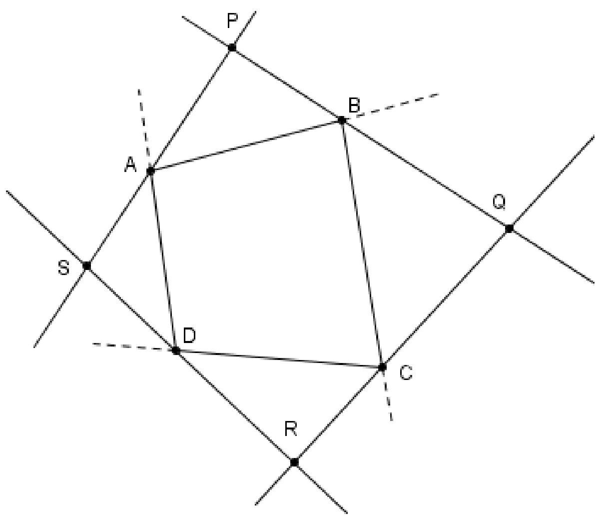
Cuadriláteros

Soluciones a los problemas propuestos

5. Sea ABCD un cuadrilátero. Se trazan las cuatro bisectrices externas de sus ángulos y se toman los cuatro puntos de corte de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes. Demostrar que esos cuatro puntos son concíclicos.

   Sean P, Q, R, S los puntos de corte de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes. Observemos los triángulos ASD y BQC:



$$\angle ADS = \frac{180° - \angle D}{2}$$

$$\angle CBQ = \frac{180° - \angle B}{2}$$

$$\angle QCB = \frac{180° - \angle C}{2}$$

$$\angle SAD = \frac{180° - \angle A}{2}$$

Tenemos entonces que

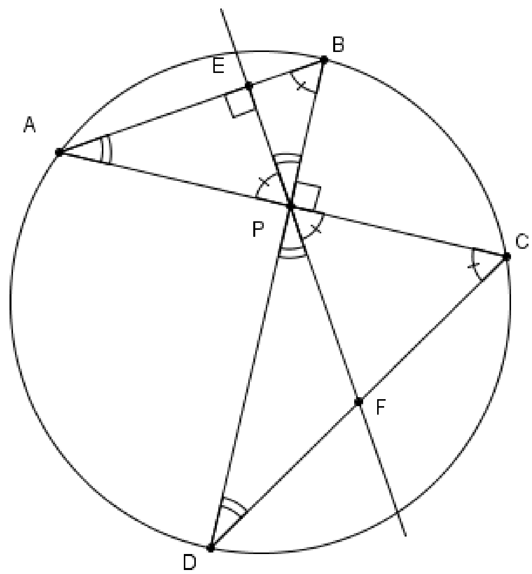
$$\angle RSP = 180° - \angle SAD - \angle ADS = \frac{\angle A + \angle D}{2}$$

$$\angle PQR = 180° - \angle CBQ - \angle QCB = \frac{\angle B + \angle C}{2}$$

$$\angle RSP + \angle PQR = \frac{\angle A + \angle B + \angle C + \angle D}{2}$$

$$\angle RSP + \angle PQR = 180°$$

6. Demostrar que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces una recta que pase por el punto de corte de las diagonales y sea perpendicular a uno de los lados, pasará por el punto medio del lado opuesto.



Sea ABCD el cuadrilátero cíclico y P la intersección de sus diagonales. Una recta perpendicular a AB que pasa por P intersecta a AB en F y a CD en F.

$$\Delta PEA \sim \Delta BEP \sim \Delta BPA$$

$$\angle EPA = \angle PBA$$

$$\angle PBA = \angle PCD$$

(Inscritos en el mismo arco)

$$\angle EPA = \angle FPC$$

(Opuestos por el vértice)

De donde nos queda

$$\angle FPC = \angle PCD$$

$$PF = CF \qquad (1)$$

Por otro lado

$$\angle BPE = \angle BAP$$

$$\angle BAP = \angle CDP$$ (Inscritos en el mismo arco)

$$\angle BPE = \angle DPF$$ (Opuestos por el vértice)

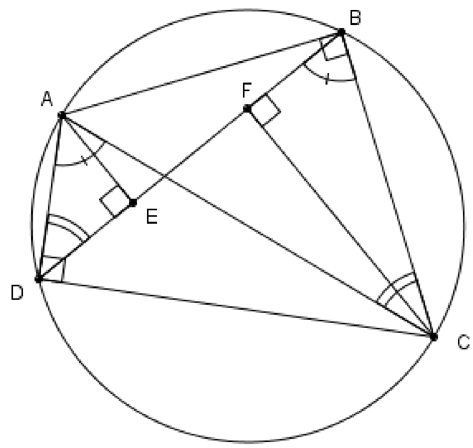
Tenemos así

$$\angle CDP = \angle DPF$$

$$DF = PF \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos finalmente que $CF = DF$.

7. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico tal que AC es diámetro de la circunferencia circunscrita. Sean E y F los pies de las perpendiculares desde A y C respectivamente hasta BD. Demostrar que $DE = BF$.



Como AC es diámetro, entonces ABC y CBA son ángulos rectos.

$$\angle BDA = \angle BCA$$

$$\angle DAC = \angle DBC$$

(Inscritos en el mismo arco de circunferencia)

$$\Delta DEA \sim \Delta CBA$$

$$\frac{DE}{CB} = \frac{DA}{CA}$$

$$DE = \frac{AD \cdot BC}{AC}$$

$$\Delta BFC \sim \Delta ADC$$

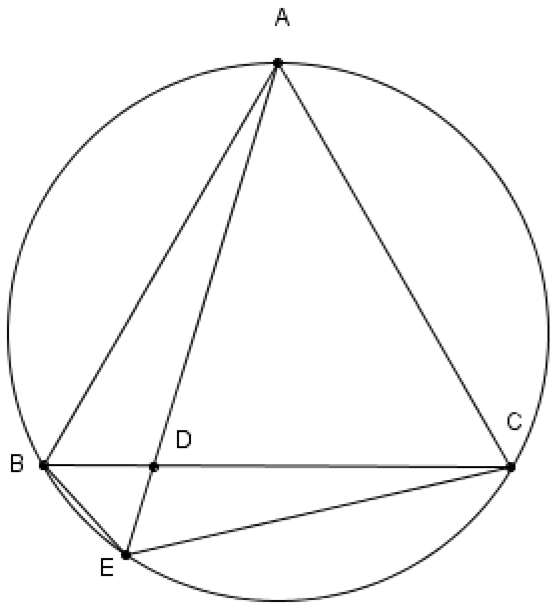
$$\frac{BF}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

$$BF = \frac{AD \cdot BC}{AC}$$

Tenemos entonces que $DE = BF$.

8. Sea ABC un triángulo equilátero. Una recta a través de A corta al lado BC en D y al circuncírculo del triángulo en E. Demostrar que:

$$\frac{1}{ED}=\frac{1}{EB}+\frac{1}{EC}$$



Aplicando el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero ABCE, tenemos

$$AB{\cdot}EC+AC{\cdot}EB=AE{\cdot}BC$$

Como $AB=AC=BC$

$$EA=EC+EB \qquad (1)$$

Podemos ver fácilmente que

$$\angle BEA=\angle BCA$$

$$\angle ABC=\angle AEC$$

$$\angle EBC=\angle EAC \qquad (2)$$

(Ángulos inscritos en el mismo arco)

Pero como ABC es equilátero $\angle BCA=\angle ABC$

Nos queda que $\angle BEA=\angle AEC \qquad (3)$

Por (2) y (3) tenemos que

$$\Delta EAC \sim \Delta EBD$$

$$\frac{EC}{ED}=\frac{EA}{EB}$$

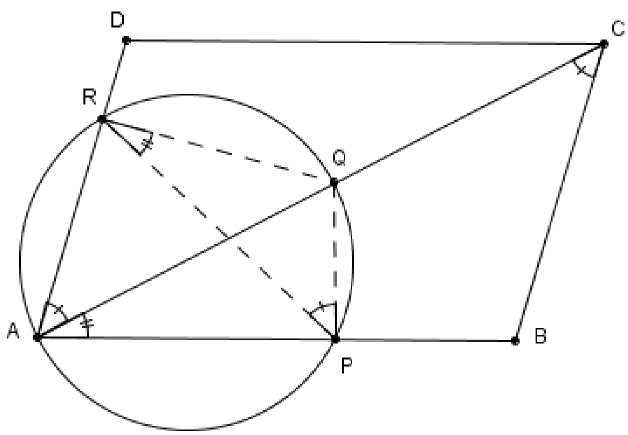
$$\frac{1}{ED}=\frac{EA}{EB{\cdot}EC}$$

Usando (1), nos queda

$$\frac{1}{ED}=\frac{EB+EC}{EB{\cdot}EC}$$

$$\frac{1}{ED}=\frac{1}{EC}+\frac{1}{EC}$$

9. Si una circunferencia corta dos lados y una diagonal de un paralelogramo ABCD es puntos P, R, Q, entonces $AP{\cdot}AB{+}AR{\cdot}AD{=}AQ{\cdot}AC$



