OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA 2005
CANGURO MATEMÁTICO
PRUEBA PRELIMINAR
SEGUNDO AÑO DE DIVERSIFICADO

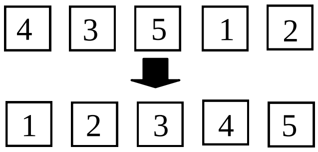
1) ¿Para cuál de los siguientes valores de x la expresión $\frac{x^2}{x^3}$ toma el menor valor?

Ⓐ - 2 Ⓑ 1 Ⓒ - 3 Ⓓ - 1 Ⓔ 2

2) Considera los números comprendidos entre 2 y 100, ¿cuántos son iguales al cubo de un número entero?

Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 1 Ⓓ 2 Ⓔ 5

3) En la figura se muestran cinco tarjetas numeradas del 1 al 5. Si en cada movimiento se permite solamente intercambiar la posición de dos cartas, ¿cuál es el número mínimo de movimientos para ordenarlas de manera creciente?



Ⓐ 1 Ⓑ 3 Ⓒ 5 Ⓓ 4 Ⓔ 2

4) Si $888\times111=2(2n)^2$, entonces el entero positivo n es igual a

Ⓐ 22 Ⓑ 11 Ⓒ 111 Ⓓ 8 Ⓔ 444

5) ¿Cuántos pares (a, b) de números enteros positivos existen con la siguiente propiedad: su máximo común divisor es 24 y su mínimo común múltiplo es 2496?

Ⓐ infinitos Ⓑ 6 Ⓒ 2 Ⓓ 0 Ⓔ 4

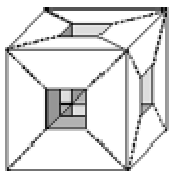
6) Sean A, B y C tres puntos en un plano.
Si $\angle BAC = 2(\angle ABC + \angle ACB)$, ¿cuánto mide $\angle BAC$?

Ⓐ 100º Ⓑ 72º Ⓒ 180º Ⓓ 120º Ⓔ 60º

7) La suma de cuatro números enteros positivos y consecutivos, no puede ser igual a:

Ⓐ 2002 Ⓑ 202 Ⓒ 220 Ⓓ 222 Ⓔ 22

8) En un cubo cuyas medidas son de 3cm por lado $(3\times3\times3)$ y su peso es de 810 g., se taladran unos agujeros con forma de paralelepípedos rectangulares y cuyas medidas son $1\times1\times3$, como se muestra en la figura. El peso en gramos del sólido que queda es.

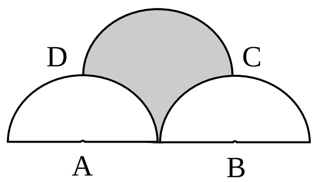


Ⓐ 600 Ⓑ 540 Ⓒ 570 Ⓓ 630 Ⓔ 660

9) Si f es una función tal que para todo número entero x es cierto que $f(x+1)=2f(x)-2002$ y además $f(2005)=2008$, entonces $f(2004)$ es igual a:

Ⓐ 2004 Ⓑ 2010 Ⓒ 2008 Ⓓ 2005 Ⓔ 2016

10) En la figura hay dos semicírculos y un círculo. ABCD es un rectángulo y el radio de cada uno de los semicírculos y del círculo miden 2cm. A y B son los centros de los semicírculos inferiores.
El área de la región sombreada en cm^2 es:

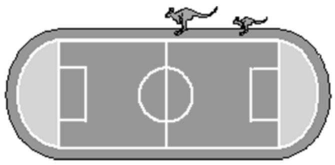


Ⓐ $2\pi+2$ Ⓑ 7 Ⓒ 2π Ⓓ $2\pi+1$ Ⓔ 8

11) Una caja contiene 60 boletos, unos son azules, otros rojos y otros blancos. Si todos los rojos fuesen reemplazados por azules, entonces habría el doble de boletos azules que de blancos. Sin embargo, si todos los boletos blancos se reemplazan con azules, entonces el número de boletos azules sería el triple que el número de boletos rojos.
¿Cuántos boletos azules hay en la caja?

Ⓐ 10 Ⓑ 20 Ⓒ 25 Ⓓ 15 Ⓔ 30

12) Mamá Canguro y su hijo Brincos, están saltando alrededor de un estadio cuyo perímetro es 300m. Ellos dan un salto por segundo pero los saltos de mamá Canguro miden 5m y los de Brincos 2m. Los dos comienzan a saltar a la vez, desde el mismo sitio y en el mismo sentido. Luego de 25 segundos, Brincos se cansa y se detiene, quedándose parado en el mismo sitio esperando a que su mamá llegue de nuevo al lugar donde él se detuvo. ¿Cuánto tiempo tarda mamá Canguro en llegar de nuevo al punto donde Brincos se detuvo?

