Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
ACM

Soluciones

Guía 1 (Ángulos y Congruencia de Triángulos)

Problemas Resueltos

1. Se tienen los ángulos consecutivos $\angle AOB, \angle BOC$ y $\angle COD$, siendo: $\angle AOC = 47°, \angle BOD = 51°$, y $\angle AOD = 80°$. Hallar la medida del $\angle BOC$.

   Solución: Primero calculamos la medida de $\angle COD$. $\angle COD = \angle AOD - \angle AOC = 80° - 47° = 33°$. Entonces $\angle BOC = \angle BOD - \angle COD = 51° - 33° = 18°$.

2. Hallar la medida de un ángulo, sabiendo que su complemento y suplemento suman $208°$.

   Solución: Sea x la medida del ángulo pedido. Entonces, según el enunciado $(90° - x) + (180° - x) = 208°$. Entonces, $270° - 2x = 208°$) de donde $2x = 62°$ y de allí $x = 31°$.

3. El doble del complemento de un ángulo, más el triple del suplemento del mismo, es $500°$. Hallar la medida del ángulo.

   Solución: Sea x la medida del ángulo pedido. Entonces, según el enunciado $2(90° - x) + 3(180° - x) = 500°$. Entonces, $180° - 2x + 540° - 3x = 500°$) de donde $720° - 5x = 500°$ y de allí $5x = 220°$ concluyendo que $x = 44°$.

4. El suplemento del complemento de un ángulo es igual a $3/2$ de la diferencia entre el suplemento y el complemento de dicho ángulo.

   Solución: Sea x la medida del ángulo pedido. Entonces, según el enunciado:

   $$180° - (90° - x) = \frac{3}{2}[(180° - x) - (90° - x)]$$

   Efectuando:

   $$90° + x = \frac{3}{2}[180° - x - 90° + x]$$
   $$90° + x = \frac{3}{2}(90°)$$
   $$90° + x = 135°$$
   $$x = 45°.$$

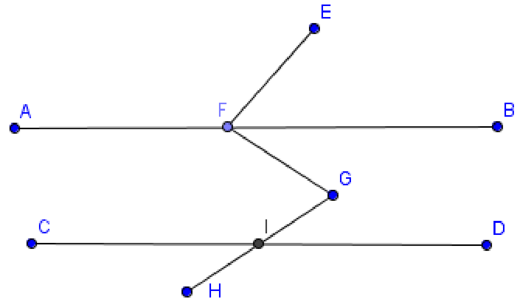
5. Dada la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y un punto O sobre ella, a un mismo lado se trazan los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, tal que $\overrightarrow{OA}$ sea interior al $\angle POB$ y $\angle AOP = 54°$. Hallar la medida de $\angle AOB$ si $\angle QOB$ es el suplemento del triple de $\angle BOA$.

   Solución: Según el enunciado:

   $$\angle POA + \angle AOB + \angle BOQ = 180°$$

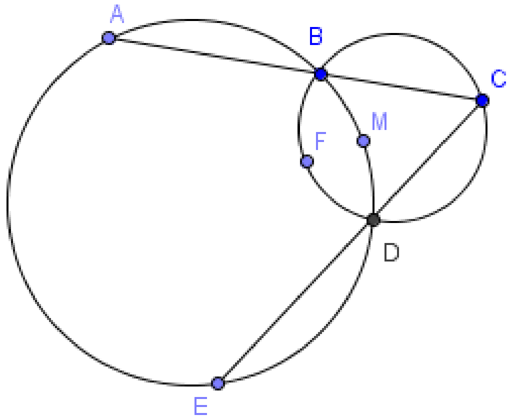
   Entonces $54° + x + (180° - 3x) = 180°$ de donde se obtiene que $x = 27°$.

6. Hallar la medida del $\angle AFE$ si los segmentos AB y CD son paralelos y se sabe que $\angle EFG = 100°$ y $\angle DIH = 3\angle BFG$.