Si aplicamos el teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero APQR

$$AP{\cdot}QR{+}AR{\cdot}QP{=}AQ{\cdot}RP \ (1)$$

Es fácil ver que $\angle QPR{=}\angle QAR$ y $\angle PRQ{=}\angle PAQ$ (2) por ser ángulos inscritos en el mismo arco de circunferencia y como $\angle QAR{=}\angle ACB$, entonces $\angle QPR{=}\angle ACB$ (3)

Por (2) y (3) tenemos que

$$\Delta PRQ{\sim}\Delta CAB$$

$$\frac{RQ}{AB}=\frac{RP}{AC}$$

$$QR=\frac{AB{\cdot}RP}{AC}$$

$$\frac{QP}{BC}=\frac{RP}{AC}$$

Pero como ABCD es un paralelogramo $BC{=}AD$, queda entonces

$$QP=\frac{AD{\cdot}RP}{AC}$$

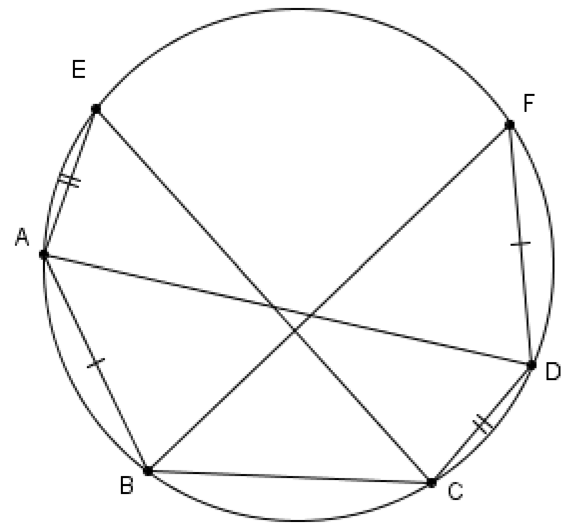
Si sustituimos los valores de QR y QP es (1) obtenemos

$$AP{\cdot}AB{\cdot}\frac{RP}{AC}+AR{\cdot}AD{\cdot}\frac{RP}{AC}=AQ{\cdot}RP$$

$$AP{\cdot}AB{+}AR{\cdot}AD{=}AQ{\cdot}AC$$

10. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico. Demostrar que:

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}$$



Sean F y E puntos sobre el circuncírculo del cuadrilátero ABCD tales que

DF=AB y AE=DC

Los arcos FDC y BAE son iguales, de donde

FC=BE

Además los arcos EAF y BEF son ambos iguales al arco AEFD, de donde

BF=EC=AD

Aplicando el teorema de Ptolomeo a los cuadriláteros ABCE y BCDF obtenemos

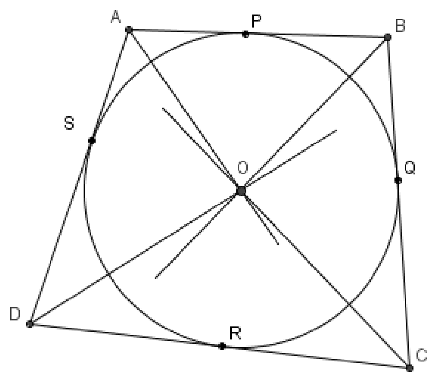
$$AC\cdot BE=AB\cdot EC+BC\cdot AE=AB\cdot AD+BC\cdot CD$$

$$BD\cdot FC=BC\cdot FD+CD\cdot FB=BC\cdot AB+CD\cdot AD$$

Dividiendo estas dos expresiones

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}$$

11. Sea ABCD un cuadrilátero circunscribible. Demostrar que las bisectrices de los ángulos internos concurren en el centro de la circunferencia inscrita.



Sean P, Q, R, S los puntos de tangencia del cuadrilátero ABCD con su incírculo. Sabemos que $SA=AP$, por lo que la bisectriz de ∠SAP es también mediatriz de SP, por lo tanto pasa por el incentro O.