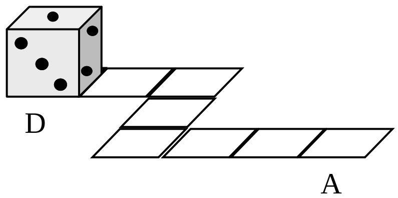


Ⓐ 51s Ⓑ 24s Ⓒ 40s Ⓓ 15s Ⓔ 66s

13) Ana pinta las caras de varios cubos de madera de blanco o de negro, de tal manera que en cada cubo usa los dos colores. ¿De cuántas maneras diferentes puede colorear los cubos?

Ⓐ 64 Ⓑ 8 Ⓒ 52 Ⓓ 16 Ⓔ 32

14) La suma de los puntos de las caras opuestas de un dado siempre es igual a 7. Si un dado rueda como se indica en la figura y la cara superior tiene 1 punto al comenzar en el punto D, ¿cuántas puntos tendrá la cara superior al llegar al punto A?



Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 5 Ⓓ 5 Ⓔ 4

15) El conjunto de todos los números reales que satisfacen la desigualdad $2^{4x} < 4^{2x}$ es igual a.

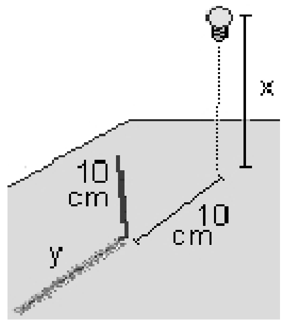
Ⓐ $(-\infty, 1)\cup(1, \infty)$ Ⓑ $(0,1)$ Ⓒ $(-\infty, 1)$ Ⓓ $(0, \infty)$ Ⓔ $\Re$

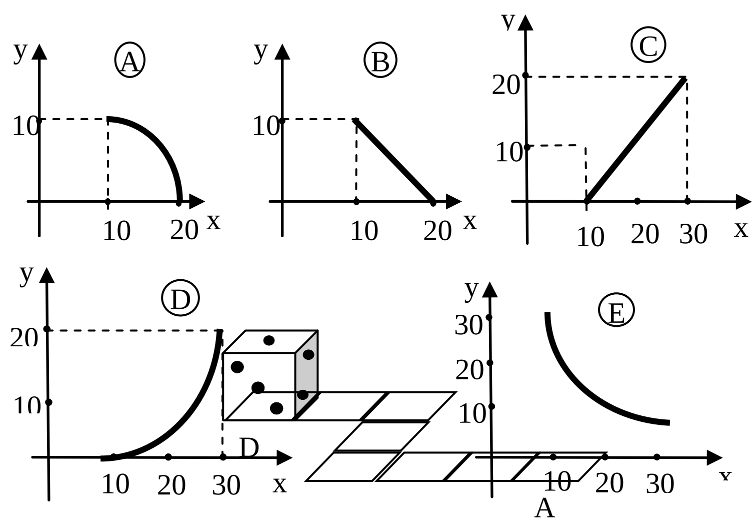
16) Se completan en la tabla los cuadrados con números de tal forma que los números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal formen progresiones aritméticas. ¿Cuál es el valor de *x*?

				21
	16			
		27		
				x

Ⓐ 4 Ⓑ 28 Ⓒ 33 Ⓓ 42 Ⓔ 49

17) En la figura se muestra un bombillo situado sobre una mesa a una altura de 10cm. Un lápiz de 10cm de largo, está haciendo contacto con la mesa, en posición vertical, a 10cm del punto que indica sobre la mesa la posición del bombillo. El bombillo se desplaza verticalmente hacia arriba. Al hacerlo el lápiz produce una sombra sobre la mesa. ¿Cuál es la gráfica que nos indica la longitud de la sombra y en función de la altura x, del bombillo sobre la mesa?

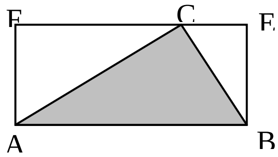




18) Dos botellas de igual volumen se llenan con una solución de agua y ácido. Las razones de los volúmenes de agua a ácido en cada botella son, $2:1$ y $4:1$, respectivamente. Si vertimos el contenido de ambas botellas en una más grande, la razón de agua a ácido será igual a:

Ⓐ $3:1$ Ⓑ $6:1$ Ⓒ $8:1$ Ⓓ $5:1$ Ⓔ $11:4$

19) La figura muestra un rectángulo $ABEF$ y un triángulo ABC. Sabemos que los ángulos ACF y CBE son iguales. Si $FC=6$ y $CE=2$ entonces el área de ABC es igual a:



Ⓐ 12 Ⓑ 16 Ⓒ $8\sqrt{2}$ Ⓓ 6 Ⓔ $8\sqrt{3}$

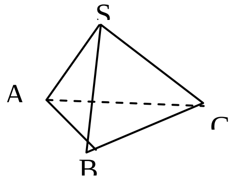
20) ¿Cuál de los siguientes números puede ser expresado como el producto de cuatro enteros distintos, todos mayores que 1?