   Solución: Primero hallamos el valor de $\angle BFG$. Si trazamos una paralela a los segmentos AB y CD por el punto G tendríamos que los ángulos $\angle FGI = \angle BFG + \angle GID$ dado los ángulos alternos internos que se generan. Por tanto, $100° = \angle BFG + 180° - 3\angle BFG$, de donde se obtiene que $\angle BFG = 40°$. Luego, $\angle EFB = 100° - \angle BFG$ entonces $\angle EFB = 60°$ y por ello $\angle AFE = 120°$.

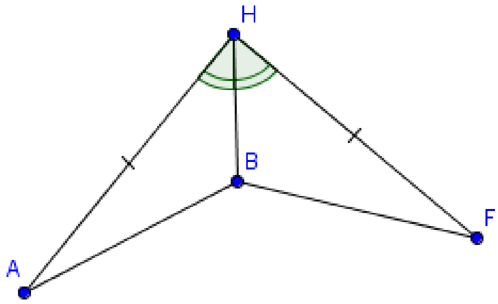
7. En la figura $\widehat{AE} = 192°$ y $\widehat{BFD} = 140°$. Hallar la medida del $\widehat{BMD}$.



Solución: En la menor circunferencia, $\angle ACE = \frac{\widehat{BFD}}{2}$ por ser el $\angle BCD$ inscrito. Por ello, $\angle ACE = 70°$.

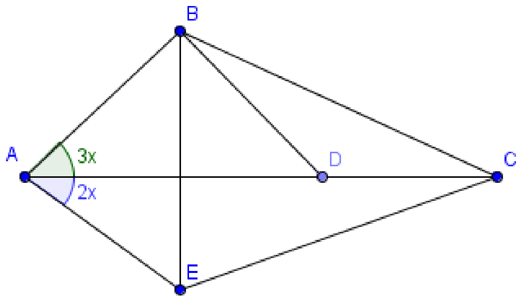
En la mayor circunferencia, $\angle ACE = \frac{\widehat{AE} - \widehat{BMD}}{2}$ por ser el $\angle BCD$ exterior. Por ello, $70° = \frac{192° - \widehat{BMD}}{2}$ de donde $\widehat{BMD} = 52°$.

8. En la figura, $AH = FH, \angle AHB = \angle FHB$. Probar que $\angle HAB = \angle HFB$.



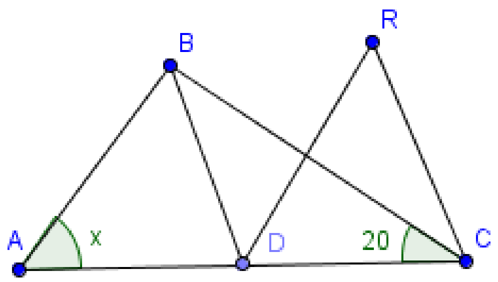
Solución: Como todo segmento es congruente consigo mismo $\overline{HB} \cong \overline{HB}$. Por hipótesis se sabe $AH = FH, \angle AHB = \angle FHB$ por tanto, por el postulado LAL se tiene que $\triangle AHB \cong \triangle FHB$ y por ello, $\angle HAB = \angle HFB$.

