Soluciones a los problemas propuestos

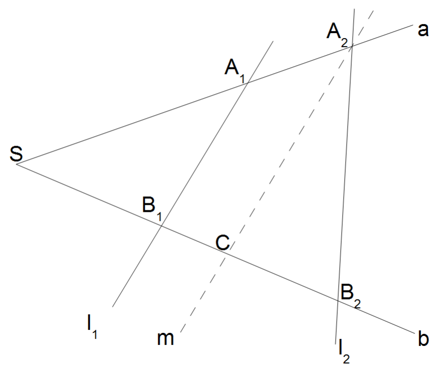
Febrero 2011

1. • l_1 y l_2 son dos rectas cualesquiera y las rectas a y b las cortan en A_1, A_2 y B_1, B_2 respectivamente. Se cumple que:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{SA_1}{SB_1} \tag{1}$$

Consideremos una recta m paralela a l_1 que corta a a en A_2 y a b en C. Por el Teorema de Tales se obtiene que:

$$\frac{A_1A_2}{B_1C} = \frac{SA_1}{SB_1} \tag{2}$$



De las igualdades anteriores se obtiene que $B_1C = B_1B_2$ por lo tanto C y B_2 son el mismo punto y l_2 y m son la misma recta, de donde l_2 es paralela a l_1.

• Se sabe que D es un punto del segmento BC tal que $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, y sea E el punto de intersección de la bisectriz de $\angle BAC$. Por el Teorema de la Bisectriz, se sabe que $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$ de donde se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC}$. Como D y E estan en el segmento BC y sólo hay un punto que corte un segmento en una proporción dada, D y E son el mismo punto. Por lo tanto, AD es la bisectriz de $\angle BAC$

2. Primero orderamos los lados de cada trángulo y luego evaluamos la relación entre cada par de ángulos. Así:

$$\frac{36}{24} = \frac{24}{16} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \tag{3}$$

De modo que cada par guarda la misma proporción y por lo tanto, los triángulos son semejantes.

3. Los triángulos CEB y ADB son semejantes, de donde: $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{AD}{AB}$ y por lo tanto $CE \cdot AB = AD \cdot BC$

4. Como $\angle ACD = \angle ABE$ y $\angle ADC = \angle EBD$, los triángulos ADC y EDB tienen dos pares de ángulos iguales y por lo tanto son semejantes. De esto se obtiene que $\angle CEB = \angle CAD$ de donde los triángulos CAD y CEB tienen dos pares de ángulos iguales y son semejantes.

5. Considerar las rectas que pasan por AC y DB. Se sabe que $CE \cdot EB = ED \cdot AE$ y por lo tanto $\dfrac{CE}{AE} = \dfrac{ED}{EB}$. Por el inverso del Teorema de Tales, como se cumplen las relaciones entre los segmentos, las rectas AC y DB son paralelas.

6. Como $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ se tiene que $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$ y por lo tanto

$$DC = \frac{DE \cdot AC}{AB} = \frac{25 \cdot 3}{15} = 5 \tag{4}$$

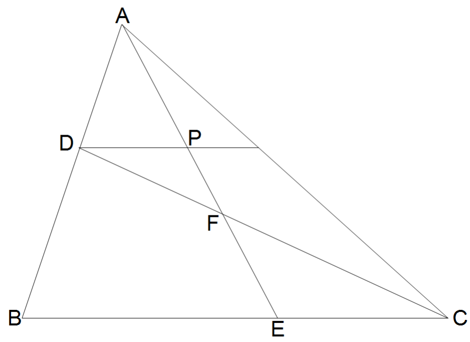
y $AD = AC - DC = 20$

7. Por el Teorema de Tales se tiene

$$\frac{4x-8}{4x} = \frac{4x+8}{4x+20} \tag{5}$$

Esta espresión se puede desarrollar para llegar a $X = 2$

8. Se traza una paralela a BC que pasa por D y corta a AE en P. Como los triángulos DPF y CEF son semejantes, $\dfrac{CF}{FD} = \dfrac{EC}{DP}$.



Por otro lado, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{3}{5}$ de donde se obtiene que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{8}{5}$. Luego, como $\dfrac{CE}{EB} = \dfrac{1}{2}$ y los triángulos ADP y ABE son semejantes, se tiene que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DP} = \frac{2EC}{DP} = \frac{8}{5} \tag{6}$$

Finalmente, de lo anterior se obtiene:

$$\frac{CF}{FD} = \frac{EC}{DP} = \frac{4}{5} \tag{7}$$

9. Por el Teorema de la Bisectriz se sabe que $\dfrac{BN}{AB} = \dfrac{NC}{AC}$ y $\dfrac{MB}{AB} = \dfrac{MC}{AC}$ y por lo tanto $NC = \dfrac{3}{2}BN$ y $MC = \dfrac{3}{2}MB$. Luego, $BN + NC = 5$ y $MC = MB + 5$. Sustituyendo los valores anteriores se llega a que $BN = 2$ y $MB = 10$ y finalmente $MN = 12$

