

1ª Olimpiada Juvenil de Matemáticas

Final Nacional

4 DE JUNIO DE 2004.

SEGUNDO AÑO EDUCACIÓN MEDIA Y DIVERSIFICADA

Apellidos y Nombres _____ Nº de Cédula _____

Instituto _____ Sección _____ Estado _____

Prob 1 _____ Prob 2 _____ Prob 3 _____ Prob 4 _____ Total _____

Problema 1

Se denota con $P(n)$ y con $S(n)$ el producto y la suma, respectivamente, de los dígitos del entero positivo n . Por ejemplo: $P(34) = 12$ y $S(34) = 7$. Si n es un número de dos dígitos y $P(n) + S(n) = n$, ¿cuál es el dígito de las unidades de n ?

Problema 2

Definimos una nueva operación en el conjunto de los números reales mediante la fórmula $a * b = \frac{a+b}{2}$. Si

$x * (x * 14) = x$, halla el valor de x .

Problema 3

Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b . Una circunferencia de radio r es tangente a los dos catetos y tiene su centro sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo. Demuestra que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}.$$

Problema 4

Una banda musical de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas está marchando en formación. Al inicio, la banda forma un cuadrado con igual número de columnas que de filas, pero luego cambian a la forma de un rectángulo con cinco columnas más que el número de filas. ¿Cuántos músicos tiene la banda?

Problema 5

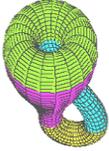
En cada planeta de un sistema solar hay un astrónomo observando al planeta más cercano al suyo. Las distancias entre los planetas son distintas dos a dos. Demuestre que si la cantidad de planetas es impar, entonces hay por lo menos un planeta al que nadie observa

Tiempo: 3 horas.

Cada problema vale 6 puntos.

Asociación Matemática Venezolana

Apartado postal 47898, Los Chaguaramos, Caracas 1041-A Venezuela



La idea es escoger uno de los problemas dos problemas.

Solución problema N° 1 a):

Como treinta alumnos tomaron la prueba y el promedio de notas es 80, entonces el puntaje total obtenido es: $80 \times 30 = 2.400$ puntos.

Sea x el número de alumnos que aprobaron la prueba. Entonces $84x$ es el número de puntos obtenidos por esos alumnos (promedio de los aprobados es 84). Y $60(30 - x)$ es el puntaje de puntos de los que no aprobaron. Así:

$$84x + 60(30 - x) = 2.400$$

$x = 25$, los que aprobaron.

Solución problema N° 2a):

Sea $n = a.10 + b$ la forma desarrollada del número n .

Luego: $P(n) = a.b$ y $S(n) = a + b$.

De donde: $a.b + a + b = a.10 + b$

Así: $a.b = a.9$

Como $a \neq 0$, por cuanto n es un número de dos dígitos, se tiene que **$b = 9$** .

Solución problema N° 5:

En un momento de la marcha se sabe que para un cierto número n , el número de los músicos es n^2 y además que $n + 5$ es divisor de n (por la condición al formar el rectángulo). Por división de polinomios:

$$\frac{n^2}{n+5} = n - 5 + \frac{25}{n+5}$$

Pero ese número es un número entero sólo cuando $25/(n+5)$ es un número entero. Y sólo obtenemos ese resultado cuando n sea 0 o 20. Luego el número de músicos es **$20^2 = 400$**