El Problema del Mago.

Rafael Sánchez Lamoneda
UCV. Escuela de Matemáticas

Septiembre de 2008.

En la Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO 2000, se planteó un problema muy interesante. Digo esto pues el problema es uno de esos que cualquier persona puede comprender y más aún, disfrutar de su encanto, además nos permite a los profesores de matemáticas, asombrar a nuestros alumnos, amigos, familiares y cualquiera a quien le mostremos el truco de magia que dicho problema plantea. Sin más preámbulos veamos el Problema del Mago.

- **Problema . (IMO 2000)**

  Un mago tiene cien cartas numeradas del 1 al 100. Las dispone en tres cajas de tal manera que en cada una de ellas haya al menos una carta. Seguidamente pide a alguien de la audiencia que tome dos cartas que estén en cajas diferentes pero, sin que el mago vea de cuáles cajas las tomó. De inmediato esta persona debe anunciar en voz alta la suma de los números escritos en las cartas seleccionadas. Con esta información, el mago dice de cuales cajas se tomaron las cartas. ¿Cuántas maneras hay de disponer las cartas para que el truco funcione?

- **Solución**

  Hay doce maneras de disponer las cartas. Veamos:

  Primera solución: Se distribuyen las cartas módulo 3. Es decir, en la primera caja se ponen los números que dejan resto cero al dividir entre 3. En la segunda los que dejan resto 1 y en la tercera los de resto 2. De esta forma se garantiza siempre el éxito.

  Segunda solución: Se distribuyen poniendo la carta con el 1 en la primera caja, la carta con el 100 en la segunda caja y el resto en la tercera caja.

  Cada una de estas dos maneras de hacerlo da seis disposiciones distintas, teniendo 12 en total.

  Queda ahora demostrar que estas son las únicas formas de hacer la distribución. Yo conozco dos maneras distintas de hacer esto.

- **Primera Demostración [1]**

  Como tenemos tres cajas, una roja, una blanca y la tercera azul, diremos que una carta con el número i es roja, si está en la caja roja, azul si está en la caja azul o blanca si está en la caja blanca. En cada caso simplemente diremos que i es rojo, o azul o blanco, según la caja donde esté la carta.

Esta demostración analiza dos casos posibles:

- Caso 1. Supongamos que existe un i tal que, $i, i+1, i+2$, tienen colores diferentes. Digamos rba, (rojo, blanco, azul).

  Como $i + (i+3) = (i+1) + (i+2)$, y como el truco funciona bien, entonces el color de $i+3$ no puede ser b ni a, es decir, no puede ser ni el color de $i+1$ ni el color de $i+2$. En consecuencia $i+3$ es r.

  De esta forma hemos visto que tres colores vecinos distintos, determinan al siguiente, es decir, si $i, i+1, i+2$, tienen colores distintos, entonces $i+3$ tiene el mismo color de i. Además el patrón se repite: $rbarbarba \ldots etc.$

  Por lo tanto será suficiente con asignar los colores a $1, 2, 3$, lo cual puede hacerse de seis maneras distintas, (las seis permutaciones). Todos estos arreglos funcionan bien, pues las sumas $r+b$, $b+a$, y $a+r$, dan restos diferentes módulo 3.

- Caso 2. Supongamos ahora que no hay tres números consecutivos con colores diferentes.

  Supongamos que 1 es rojo, con ello no perdemos generalidad. Sea i el menor número que no es rojo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que su color es blanco. Sea k el menor número azul. Claramente $i < k$, pero además, $i+1 < k$, ya que si $i+1 = k$, como $i-1$ es rojo, entonces tendríamos que $i-1, i, i+1$ serían rba, lo cual es una contradicción pues no hay rba.

  Supongamos que $k < 100$. Como $i+k = (i-1)+(k+1)$, entonces $k+1$ tendría que ser rojo, pues en caso contrario el truco no funcionaría: $blanco + azul = rojo + otro$.

  Pero como $(i+1) + k = i + (k+1)$, entonces $i+1$ tendría que ser azul, lo cual es una contradicción, pues k es el menor azul.

  Por lo tanto $k = 100$.

  Como $(i-1) + 100 = i + 99$, entonces 99 es blanco.

  Demostraremos ahora que 1 es rojo, 100 azul y los restantes son blancos.

  Si algún t, con $1 < t < 100$, fuese rojo, como $t + 99 = (t-1) + 100$, entonces $t-1$ sería azul, lo cual es una contradicción, pues $k = 100$ es el menor azul. En consecuencia, si $1 < t < 100$, entonces t es blanco.

  Esto nos da la coloración, $rbb \ldots ba$. Finalmente este arreglo se puede de 6 formas diferentes: $rbb \ldots ba$, $abb \ldots br$, $rab \ldots bb$, $arb \ldots bb$, $bb \ldots ar$ y $bb \ldots bra$.

  Tenemos así las 12 formas posibles en las cuales se pueden disponer las cartas para que el truco funcione.

- **Demostración por inducción [2]**

  En efecto, sea S_n la proposición: las únicas soluciones posibles para cartas numeradas de 1 a n son las dos anteriores.

  Demostremos ahora por inducción que la proposición S_n es cierta para $n \geq 3$.

  El caso $n = 3$ es cierto de inmediato, más aún en este caso ambas soluciones coinciden, 1,3,2 o cualquier permutación.

  Supongamos la proposición cierta para n y demostrémosla para $n+1$.

  Supongamos que $n+1$ está solo en una caja. Si el 1 no estuviese solo, sea N la suma de las dos cartas mayores que podemos tomar de las dos cajas donde no está el $n+1$. Entonces

  $$n + 2 \leq N \leq n + (n-1).$$

  Pero entonces podemos obtener N como la suma de otras cartas pertenecientes a cajas distintas, $N = (n+1) + (N - n - 1)$ y esto es una contradicción. Por lo tanto el 1 debe estar solo y la solución que tenemos es de la forma, 1, $n+1$ y $2, \ldots, n$.

  Supongamos ahora que $n+1$ no está solo en una caja. Si lo quitamos tendremos una solución para n. Esta no puede ser 1, n y $2, \ldots, n-1$, pues en ese caso no podríamos poner a $n+1$ en una de las cajas y tener solución. Tendríamos entonces la solución módulo 3 y en este caso $n+1$ debe ir en la caja correspondiente a su resto módulo 3, pues de lo contrario no tendríamos solución para $n+1$.

Bibliografía

[1] The 41st International Mathematical Olympiad. Short-listed problems and solutions. IMO 2000. Korea

[2] http://web.archive.org/web/20040509013140/www.kalva.demon.co.uk/imo/isoln/isoln004.html