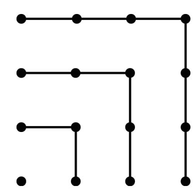
OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA 2010
CANGURO MATEMÁTICO
PRUEBA PRELIMINAR
CUARTO AÑO

RESPONDE LA PRUEBA EN
LA HOJA DE RESPUESTA ANEXA



1. Examinando la figura se puede concluir que $1+3+5+7 = 4\times 4$. ¿Cuál es el valor de $1+3+5+7+9+11+13+15+17$?

Ⓐ 14×14; Ⓑ 7×9; Ⓒ $4\times 4\times 4$; Ⓓ 16×16; Ⓔ 9×9.

2. Si ambas filas tienen la misma suma, ¿cuál es el valor de $*$?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$*$

Ⓐ 1010; Ⓑ 1020; Ⓒ 1910; Ⓓ 1990; Ⓔ 2000.

3. Dos recipientes vacíos de forma cúbica tienen bases de áreas 1 dm^2 y 4 dm^2, respectivamente. Se desea llenar el cubo grande trayendo agua desde un arroyo en el cubo pequeño. ¿Cuántas veces hay que ir hasta el arroyo?

Ⓐ 8 veces; Ⓑ 4 veces; Ⓒ 6 veces; Ⓓ 2 veces; Ⓔ 16 veces.

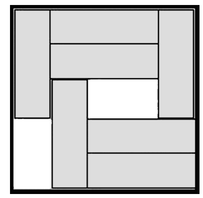
4. ¿Cuántos números de cuatro cifras son divisibles entre 5 y tienen los cuatro dígitos impares?

Ⓐ 900; Ⓑ 625; Ⓒ 125; Ⓓ 250; Ⓔ 100.

5. El director de una empresa dijo: "Cada uno de nuestros empleados tiene al menos 25 años de edad". Luego se comprobó que no había dicho la verdad. Esto significa que:

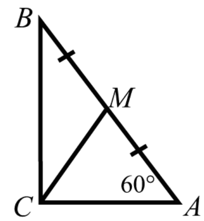
Ⓐ Todos los empleados de la empresa tienen exactamente 25 años de edad.
Ⓑ Todos los empleados de la empresa tienen más de 26 años de edad.
Ⓒ Ningún empleado de la empresa tiene todavía 25 años de edad.
Ⓓ Algún empleado de la empresa tiene menos de 25 años de edad.
Ⓔ Algún empleado de la empresa tiene exactamente 26 años de edad.

6. En una caja de 5×5 hay siete barras de 3×1, como muestra la figura. Se desea deslizar algunas barras de modo que quede espacio para una barra adicional. ¿Cuántas barras hay que mover, como mínimo?



Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ 4; Ⓓ 5; Ⓔ Es imposible.

7. ABC es un triángulo rectángulo, M es el punto medio de la hipotenusa AB y $\angle BAC = 60°$. Entonces $\angle BMC$ es igual a:



Ⓐ 105°; Ⓑ 110° ; Ⓒ 108°; Ⓓ 125°; Ⓔ 120°.

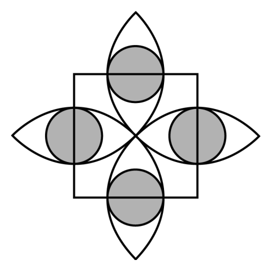
8. Escoja un número que pueda ser igual al número de aristas de algún prisma.

Ⓐ 100; Ⓑ 200; Ⓒ 2008; Ⓓ 2009; Ⓔ 2010.

9. Para cuántos números de dos dígitos xy se cumple la igualdad $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$?

Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 6; Ⓓ 32; Ⓔ para ninguno.

10. En la figura, la longitud del lado del cuadrado es 2, las semicircunferencias pasan por el centro del cuadrado y tienen sus centros en los vértices del cuadrado, y los círculos sombreados tienen centros en los lados del cuadrado y son tangentes a las semicircunferencias. ¿Cuánto vale el área sombreada?

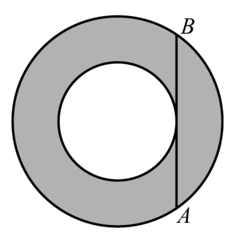


Ⓐ π; Ⓑ $\sqrt{2}\pi$; Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$; Ⓓ $4(3-2\sqrt{2})\pi$; Ⓔ $\frac{1}{4}\pi$.