Ⓐ 2025 Ⓑ 2187 Ⓒ 108 Ⓓ 124 Ⓔ 625

21) Determina el coseno del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles sabiendo que las medianas trazadas a los lados iguales son perpendiculares.

Ⓐ 0 Ⓑ $\frac{4}{5}$ Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ $\frac{2}{3}$ Ⓔ $\frac{3}{4}$

22) En la pirámide SABC todos los ángulos planos con vértice S miden 90°. Las áreas de las caras laterales SAB, SAC y SBC son iguales a 3, 4 y 6 unidades, respectivamente.
Determina el volumen de la pirámide SABC.



Ⓐ 8 u.c. Ⓑ 5 u.c. Ⓒ 6 u.c. Ⓓ 4 u.c. Ⓔ 12 u.c.

23) Si la suma de los dígitos de m es 30, entonces la suma de los dígitos de $m+3$ no puede ser:

Ⓐ 21 Ⓑ 15 Ⓒ 6 Ⓓ 24 Ⓔ 33

24) En una bolsa tenemos 17 bolas numeradas por 5 + k.125, con $k=0,1,....,16$, es decir, 5, 130, 255, 380, 505,…, 1755, 1880, 2005. Si seleccionamos varias bolas al azar, ¿cuál es el menor número de bolas que deberemos tomar para garantizar que exista al menos un par de ellas que sumen 2010?

Ⓐ 7 Ⓑ 8 Ⓒ 10 Ⓓ 11 Ⓔ 17

25) Si $\log_{10}\left(\sqrt{2005}+\sqrt{1995}\right)=n$ cuál de los siguientes es el valor de $\log_{10}\left(\sqrt{2005}-\sqrt{1995}\right)$.

Ⓐ $n-1$ Ⓑ $1-n$ Ⓒ $\frac{1}{n}$

Ⓓ $n+1$ Ⓔ Imposible de determinar con la información dada.

26) En las figura, ABCDEFGH es un octágono regular de lado 1. Los puntos P y Q son puntos de intersección de las circunferencias con centros A, B y C y radio 1. ¿Cuál es la medida del ángulo ∠APQ?

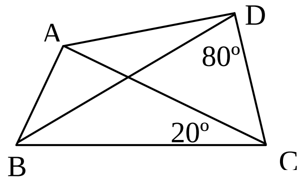
Ⓐ $\frac{19}{24}\pi$ Ⓑ $\frac{8}{11}\pi$ Ⓒ $\frac{5}{8}\pi$

Ⓓ $\frac{3}{4}\pi$ Ⓔ $\frac{7}{9}\pi$.

27) El entero A tiene exactamente 2 divisores. El entero B tiene exactamente 5 divisores. ¿Cuántos divisores tiene A • B?

Ⓐ 5 Ⓑ 6 Ⓒ 7 Ⓓ 10 Ⓔ Hace falta más información.

28) En el cuadrilátero $ABCD$ la diagonal BD es la bisectriz de $\angle ABC$ y $AC = BC$. Si $\angle BDC = 80^{o}$ y $\angle ACB = 20^{o}$, entonces la medida de $\angle BAD$ es igual a:



Ⓐ 90º Ⓑ 100º Ⓒ 110º Ⓓ 120º Ⓔ 135º.

29) Henry quiere viajar de la ciudad A a la ciudad B y ha pensado ir a una cierta velocidad. Luego decide que le gustaría llegar más temprano que la hora que había planificado y observa que si viaja a una velocidad de $5km/h$ mayor de la planificada, llegaría 5 horas antes de lo esperado, pero si viaja a una velocidad de $10km/h$ mayor a la planificada, llegará 8 horas antes. ¿Con cuál velocidad planificó Henry el viaje?

Ⓐ $10km/h$ Ⓑ $15km/h$ Ⓒ $20km/h$

Ⓓ $25km/h$ Ⓔ imposible de determinar.

30) Dado un número, multiplíquelo por 2 y luego réstele 1. Luego de aplicar este proceso 98 veces más se obtiene el número $2^{100}+1$.
¿Cuál fue el número con el cual comenzamos a calcular?

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 4 Ⓓ 6 Ⓔ ninguno de los anteriores.