Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
ACM

Potencia y eje radical

Carmela Acevedo

Potencia

Ejercicio 1:

Completar la demostración del Teorema 1 en el caso en que el punto P sea interior a la circunferencia. (Fig. 3)

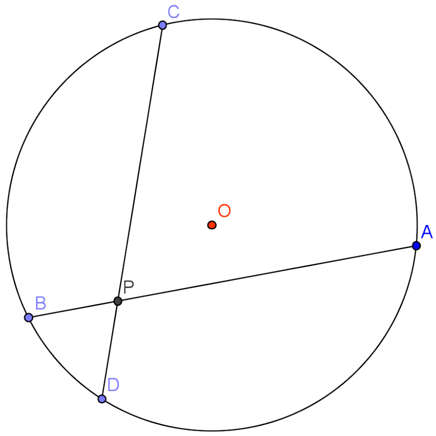

Figura 1: Fig 3

Solución

Por estar inscritos en el mismo arco entonces $\angle DCA = \angle DBA$ y por ser opuestos por el vértice entonces $\angle CPA = \angle BPD$ por lo que $\Delta APC = \Delta DPB$ y $\dfrac{AP}{DP} = \dfrac{PC}{PB}$ para finalmente obtener $AP \cdot PB = PC \cdot PD$.

Problemas:

1. Qué potencia tiene cualquier punto que esté sobre la circunferencia?

Solución

Tomemos una secante que pase por un punto P sobre la circunferencia y que corte a la misma en A un punto que coincide con P y otro cualquiera B así que la potencia de punto es $PA \cdot PB = 0 \cdot PB = 0$ para todo punto P sobre la circunferencia.

2. Demostrar que la medida de dos tangentes a un mismo círculo desde un mismo punto P es la misma.

Solución

Sea P un punto exterior a una circunferencia y sean PT y PF dos tangentes distintas de este punto a la circunferencia. Por ser radios entonces $OT \perp PT$ y $PF \perp OF$. Entonces tenemos: $PT^2 + R^2 = PO^2$ y $PF^2 + R^2 = PO^2$ y restando ambas ecuaciones obtenemos $PT^2 - PF^2 = 0 \Rightarrow PF = PT$ por las distancias ser reales positivos.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y E la intersección de las diagonales. Probar que $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD}$

Solución

Por estar insritos en el mismo arco tenemos: $\angle ABD = \angle ACD, \angle BAC = \angle BDC, \angle CAD = \angle DBC$ y $\angle ADB = \angle ACB$ por lo que $\Delta ABE \approx \Delta DCE, \Delta AED \approx \Delta BEC$ así que: $\dfrac{AB}{DC} = \dfrac{AE}{DE}$ y $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{ED}{EC}$. Multiplicando ambas obtenemos $\dfrac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD} = \dfrac{AE \cdot ED}{CE \cdot DE}$ cancelando ED obtenemos lo que se pedía.

3. Si PT y PU son tangentes desde P a dos círculos concéntricos, con T en el más pequeño, y el segmento PT intersecta al otro círculo en Q, entonces $PT^2 - PU^2 = QT^2$

Solución

Sea la circunferencia de mayor radio la circunferencia 1 y la de mayor radio la 2. Denotemos la distancia de P al centro común como d y el mayor radio r_2 y el menor r_1. $P(Q)_1 = QT^2, P(P)_2 = PU^2, P(P)_1 = PT^2$ entonces podemos reescribir como $PT^2 - PU^2 = QT^2$ como $P(P)_1 - P(P)_2 = P(Q)_1$ así que es equivalente probar esto pero $P(P)_1 = d^2 - r_1^2, P(P)_2 = d^2 - r_2^2, P(Q)_1 = r_2^2 - r_1^2$ de donde obtenemos $d^2 - r_1^2 - d^2 + r_2^2 = r_2^2 - r_1^2$ lo cual es cierto.

4. Desde un punto externo P se trazan dos tangentes a un círculo y lo intersectan en A y B. Una tercera tangente intersecta al círculo en T y a PA y PB en Q y R respectivamente, encuentra el perímetro del triángulo PQR.

Solución

Por ser dos tangentes desde un mismo punto a un mismo círculo tenemos que $QA = QT$ y análogamente $TR = RB$. Sea $PA = PB = d$. El perímetro de $\Delta PQR = PQ + QR + PR$ pero $QR = QT + TR = QA + RB$ entonces el perímetro es $PQ + QA + PR + RB = PA + PB = 2d$

5. Un cuadrado $ABCD$ de lado 10 tiene un círculo inscrito en él. Sea M el punto medio de AB. Encuentre la longitud de la parte del segmento MC que se encuentra fuera del círculo.

Solución

Sea P el punto de intersección entre la circunferencia inscrita en $ABCD$ y CM. M es el punto de tangencia de AB y la circunferencia por lo que está sobre la misma. Por pitágoras tenemos: $BM^2 + BC^2 = MC^2$, $MC = 5\sqrt{5}$ y por la potencia de punto de C con respecto a la circunferencia tenemos $CP \cdot CM = CK^2$ donde K es el punto de intersección de BC con la circunferencia. Entonces $CP = 25/5\sqrt{5} = \sqrt{5}$

Eje Radical

Problemas

1. Dados dos circunferencias que se intersectan en un punto, cuál es el eje radical? Y si se cortan en dos puntos distintos?