9. En la figura $AB = BC; AE = CD$ y $\angle BED \cong \angle BDE$. Halle el valor de x.

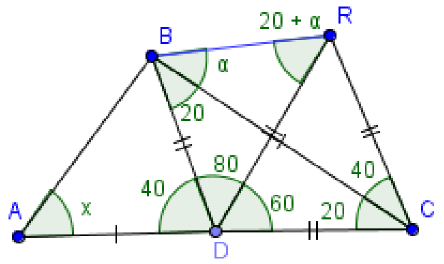


Solución: Observando los segmentos que son congruentes se tiene que $\triangle ABC$ es isósceles, por tanto, $\angle ACB = \angle BAC = 3x$. Por otro lado, que $\angle BED \cong \angle BDE$ nos dice que $\triangle BED$ es isósceles por lo que $EB = DB$. Entonces, dado que $AB = BC; AE = CD$ y $EB = DB$, por el postulado LLL se tiene que $\triangle BCD \cong ABE$. Como consecuencia se tiene que $\angle BCD = \angle BAE = 5x$. Observando lo que ocurre en el ángulo C se tiene que $\angle BCD$ es par lineal de $\angle ACB$ entonces, $3x + 5x = 180°$ de donde se obtiene que $x = 22{,}5°$.

10. En la figura, $AD = BC; BD = CD$ y el $\triangle CDR$ es equilátero. Hallar x.



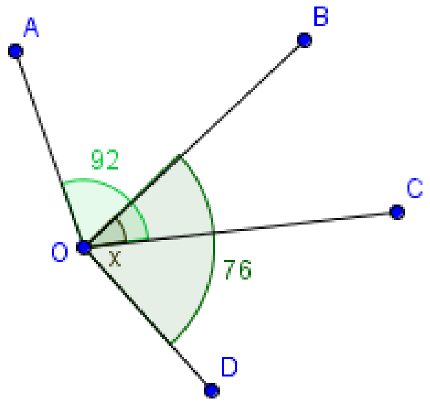
Solución: Trazamos primero $\overline{BR}$. Utilizando la información suministrada se puede obtener lo siguiente: $\angle BCR = 40°$ ya que el ángulo DCR mide $60°$ por pertencer a un triángulo equilátero. El $\angle DBC = 20°$ por ser el triángulo BCD es isósceles. Por tanto, el $\angle BDR = 80°$ porque la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$. De esta forma, el $\angle ADB = 40°$. Ahora aplicando el postulado LAL el triángulo BRC es congruente al triángulo ABD ya que $AD = BC, BD = RC$ y $\angle ADB = \angle BCR$. Entonces obtenemos que $x = \alpha$. Como el triángulo BDR es isósceles, el $\angle BDR = 20° + \alpha$. Por ello, $2(20° + \alpha) + 80° = 180°$ entonces $\alpha = 30°$, y por tanto, $x = 30°$.



Problemas Propuestos

1. Sean los ángulos consecutivos $\angle AOB, \angle BOC$, y $\angle COD$, siendo $2(\angle AOB) = 3(\angle COD)$; $\angle AOB = 92°$ y $\angle BOD = 76°$. Hallar la medida del $\angle BOC$.

   Solución: Por hipótesis, $2\angle AOB = 3\angle COD$. Como se puede ver en la figura $2(92 - x) = 3(76 - x)$. resolviendo se tiene que $184 - 2x = 228 - 3x$ de donde $x = 44$.



2. Las medidas de dos ángulos suplementarios son entre sí, como 3 a 7. Hallar el complemento del menor.

   Solución: Sea x la medida del menor. El suplemente medirá entonces $180 - x$. Según el enunciado, $\frac{x}{180-x} = \frac{3}{7}$. Resolviendo, $x = 54$ por lo que el complemento es $90 - 54 = 36$.

3. El doble de la medida de un ángulo es igual al triple de la medida de su complemento. Hallar la medida del ángulo.

   Solución: Sea x la medida del ángulo. Entonces, del enunciado, planteeamos $2x = 3(90 - x)$. Efectuando $2x = 270 - 3x$ de donde $5x = 270$ por lo que $x = 54$.

4. Si los 3/2 del complemento de un ángulo α es igual al suplemento del complemento del mismo ángulo. Hallar α.

   Solución: Según enunciado planteamos la ecuación: $\frac{3}{2}(90 - \alpha) = 180 - (90 - \alpha)$ de donde se tiene que $135 - \frac{3}{2}\alpha = 90 + \alpha$ luego $135 - 90 = \frac{3}{2}\alpha + \alpha$, por lo que $45 = \frac{5\alpha}{2}$ y por ello $\alpha = 18$.