11. Los tres números $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$ y $\sqrt[6]{7}$ son términos consecutivos de una progresión geométrica. El siguiente término de la progresión es:

Ⓐ 1; Ⓑ $\sqrt[12]{7}$; Ⓒ $\sqrt[10]{7}$; Ⓓ $\sqrt[9]{7}$; Ⓔ $\sqrt[5]{7}$.

12. La cuerda AB es tangente a la menor de dos circunferencias concéntricas. Si $AB = 16$, ¿cuál es el área de la región sombreada?

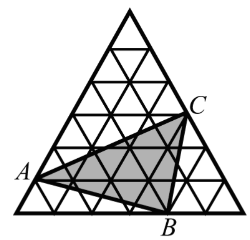


Ⓐ 32π; Ⓑ 63π; Ⓒ 64π; Ⓓ $32\pi^2$;
Ⓔ Depende del radio de los círculos.

13. Los números enteros x e y satisfacen $2x = 5y$.
Sólo uno de los siguientes números puede ser $x + y$. ¿Cuál?

Ⓐ 2011; Ⓑ 2010; Ⓒ 2009; Ⓓ 2008; Ⓔ 2007.

14. El triángulo equilátero más grande está dividido en 36 triangulitos equiláteros de área 1 cm^2 cada uno. Halle el área del triángulo ABC.



Ⓐ 11 cm^2; Ⓑ 12 cm^2; Ⓒ 13 cm^2;
Ⓓ 14 cm^2; Ⓔ 15 cm^2.

15. En una bolsa hay pelotas de tres colores: azules, verdes y rojas (hay al menos una de cada color). Se sabe que, si se extraen al azar y con los ojos vendados cinco pelotas, siempre se obtendrán al menos dos rojas y al menos tres serán del mismo color. ¿Cuántas bolas azules hay en la bolsa?

Ⓐ 4; Ⓑ 3; Ⓒ 2; Ⓓ 1;
Ⓔ Es imposible determinarlo sin información más detallada.

16. Tres martes en un mes coincidieron con fechas pares. ¿Qué día de la semana fue el 21 de ese mes?

Ⓐ miércoles; Ⓑ martes; Ⓒ viernes; Ⓓ sábado; Ⓔ domingo.

17. ¿Cuántos triángulos rectángulos pueden formarse uniendo tres vértices de un polígono regular de 14 lados?

Ⓐ 42; Ⓑ 84; Ⓒ 88; Ⓓ 98; Ⓔ 168.

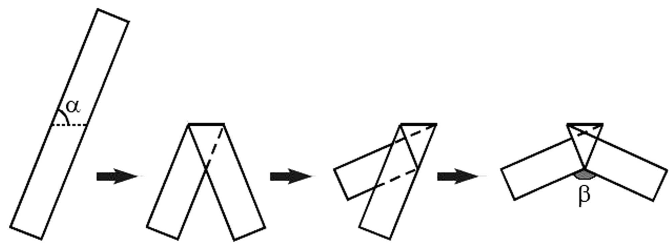
18. Cada estrella en la expresión $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10$ se reemplaza por $+$ o por $\times$. Sea N el mayor valor posible de las expresiones obtenidas de esa manera. ¿Cuál es el menor factor primo de N?

Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ 5; Ⓓ 7; Ⓔ otro número.

19. Las longitudes de los lados de un triángulo, en centímetros, son los números naturales 13, a y b. Halle el perímetro del triángulo sabiendo que $ab = 105$.

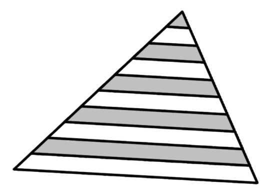
Ⓐ 69; Ⓑ 39; Ⓒ 51; Ⓓ 35; Ⓔ 119.

20. Una cinta de papel se dobla tres veces como muestra la figura. Sabiendo que $\alpha = 70°$, halle la medida del ángulo β.



Ⓐ 140º; Ⓑ 130º; Ⓒ 120º; Ⓓ 110º; Ⓔ 100º.

21. Las líneas paralelas a la base del triángulo dividen a cada uno de los otros dos lados en 10 segmentos iguales. ¿Qué porcentaje del area del triángulo es gris?



