

OLIMPIÁDA JUVENIL DE MATEMÁTICA
Prueba Nacional
27 de Mayo de 2006
Segundo Año de Educación Media y Diversificada

Apellidos y Nombres: _____ N° de Cédula: _____

Instituto: _____ Sección: _____ Ciudad: _____

Prob. 1 _____ Prob. 2 _____ Prob. 3 _____ Prob. 4 _____ Prob. 5 _____ Total: _____

Problema 1 Si un número tiene 223 dígitos y el producto de estos es 3^{446} , ¿Cuál es la suma de dichos dígitos?

Problema 2 Encontrar todas las soluciones de la ecuación $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$, donde m y n son enteros positivos

Problema 3 La sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, etc, se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 1003 \\ a_3 &= a_2 - a_1 = 0 \\ a_4 &= a_3 - a_2 = -1003 \end{aligned} ,$$

y así sucesivamente. Es decir, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$, para cada $n \geq 2$. Calcular la suma de los primeros 2006 términos de la sucesión.

Problema 4 José, Darío y Ana elaboraron un lote de etiquetas. Sobre cada una de ellas escribieron uno de los números 2,3,4,5,6,7 y 8. Más tarde se unió al grupo Estrella, quién colocó en la frente de cada uno de sus amigos una etiqueta. José, Darío y Ana no podían ver que número tenían en su frente, pero cada uno de ellos podía ver el número de sus otros dos amigos. Estrella les dijo: Los números que ustedes tienen no son todos diferentes. Además, el producto de los tres números es un cuadrado perfecto. ¿Pudieron los tres amigos descubrir que número tenía cada uno de ellos en su frente? Explique su respuesta.

Problema 5 Consideremos un triángulo isósceles ABC , con $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{2\pi}{5}$. Sea CD la bisectriz del ángulo \widehat{ACB} . Hallar el valor de $\frac{BC}{AB-BC}$.

Valor de cada problema: 6 puntos

Tiempo: 3 horas