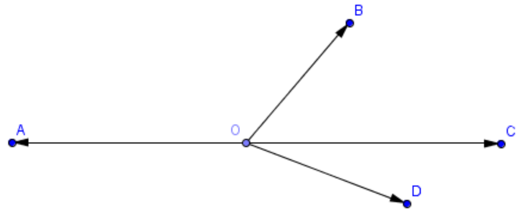
5. Hallar la medida de un ángulo tal que el triple de su complemento sea igual al suplemento de su mitad.

   Solución: Sea x la medida del ángulo pedido. Del enunciado planteamos la ecuación $3(90 - x) = 180 - \frac{x}{2}$. Resolviendo se obtiene $270 - 3x = 180 - \frac{x}{2}$ y de alli $90 = \frac{5x}{2}$ que nos lleva a $x = 36$.

6. La suma de las medidas de dos ángulos es $80°$ y el complemento de la medida del primero es igual al doble de la medida del segundo. Calcular la diferencia de dichos ángulos.

   Solución: Sean x e y las medidas de los ángulos en mención. Por dato, $x + y = 80$. También se tiene que $90 - x = 2y$ entonces $x + 2y = 90$. Pero separando convenientemente $x + y + y = 90$ donde $80 + y = 90$ obteniendo que $y = 10$. Luego $x = 70$ y la diferencia pedida es 60.

7. En la figura $\angle BOD = 80°$ y $\angle AOD - \angle AOB = 12°$. Halle la medida del $\angle BOC$.



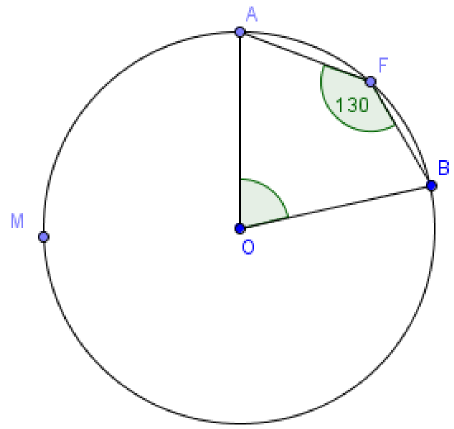
Solución: Primero hallamos la medida de $\angle AOB$ y luego $\angle BOC$. Sabemos que $\angle AOD + \angle AOB + \angle BOD = 360$. Luego $\angle AOD + \angle AOB + 80 = 360$ de donde $\angle AOD + \angle AOB = 270$. Además por dato, $\angle AOD - \angle AOB = 12$. Restando miembro a miembro las dos ecuaciones se tiene que $\angle AOB - (-\angle AOB) = 280 - 12$ por lo que $2\angle AOB = 268$ llegando a que $\angle AOB = 134$. Finalmente, $\angle BOC = 180 - \angle AOB$ lo que nos da que $\angle BOC = 46$.

8. La diferencia entre la suma de suplementos y la suma de complementos de dos ángulos que se diferencian en $20°$, es igual al doble de la suma de dichos ángulos.

   Solución: Sea x la medida del ángulo mayor. Luego, el menor mide $(x-20)$. Según enunciado, $[(180-x)+180-(x-20)] - [90-x+90-(x-20)] = 2[x+(x-20)]$ donde el primer corchete representa la suma de suplementos, el segundo la suma de complementos y la igualdad la suma de los ángulos. Efectuando $[380-2x] - [200-2x] = 2[2x-20]$ se obtiene $180 = 4x - 40$ de donde $x = 55$.