Ⓐ 42,5 %; Ⓑ 45 %; Ⓒ 46 %; Ⓓ 47,5 %; Ⓔ 50 %.

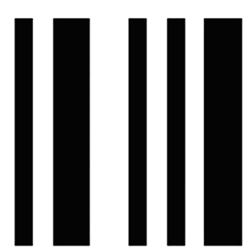
22. 100 personas tomaron parte en una carrera, y todos llegaron en instantes diferentes. Cuando se les preguntó en qué lugar llegaron, cada uno contestó con un número entero del 1 al 100. Si la suma de todas las respuestas es 4000, ¿cuántas respuestas, como mínimo, fueron falsas?

Ⓐ 9; Ⓑ 10; Ⓒ 11; Ⓓ 12; Ⓔ 13.

23. Un dado se lanza tres veces. Si el número obtenido en el tercer lanzamiento es igual a la suma de los números obtenidos en los dos primeros, ¿cuál es la probabilidad de que el 2 haya salido al menos una vez?

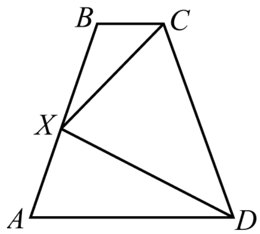
Ⓐ 1/6; Ⓑ 91/216; Ⓒ 1/2; Ⓓ 8/15; Ⓔ 7/12.

24. Un código de barras del tipo que se muestra a la derecha se compone de barras negras y blancas alternadas, comenzando y terminando con barras negras. Cada barra tiene ancho 1 ó 2, y el ancho total del código es 12. ¿Cuántos códigos diferentes son posibles, si siempre se leen de izquierda a derecha?



Ⓐ 24; Ⓑ 116; Ⓒ 66; Ⓓ 132; Ⓔ 12.

25. En el trapecio isósceles $ABCD$, X es el punto medio del lado AB, $BX = 1$ y $\angle CXD = 90°$. Halle el perímetro del trapecio $ABCD$.



Ⓐ 6; Ⓑ 5; Ⓒ 8; Ⓓ 7; Ⓔ Es imposible determinarlo.

26. Cada número del 1 al 10 se escribe diez veces en una pizarra. Los estudiantes en la clase juegan el siguiente juego: un estudiante borra dos números y escribe en la pizarra la suma de ambos disminuida en 1; luego otro estudiante borra dos números y escribe en la pizarra la suma de ambos disminuida en 1, y así sucesivamente. El juego continúa hasta que queda un único número en la pizarra. El número que queda es:

Ⓐ menor que 440; Ⓑ 451; Ⓒ 460; Ⓓ 488; Ⓔ mayor que 500.

27. El valor de la expresión

$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)\cdots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$$

es igual a:

Ⓐ 3^{2048}; Ⓑ 2^{4096}; Ⓒ 2^{2048}; Ⓓ 3^{4096}; Ⓔ $3^{2048}+2^{2048}$.

28. En cada lado de un pentágono se escribe un número natural, de manera tal que números adyacentes nunca tienen un factor común mayor que 1, pero números no adyacentes siempre tienen un factor común mayor que 1. Hay muchas posibilidades de hacer esto, pero uno de los números siguientes no aparecerá nunca en los lados del pentágono. ¿Cuál es?

Ⓐ 15; Ⓑ 18; Ⓒ 19; Ⓓ 21; Ⓔ 22.

29. La función f está definida para todos los reales positivos y cumple

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x,$$

para todo $x > 0$. ¿Cuál es el valor de $f(6)$?

Ⓐ 923; Ⓑ 1; Ⓒ 1013; Ⓓ 2009; Ⓔ 993.

30. En un cateto de longitud a de un triángulo rectángulo se escoge un punto P. En el otro cateto, de longitud b, se escoge otro punto Q. Sean K y H las proyecciones perpendiculares de P y Q, respectivamente, sobre la hipotenusa. Halle el mínimo valor posible de la suma $KP + PQ + QH$.

Ⓐ $a + b$; Ⓑ $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; Ⓒ $\dfrac{2ab}{a+b}$; Ⓓ $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$; Ⓔ $\dfrac{(a+b)^2}{2ab}$.