud 4. El radio del arco circular, con centro en A, que divide el triángulo en dos partes de igual área es:

- (A)  $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$  (B)  $\sqrt{\frac{48\sqrt{3}}{\pi}}$  (C)  $\sqrt{\frac{30\sqrt{3}}{\pi}}$  (D)  $\sqrt{\frac{24\sqrt{3}}{\pi}}$  (E)  $\sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{\pi}}$

24) La figura muestra gráficos de funciones f y g definidas en los números reales.

¿Cuál de las siguientes igualdades es satisfecha para cada número real x?



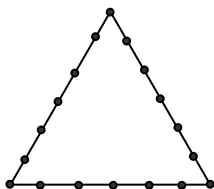
- (A)  $f(x) = -g(x) + 2$   
 (B)  $f(x) = -g(x) - 2$  (C)  $f(x) = -g(x + 2)$   
 (D)  $f(x + 2) = -g(x)$  (E)  $f(x + 1) = -g(x - 1)$

25) Consideremos 200 números naturales. Al principio, todos son iguales a 0. En el primer paso, sumamos 1 a cada 0. En el segundo paso, sumamos 1 a cada número que ocupe una posición múltiplo de 2 comenzando desde la izquierda. En el tercer paso, agregamos 1 a cada número que ocupe una posición que sea múltiplo de 3 y así sucesivamente. ¿Cuál es el número que ocupa la posición 120 después de realizar 200 pasos?

- (A) 16 (B) 12 (C) 20 (D) 24 (E) 32

26) ¿Cuántos triángulos pueden ser dibujados de tal forma que sus vértices sean tres cualesquiera de los 18 puntos mostrados en la figura?

- (A) 816 (B) 711 (C) 777  
 (D) 717 (E) 811



27) Si la suma de todos los números que pueden ser formados por la permutación de los tres dígitos distintos  $0 < a < b < c$  es 1554, ¿cuál es el valor de c?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

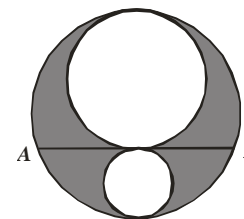
28) El número  $m = 999\dots9$  consta de 999 nueves. ¿Cuál es la suma de los dígitos de  $m^2$ ?

- (A) 8982 (B) 8991 (C) 9000  
 (D) 9009 (E) 9018

29)  $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ$  es igual a:

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\frac{7\sqrt{3}}{16}$  (D) 1 (E) 0

30) El área de la región sombreada es igual a  $2\pi\text{cm}^2$ . ¿Cuál es la longitud del segmento AB?



- (A) 1cm (B) 2cm (C) 3cm (D) 4cm (E) es imposible de determinar