10. Por el Teorema del Seno se sabe que:

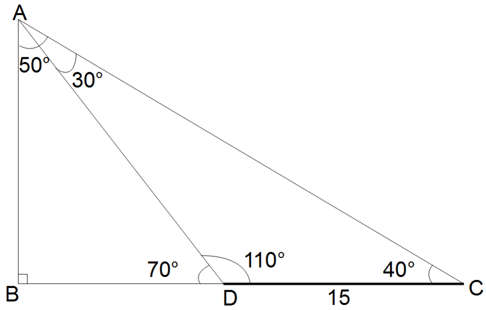
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \tag{8}$$

De donde simplemente se pueden sustituir los valores dados y despejar el valor de B:

$$B = \arcsin\left(\frac{16}{49}\operatorname{sen} 115\right) \tag{9}$$

Se puede notar que el valor númerico de B no es lo mas importante del problema, ya que lo que se busca es aplicar el Teorema del Seno para encontrar la solución.

11. Primero se determina el valor de algunos ángulos del problema. A partir de los daos del problema y que los ángulos internos de un triángulo suman 180^o se llega a que $\measuredangle BAC = 50^o$, $\measuredangle DAC = 30^o$ y $\measuredangle ADC = 110^p$.

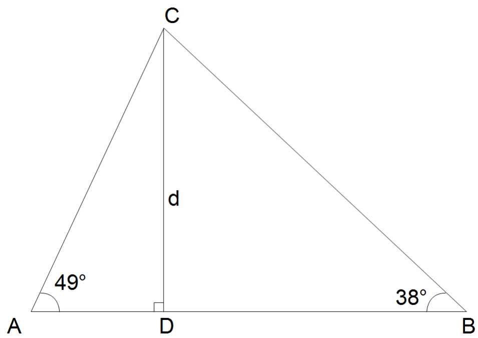


Aplicando el Teorema del Seno en $\triangle ADC$ se tiene que $\dfrac{DC}{\operatorname{sen} 30^o} = \dfrac{AC}{\operatorname{sen} 110}$ y por lo tanto $AC = 30 \cdot \operatorname{sen} 110^o$. Aplicando el mismo teorema en $\triangle ABD$ se tiene que $\dfrac{AC}{\operatorname{sen} 90^o} = \dfrac{BC}{\operatorname{sen} 50^o}$ de donde:

$$BC = AC \operatorname{sen} 50^o = 30 \cdot \operatorname{sen} 110 \cdot \operatorname{sen} 50 \tag{10}$$

12. Por el Teorema del Seno en los triángulos ACD y CDB se obtiene que:

$$\frac{d}{\operatorname{sen} 49^o} = \frac{AD}{\operatorname{sen} \angle ACD} \quad y \quad \frac{d}{sen 38^o} = \frac{DB}{\operatorname{sen} \angle DCB} \tag{11}$$



Luego, como $\operatorname{sen} \angle ACD = \cos 49^o$ y $\operatorname{sen} \angle DCB = \cos 38^o$ lo anterior se simplifica a:

$$AD = d \cot 49^o \quad y \quad DB = d \cot 38^o \tag{12}$$

Como $AD + DB = 10Km$ se tiene que $d(\cot 49^o + \cot 38^o = 10Km$ y por lo tanto

$$d = \frac{10Km}{\cot 49^o + \cot 38^o} \tag{13}$$

13. Aunque este problema se ve inicialmente complejo, se puede notar que:

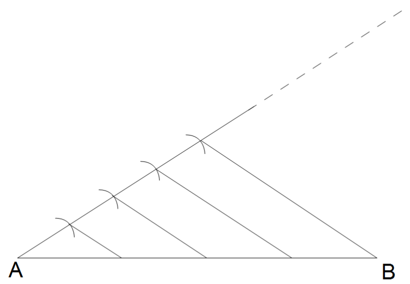
$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} = 2 \tag{14}$$

y por lo tanto AP es la bisectriz de $\angle BAC$, es decir que

$$\measuredangle BAP - \measuredangle CAP = 0 \tag{15}$$

14. Se traza una recta que pase por uno de los extremos del segmento y con el compás se realizan n divisiones sucesivas de una longitud desconocida. Luego se une el punto final de las divisiones con el otro extremo del segmento. Finalmente se trazan paralelas a este último segmento que pasen por cada división.

    Por el Teorema de Tales, las rectas paralelas cortan al segmento original y la recta en segmentos que guardan la misma proporción, y como dichos segmentos tienen la misma longitud en la recta trazada, tendrán la misma longitud en el segmento original.



15. E es el punto de intersección de la bisectriz externa del ángulo. Supongamos que $AC > AB$, por lo tanto, B está entre E y C (Por qué?). Luego, por el Teorema de la Bisectriz se sabe que $\frac{EB}{AB} = \frac{EC}{AC}$. Además se sabe que para $c \neq d$, si $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, entonces:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \tag{16}$$

    Pero $EC - EB = BC$ y por lo tanto:

$$\frac{EB}{BA} = \frac{EC}{AC} = \frac{BC}{AC - AB} \tag{17}$$

    En caso de que $AC < AB$ los signos se invierten, por lo cual se considera simplemente el valor absoluto.