OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

Prueba Nacional
27 de Mayo de 2006
Primer Año de Educación Media y Diversificada

Apellidos y Nombres:____ **N^o de Cédula:**_______________

Instituto:___________________________________ **Sección:**_____ **Ciudad:**______________________

Prob. 1______ **Prob. 2** ______ **Prob. 3** ______ **Prob. 4** ______ **Prob. 5** ______ **Total:**___________

Problema 1 Sean a y b números enteros mayores que 1 y supongamos que $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$ ¿Cuál es el menor valor posible de $a^2 + b^2$?

Problema 2 Hallar todos los enteros positivos n tales que,

$$n^3 - n! = n.$$

($n!$ significa $n \cdot (n-1) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Por ejemplo $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$).

Problema 3 Consideremos un trapecio $ABCD$ con bases AB y CD de longitudes $5cm$ y $1cm$ respectivamente. Sea M un punto de AD y N un punto de BC, tal que el segmento MN es paralelo al lado AB y el área del cuadrilátero $ABNM$ es el doble del área del cuadrilátero $CDMN$. Calcular la longitud del segmento MN.

Problema 4 Hallar todos los pares de números reales (x, y) que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 20 \\ 2x + 2y + 2xy &= 15 \end{aligned}$$

Problema 5 Darío y David juegan el siguiente juego en un tablero 5×5: Darío pone una moneda en una de las casillas y David debe cubrir las 24 casillas restantes con fichas rectangulares 3×1. Darío gana si David no puede cubrir el resto del tablero con los rectángulos 3×1. ¿Cuáles son todas las maneras posibles que tiene Darío de ganarle a David?

Valor de cada problema: 6 puntos
Tiempo: 3 horas