Solución

Sea P el punto de intersección entre ambas circunferencias entonces este punto tiene potencia igual a 0 con respecto a ambas circunferencias por lo que pertenece al eje radical, como sabemos que el eje radical es perpendicular a la recta que une a los centros entonces en este caso es una recta perpendicular a la recta que une los centros y que pasa por P.

Sean A y B los puntos de intersección de ambas circunferencias tenemos que las potencias de A y de B con respecto a ambas circunferencias es nula entonces el eje radical pasa por ambos puntos determinando así la recta.

2. Construir el eje radical de dos circunferencias dadas con regla y compás sin medidas.

Solución

Se traza una circunferencia, luego un radio y una recta perpendicular a ésta recta es tangente a la circunferencia. Se traza un segmento perpendicular a esta recta que será un radio de una nueva circunferencia tal que no se intersecte con la primera. El punto medio de el segmento que une a los dos puntos de tangencia está sobre el eje radical ya que si P es el punto y T y K los puntos de tangencia tenemos que $PT^2 = PK^2$ entonces $PT = PK$ entonces el punto medio tiene igual potencia de punto. Ahora se traza una perpendicular al segmento que une a los centros y pase por P y éste es el eje radical.

Si las circunferencias se intersectan se traza una recta perpendicular a los centros que pase por lo(s) punto(s) de intersección.

3. Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos desde los cuales las tangentes a dos circunferencias dadas tienen igual medida?

Solución

Un punto que tenga tangentes de igual medida con respecto a dos circunferencias distintas tiene igual potencia de puntos con respecto a ambas pues si PT es una y PK es otra tenemos que $PT = PK$ entonces $PT^2 = PK^2$ por lo que este lugar geométrico es el mismo al lugar geométrico de todos los puntos que tienen igual potencia de punto con respecto a ambas circunferencias.

4. Cuando la distancia entre los centros de dos circunferencias es mayor a la suma de sus radios los círculos tienen cuatro tangentes en común. Probar que los puntos medios de todos estos segmentos son colineales.

Solución

Todos estos puntos están sobre el eje radical por tener la misma potencia con respecto a ambas circunferencias entonces están sobre la misma recta.

5. Sea ABC un triángulo acutángulo, y sea T un punto en su interior tal que $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$. Sean M, N y P las proyecciones de T en BC, CA, y AB, respectivamente. El circuncírculo de MNP intersecta a las rectas BC, CA, y AB por segunda vez en M', N' y P' respectivamente. Probar que el triángulo $M'N'P'$ es equilátero.

Solución

Los cuadriláteros $PN'NP'$ y $APTN$ son cíclicos entonces $\angle AN'P' = \angle APN = \angle ATN$. Similarmente $\angle CN'M' = \angle CMN = \angle CTN$. De esto se deduce que $\angle AN'P' + \angle CN'M' = \angle CTN + \angle ATN = \angle ATC = 120^o$. Entonces, $\angle P'N'M' = 180^o - 120^o = 60^o$. Análogamente $\angle N'M'P' = \angle N'P'M' = 60^o$ por lo que el triángulo $M'N'P'$ es equilátero.

6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que sus diagonales AC y BD son perpendiculares, sea P el punto de intersección. Prueba que las reflexiones de P con respecto de AB, BC, CD y DA son concíclicas.

Solución

El cuadrílátero que quermeos probar que es cíclico es una homotecia por uno determinado por las proyecciones de P sobre los lados, entonces es suficiente probar que el anterior es cíclico. sean X, Y, Z, W las proyecciones de P sobre los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Los cuadriláteros $AXPW, BYPX, CZPY$, y $DWPZ$ son cíclicos ya que todos tienen un par de ángulos de 90^o opuestos que son iguales. Considerando los ángulos formados por un lado y una diagonal obtenemos que $\angle WAP = \angle WXP, \angle PXY = \angle PBY, \angle YZP = \angle YCP$, y $\angle PZW = \angle PDW$ en los triángulos APD y BPC tenemos $\angle PAD + \angle PDA = 90^o$ y $\angle PBC + \angle PCB = 90^o$. Entonces

$$\angle WXY + \angle WZY = \angle WXP + \angle PXY + \angle YZP \angle PZW = \angle WAP + \angle PDW + \angle PBY + \angle YCP = 90^o + 90^o = 180^o$$

que muestra que el cuadrílátero $XYZW$ es cíclico.

7. Sea BC el díametro de un semicírculo y A su punto medio. Sea M un punto sobre el segmento AC y P, Q los pies de las perpendiculares desde A y desde C a la línea BM, respectivamente. Prueba que $BP = PQ + QC$.

Solución

Sea $R \in BQ$ tal que Q esté entre B y R y $QR = QC$. Ya que $\angle BQC$ es recto, Qestá sobre el semicírculo. Entonces el cuadrilátero $BAQC$ es cíclico, entonces $\angle AQC = 180^o - \angle ABC = 135^o$. De aquí sigue que $\angle AQR = 360^o - 135^o - 90^o = 135^o$. Esto implica que el triángulo AQC y AQR son congruentes, de donde $AR = AC = AB$. En el triángulo isósceles ABR, AP es una altura, entonces $BP = PR$, y entonces $PR = PQ + QC$.