Como $PB=BQ$, $QC=CR$ y $RD=DS$, tenemos que la bisectrices de ∠PBQ, ∠QCR y ∠RDS son mediatrices de los segmentos PQ, QR y RS respectivamente, por lo tanto concurren en O.

12. Sea ABCD un cuadrilátero circunscribible. El incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados AB y BC en P y Q y el incírculo del triángulo ADC es tangente a los lados CD y DA en R y S respectivamente. Demostrar que cuadrilátero PRQS es cíclico.

Para este ejercicio demostraremos primero que los incírculos de los triángulos ABC y ADC son tangentes entre sí. Sean X y Y los puntos de tangencia de los incírculos con la diagonal

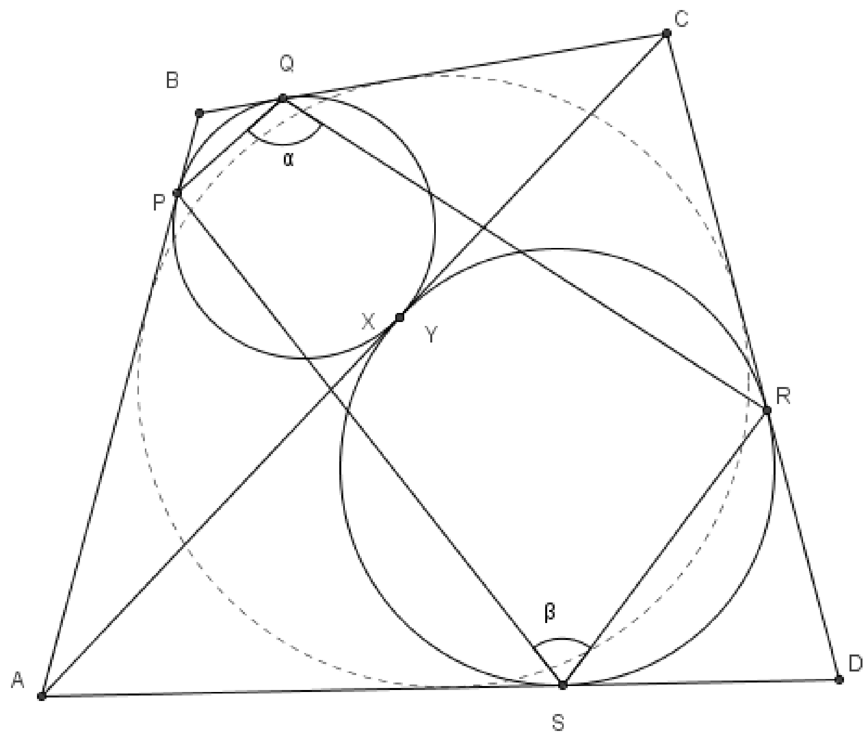
$$AX=\frac{AB+AC+BC}{2}-BC$$

$$AY=\frac{AD+AC+CD}{2}-CD$$

$$XY=AX-AY=\frac{AB+AC-BC}{2}-\frac{AD+AC-CD}{2}$$

$$XY=\frac{AB+CD-BC-AD}{2}=0$$

Es decir, X=Y



Sean A, B, C y D los ángulos del cuadrilátero y sean α=PQR y β=RSP. CQ=CX=CR y AS=AX=AP, es decir, los triángulos CQR y APS son isósceles. Además, los triángulos PBQ y RDS son también isósceles ya que BP=BQ y DR=DS. Tenemos entonces

$$\alpha+\beta=(180°-\angle BQP-\angle CRQ)+(180°-\angle DSR-\angle ASP)$$

Pero

$$2\angle BQP=\angle BQP+\angle BPQ=180°-\angle B$$

De donde $\angle BQP=90°-\frac{\angle B}{2}$. De la misma manera $\angle CQR=90°-\frac{\angle C}{2}$, $\angle DSR=90°-\frac{\angle D}{2}$ y $\angle ASP=90°-\frac{\angle A}{2}$. Remplazando obtenemos

$$\alpha+\beta=180°-(90°-\frac{\angle B}{2})-(90°-\frac{\angle C}{2})+180°-(90°-\frac{\angle D}{2})-(90°-\frac{\angle A}{2})$$

$$\alpha+\beta=\frac{\angle A+\angle B+\angle C+\angle D}{2}$$

$$\alpha+\beta=180°$$