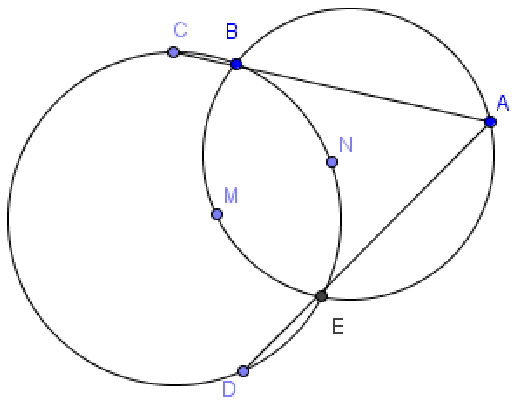
9. Los segmentos OA y OB son radios de una circunferencia de centro O. Sobre el menor arco $\widehat{AB}$ se toma el punto F. Si el ángulo AFB mide $130°$, hallar la medida del ángulo AOB.

   Solución: Consideremos la figura a continuación.



Sabemos que por ser ángulo central $\angle AOB = \angle AFB$. También, $\angle AFB = \frac{\widehat{AMB}}{2}$ por ángulo inscrito. Luego, $130 = \frac{\widehat{AMB}}{2}$ por lo que $\widehat{AMB} = 260$. Luego $\widehat{AFB} = 360 - \widehat{AMB}$ entonces $\widehat{AFB} = 100$. Reemplazando en la primera ecuación del ángulo central se tienen $\angle AOB = 100$.

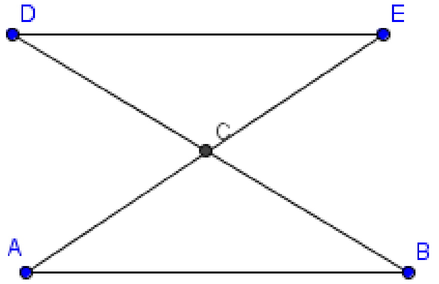
10. La figura muestra dos circunferencias congruentes. $\widehat{CD} = 164°$. Hallar la medida del $\angle BAE$.



Solución: Para la circunferencia $EBCD$: $\angle A = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BME}}{2}$ por ángulo exterior, entonces $\angle A = \frac{164 - \widehat{BME}}{2}$

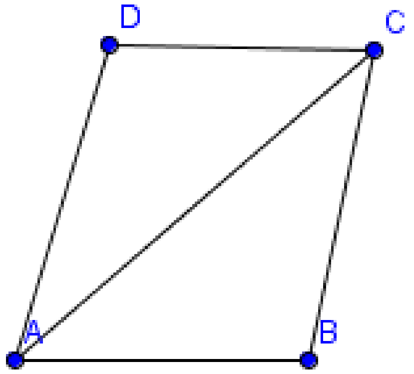
De la circunferencia $BAEN$: $\angle A = \frac{\widehat{BNE}}{2}$ por ángulo inscrito, entonces $\widehat{BNE} = 2\angle A$. Pero por ser congruentes las circunferencias $\widehat{BME} = \widehat{BNE}$ por lo que $\widehat{BME} = 2\angle A$. Finalmente, $\angle A = \frac{164 - 2\angle A}{2}$ de donde $\angle A = 41$.

11. En la figura, $\overline{AE}$ intersecta a $\overline{BD}$ en C, tal que $AC = DC$ y $BC = EC$. Demostrar que $\angle EAB \cong \angle CDE$.



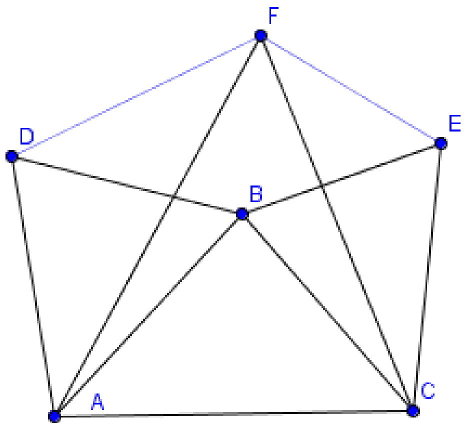
Solución: De la figura, se tiene que $\angle DCE = \angle ACB$ por ser opuesto por el vértice. Por dato, se tiene que $AC = DC$ y $BC = EC$. Por tanto, por el teorema LAL de congruencia de triángulos se tiene que $\triangle DCE \cong \triangle ABC$. Por ello, $\angle EAB \cong \angle CDE$.

