

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

Prueba Regional - 08 de mayo de 2010

Quinto Año de Enseñanza Media

Apellidos y Nombres: _____ N° de Cédula: _____

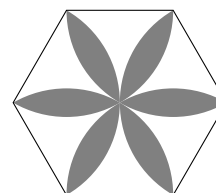
Teléfono(s): _____ Dirección de correo electrónico: _____

Instituto: _____ Sección: _____ Ciudad: _____

(No escriba en esta línea) Puntos: 1 _____ 2 _____ 3 _____ 4 _____ 5 _____ Total: _____

Problema 1

Con centro en cada vértice V de un hexágono regular de radio 1 se traza un arco de circunferencia que conecta los dos vértices adyacentes a V . Calcule el área de la “flor” de seis pétalos que se forma.



Problema 2

En una pecera viven unos pequeños seres llamados *bupis*, y un pez que se alimenta de ellos, comiendo 30 bupis cada día. Al finalizar cada día, si hay menos de 100 bupis éstos se reproducen, engendrando cada uno de ellos otro idéntico, doblando así su número total. Si hay 100 o más bupis no hay reproducción, tal vez por falta de espacio. Suponga que inicialmente hay 97 bupis. Durante el primer día el pez se come 30, dejando 67, que se reproducen y llegan a 134. El segundo día el pez se come 30 y quedan 104 (no se reproducen pues $104 \geq 100$). El tercer día los 104 se reducen a 74, se reproducen y quedan 148. Continuando de esta manera, ¿cuántos bupis habrá al finalizar el día número 1000?

Problema 3

Ana y Bernardo juegan de la siguiente manera: Ana comienza diciendo un número entero del 1 al 10. Bernardo debe responder diciendo un número que sea mayor o igual que el doble y menor o igual que el triple del que dijo Ana. Ana a su vez debe responder con un número que sea mayor o igual que el doble y menor o igual que el triple del que dijo Bernardo, y así sucesivamente. Gana el que primero diga un número mayor que 100. Muestre que Ana siempre puede ganar este juego.

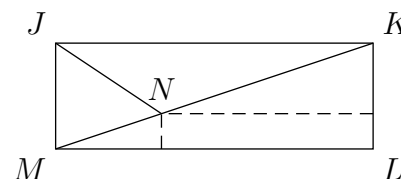
Problema 4

(a) Pruebe la igualdad $\frac{n^2}{(n-1)(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$.

(b) Calcule el valor exacto de $\frac{2^2}{1 \cdot 3} + \frac{3^2}{2 \cdot 4} + \frac{4^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2010^2}{2009 \cdot 2011}$.

Problema 5

En el rectángulo $JKLM$, la bisectriz del ángulo KJM corta a la diagonal KM en el punto N . Si las distancias de N a los lados LM y KL son, respectivamente, 1 y 8, ¿cuánto mide el lado LM ?



Valor de cada problema: 6 puntos

Duración de la prueba: 3 horas