12. En la figura, $AB = CD$, y $\angle DCA = \angle BAC$. Demostrar que $\angle ACB = \angle DAC$.

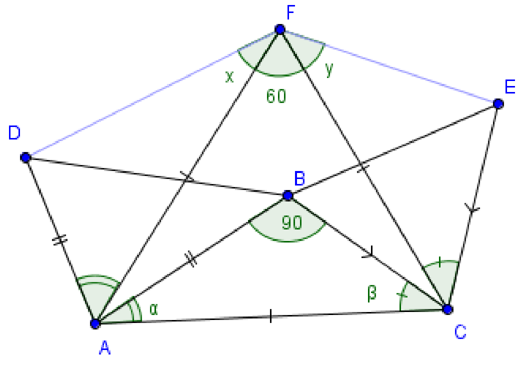


Solución: Los $\triangle DCA$ y $\triangle BAC$ son congruentes por el teorema LAL de congruencia de triángulos dado que por dato $AB = CD$, y $\angle DCA = \angle BAC$ y ambos triángulos comparten el lado AC. Por tanto, todos los ángulos son congruentes a su correspondiente por lo que $\angle ACB = \angle DAC$.

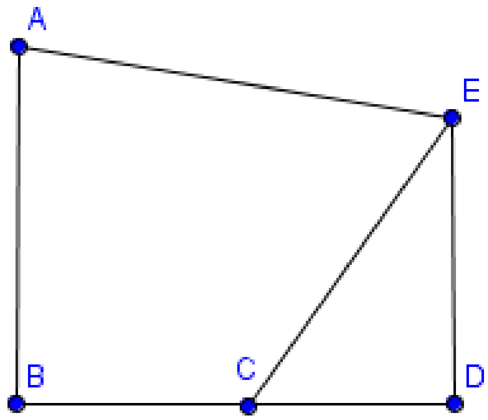
13. En la figura, $\triangle ADB, \triangle AFC$ y $\triangle BEC$ son triángulos equiláteros; calcular $\angle DFE$, si el ángulo ABC es recto.



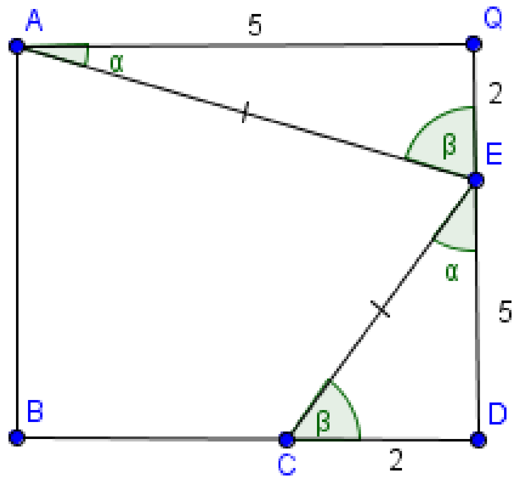
Solución: Lo que estamos buscando es el $\angle DFE = 60 + x + y$. Ahora bien, como $\angle DAF = 60 - \angle FAB$ y $\alpha = 60 - \angle FAB$ se tiene que el $\angle DAF = \alpha$. Por el teorema LAL de congruencia de triángulos se tiene que $\triangle DAF \cong \triangle BAC$ y por ello, $x = \beta$. Análogamente, $\angle FCE = 60 - \angle BCF$ y $\beta = 60 - \angle BCF$ se tiene que el $\angle FCE = \beta$. Por el teorema LAL de congruencia de triángulos se tiene que $\triangle FEC \cong \triangle ABC$ y por ello, $y = \alpha$. Además en el $\triangle ABC$, $\alpha + \beta = 90°$. Finalmente, $\angle DFE = 60° + x + y = 60° + \beta + \alpha = 60° + 90° = 150°$.



14. En la figura $AE = EC$; $\overline{AE} \perp \overline{EC}$; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; $\overline{ED} \perp \overline{DC}$. Si $BC = 3$ y $ED = 5$, Hallar AB.

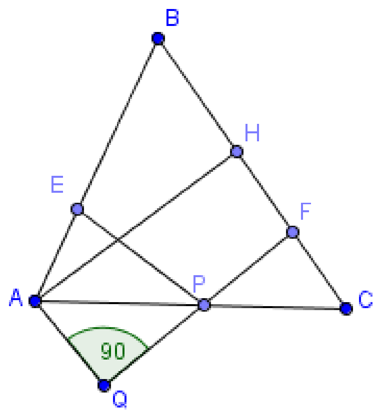


Solución: Trazamos $\overline{AQ}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{DE}$. Entonces, si $\angle ECD = \beta$ y $\angle CED = \alpha$ puesto que $\alpha + \beta = 90$ se obtiene que $\angle AEQ = \beta$ por ser complemento de α y $\angle QAE = \alpha$ por ser complemento de β. Por ALA se tiene que $\triangle AQE \cong \triangle EDC$ por lo que $AQ = ED$ y por ello $AQ = 5$. Enseguida, $CD = BD - BC$ pero $BD = AQ = 5$ por lo que $CD = 2$. y luego como $QE = CD$ entonces $QE = 2$. Finalmente $AB = QD$ por lo que $AB = QE + ED$ entonces, $AB = 7$.

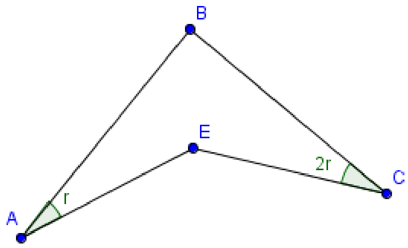


15. En la base de un triángulo isósceles ABC, $(AB = BC)$, se toma un punto cualquiera P, y se trazan $\overline{PE} \perp \overline{AB}$, $\overline{PF} \perp \overline{BC}$. Si $\overline{AH}$ es altura, demostrar que $AH = PE + PF$.

Solución: Para demostrar que lo propuesto, se realizará el trazo, como se observa en la figura, de $\overline{AQ} \perp \overline{FP}$. Entonces $\angle QAC = \angle ACB$ por alternos internos ya que $\overline{AQ} \parallel \overline{BC}$. Luego, $\triangle AQP \cong \triangle AEP$ y por ello, $PQ = PE$. Así, $AH = QF$ pero $QF = QP + PF$ por lo que $AH = PE + PF$ que es lo que se quería demostrar. Se puede probar también, por reducción al absurdo, que si uno toma un punto P fuera del segmento base del triángulo isósceles, la relación no se cumple dado que AH es una constante y es la que determina la proporción entre los lados PE y PF. Ahora bien, el problema explícitamente propone que se coloque el punto P en la base pero de no haberse determinado así, se debe buscar el punto P que cumpla con la condición.



16. En la figura $AE = EC = BC$. Hallar la medida del $\angle ABC$ en función de r.



Solución: Trazamos $\overline{BE}, \overline{CH} \perp \overline{BE}$ y $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ por lo que $BH = HA = a$. Ahora bien $\triangle AFE \cong \triangle EHC$ entonces $EF = a$ luego, en el $\triangle BFE : BE = 2EF$. Luego $\angle FBE = 30$. Además, $\angle HBC = 90 - r$ en el $\triangle HBC$. Entonces $\angle ABC = \angle FBE + \angle HBC$, por lo que $\angle ABC = 30 + 90 - r$ y por ello $\angle ABC = 120 - r$.